最优化与最优控制

蔡宣三 编著

清华大学出版社

内 容 简 介

本书从工程应用角度出发，系统地介绍最优化理论和方法，其中包括线性最优化、非线性最优化、网络最优化、动态最优化等问题。全书共十二章，前半部是静态最优化理论，主要是数学规划：线性规划、整数规划和非线性规划。还有一章专门介绍网络最优化方法。非线性规划占的篇幅较多，介绍了凸规划、二次规划和对偶性，並介绍了应用较广泛的各种数值计算方法：一维和多维搜索方法、共轭方向和共轭梯度法、变尺度法、罚函数法和投影梯度法等等。后半部是动态最优化理论即最优控制理论。书中介绍了用古典变分法求解无约束动态最优问题，以及用极大值原理和动态规划方法求解有约束的动态最优问题，並讨论了离散系统动态最优化问题。

本书是为高等工科院校电机系有关专业如电机与电器、电力系统自动化、高电压工程、工业企业电气化与自动化等专业的高年级学生及研究生编写的参考书。也可供其它专业学生学习最优化方法时参考。

最 优 化 与 最 优 控 制

蔡宣三　　编著

★

清 华 大 学 出 版 社 出 版

北京　海淀　清华园

清 华 大 学 印 刷 厂 印 刷

新华书店北京发行所发行　　各地新华书店经售

★

开本：850×1168 1/32　印张：20.5　字数：570 千字

1982 年 12 月第一版　1983 年 1 月第一次印刷

印数 1～35000

统一书号：15235·64　定价　2.70 元

目　　录

第一章 概　　论

§ 1-1 概　　述

过去十几年间最优化理论与方法发展十分迅速。最优化方法在数学上是一种求极值的方法，它是应用数学的一个分支，现在它已渗透到科学、技术、工程、经济各领域。

实际上人们做任何一件事，不管是分析问题，还是进行综合、作出决策，都要用一种标准衡量一下是否达到了最优。在科学实验、生产技术改进、工程设计，和在生产计划管理、社会经济问题中，人们总希望采取种种措施，以便在有限的资源条件下或规定的约束条件下得到最满意的效果。

在进行一项工作时（例如产品设计、物资运输或分配等等）应用最优化技术，可以帮助我们较快地选择出最优方案，或作出最优决策。因此最优化方法在各种工程技术、自动控制、系统工程、运筹学以及经济计划、企业管理各方面都被广泛应用。

数学家们研究最优化问题，已有很多年历史。古希腊数学家毕达哥拉斯早在公元前 500 年就已发现了所谓黄金长方形，即长方形的长与宽的最佳比例为 1.618，称为黄金分割比。古希腊和欧洲的建筑师、美术家认为在建筑、人像雕塑和绘画中应用这个比例将使建筑和艺术最优美、协调。

1.618 是一个很有趣的数字，例如下述一组数字间，存在着奇妙的关系。

$$a = 0.618,$$

$$b=1, \qquad b-a=0.382$$
$$c=1.618, \qquad c-b=0.618$$
$$d=2.618, \qquad d-c=1$$
$$e=4.236, \qquad e-d=1.618$$

$$\frac{e}{d}=\frac{d}{c}=\frac{c}{b}=\frac{b}{a}=1.618, \quad \frac{e-d}{d-c}=\frac{d-c}{c-d}=\frac{c-b}{b-a}=1.618$$

$$a+b=c, \qquad b+c=d, \qquad c+d=e。$$

1.618 的倒数 0.618 现在还在优选法中广泛应用着，而 0.618 法是一种有效的一维搜索最优化方法。 1.618 恰好是 $x^2+x-2=0$ 的正数解，而 0.618 则是 $x^2-x-2=0$ 的正数解。

在微积分出现以前，已有许多人开始研究用数学方法解决最优化问题。例如欧洲古代城堡几乎都是圆形的。因为公元前 187 年-212 年，阿基米德已证明，给定周长，圆所包围的面积最大，数学上称为等周问题。中国古代城堡却是方形的，这是因为给定周长时，正方形是包围面积最大的四边形；反之给定面积时，正方形是周长最短的四边形，这两个问题是对偶的。

著名的捷线问题，或称最短时间问题是这样提出的：如果有一个质量为m的小球受到重力的作用，在垂直平面内沿金属丝无摩擦地下滑到某一点，为了使下滑时间最短，则金属丝应当具有什么形状？这是一个求泛函极值问题，要用变分法来解算。伽利略曾猜测金属丝形状是圆弧，但 1694 年贝努里证明这种金属丝是一条摆线，与变分法所得结果一致。

科学和工程技术发展史上也有许多最优化问题的重要结论。例如“自由能量”最小时化学系统达到平衡；光在两点间行进时间为最小；高斯的最小二乘设想是使试验数据和拟合曲线间的误差平方和为最小；维纳（Wiener）对控制系统的设计思想是误差平方的时间积分为最小；网络图论中极大流-极小割集定理说明信息流（运

输流）的极大值等于切割网络通道的极小容量，对于解决信息网络（包括计算机网络）或运输网络（包括电力系统输电网络）极大流问题来说，是很重要的。最短路径问题也很早就用网络拓扑解决了。

在电工技术中最优化方法的应用也是很广泛的。电路理论中的基本定理之一是最大功率传输定理，用古典最优化方法——求导数的方法证明共轭匹配是交流网络传输功率最大的条件。在满足性能指标要求的前提下，如何选择参数及几何尺寸使电机、变压器、大功率饱和电抗器等电工设备的体积、重量、费用为最小，这对国民经济的发展很有意义。电网络设计中常要求在满足电路方程的前提下，选择网络元件参数，使消耗功率为最小，或使网络的实际响应值与希望值之间的误差为最小。一个电子系统，应如何设计各元部件的失效率，使系统全局可靠性达到规定要求，同时为保证可靠性所需费用为最小，这在航天设施中是十分重要的问题。一个控制系统在满足系统动态方程的条件下，应选择怎样的控制变量序列（控制函数），使系统从初始状态能以最短时间转移到规定的终态，这就是最优时间控制问题。类似的最优控制问题还有：最少燃料消耗、最优能量控制、随动系统中跟踪误差平方的积分为最小等等。目前国内外也已将最优化技术应用于电场的计算和电力系统的可靠性研究，并用网络最优方法研究电力系统经济运行。

在二十世纪五十年代以前，解决最优化问题的数学方法只限于古典求导方法和变分法（求无约束极值），或是拉格朗日(Lagrange)乘子法解决等式约束下的条件极值问题。这类求可导函数或泛函数极值的必要充分条件称为古典最优化问题。

由于科学技术和生产的迅速发展，实践中许多最优化问题已经无法用古典方法来解决。又由于大型快速电子计算机的发展，自五十年代末以来已经有许多计算机算法解决最优化问题。从理论上说，其中有代表性的是：库恩（H.W.Kuhn）和图克（A.W.Tucker）两人推导了关于不等式约束条件下的非线性最优必要条件，称为库恩-图克定理，贝尔曼（Bellman）的最优化原理和动态规划理论，庞特里亚金（Pontriagin）的极大值原理，以及卡曼（Kalman）的关于随机控制系统最优滤波器，这些构成了现代最优化技术及最优控制理论的基础。目前“最优化方法”已成为国内外许多大学规定的大学生、研究生的必修内容，也是在职技术干部、管理人员继续学习的重要部分。

最优化方法是一种数学方法，而不是工程方法，它与应用数学、计算机科学以及各专业领域都有密切的关系。用最优化方法解决实际问题一般分三步进行：

1． 提出最优化问题，叙述目标是什么？约束条件是什么？求什么变量？建立最优化问题的数学模型，确定变量，列出目标函数及约束式（等式或不等式）。

2． 分析模型，选择合适的求解方法。

3． 编程序，用计算机求最优解，对算法的收敛性（是否最终能收敛到最优解）、通用性与简便性、效率（计算时间）及误差等作出评价。

由此可见，最优化方法是用计算机寻优的方法。大型计算机的发展及应用为求解大规模最优化问题（又称高维的多变量极值问题）创造了条件。

§1-2 最优化问题数学模型的建立

最优化方法的第一步是要叙述问题和建立问题的数学模型，其中包括目标函数和约束条件（简称约束），用函数、方程式和不等式来描述说明所求的最优化问题。其中识别目标、确定目标函数的数学表达形式这一步尤为困难。以下分别说明变量、约束和目标函数的确定。

一、变量的确定

变量一般指最优化问题或系统中待确定的某些量。例如，电机的最优设计中，变量可能为电流密度 j、磁通密度 B、轴的长度、直径以及其它几何尺寸等。电路的最优设计中要确定的变量主要是电路元件（R、L、C）的数值。对产品设计问题来说，一般变量数较少（例如几个到几十个），变量数的多少以及约束的多少表示一个最优化问题的规模大小，因此工程上最优设计问题属于中小规模的最优化问题。而生产计划、调度问题中变量数可达几百个、几千个，属于大规模最优化问题。变量用 X 表示，$X=(x_1, x_2\cdots, x_n)^T$

二、约束条件

求目标函数极值时的某些限制称为约束，例如：要求变量为非负或为整数值，这是一种限制；可用的资源常常是有限的（资源泛指人力、设备、原料、经费、时间等等）；问题的求解应满足一定技术要求，这也是一种限制（如产品设计中规定产品性能必须达到的某些指标）。此外还应满足物理系统的基本方程和性能方程（如电路设计必须服从电路基本定律 KCL 和 KVL，控制系统最优设计则用状态方程或高阶微分、差分方程来描述其物理性质。如果列写出来的约束式，越接近实际系统，则所求得的最优化问题的解，也越接近于实际的最优解。

等式约束　　$g_i(X)=0$，$X\in E^n$，$i=1, 2, \cdots, m$，$m<n$。

不等式约束　$h_j(X)\geqslant 0$ 或 $\leqslant 0$　$j=1, 2, \cdots, r$。

3．　目标函数

“最优化”有一定的标准或评价方法。目标函数是这种标准的数学描述。目标函数 $f(X)$ 可以是效果函数或费用函数，$f(X)=f(x_1, x_2, \cdots x_n)$。用效果作为目标函数时，最优化问题是要求极大值，而费用函数不得超过某个上界成为这个最优化问题的约束；

反之，目标函数是费用函数时，问题变成了求极小值，而效果函数不得小于某个下界就成为这个求极小值问题的约束了，这是对偶关系。

上述费用和效果都是广义的，如费用可以是经费，也可以是时间、人力、功率、能量、燃料、材料、占地面积或其它资源。而效果可以是性能指标、利润、效益、精确度、灵敏度等等。也可以将效果与费用函数统一起来，以单位费用的效果函数或单位效果的费用函数为目标函数，前者是求极大值，后者则是求极小值。

求极大值和求极小值问题实际上没有什么原则的区别。因为求 $f(X)$ 的极小值相当于求 $-f(X)$ 的极大值（见图 1—1），即 $\min f(X) = -\max[-f(X)]$。两者的最优值均在 $x = x^*$ 时得到。

综上所述，最优化问题的数学模型可以表示成如下形式：

$$\left.\begin{array}{ll}\min\ f(X) & X\in E^n \\ \text{约束条件}\ g_i(X)\leqslant 0^{[\text{注}]} & i=1,\ 2,\ \cdots m\end{array}\right\}\ (1—1)$$

[例 1]　多路输出的有源线性网络最大输出功率问题。

设有源线性网络供电给多路负载（图 1—2），每一路的输出电压为 U_1，U_2，…，U_n；负载电阻为 R_1，R_2，…，R_n，该网络总的输出功率为：

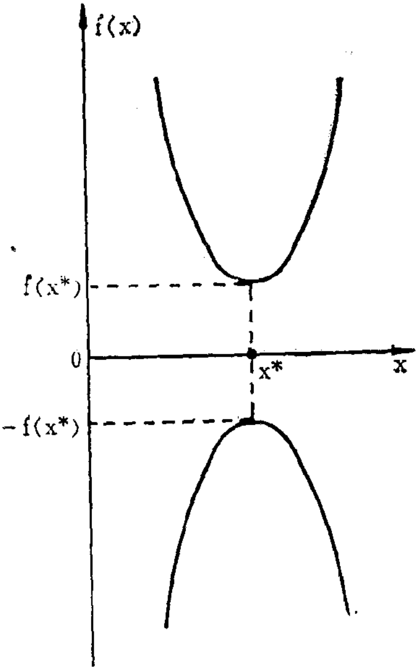
$$P = \frac{U_1^2}{R_1} + \frac{U_2^2}{R_2} + \cdots + \frac{U_n^2}{R_n} \qquad (1—2)$$

R_1，R_2，…，R_n 为待定的电路参数，(1—2)式表示非线性多变量方程，即功率 P 是 R_1，R_2，…R_n 这 n 个变量的非线性函数。

这个问题的数学模型应为

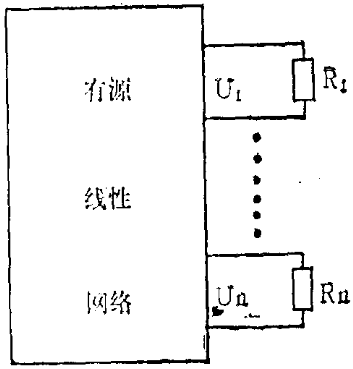
$$\left.\begin{array}{ll}\max\limits_{R_i}\quad P = f(R_1,\ R_2,\ \cdots,\ R_n) & \\ \text{约束}\quad R_i > 0 & i=1,\ 2,\ \cdots,\ n\end{array}\right\}\ (1—3)$$

[注]　约束条件也可以是 $g_i(X)\geqslant 0$，由问题性质决定。



$\min f(X) = -\max[-f(X)]$

图 1—1



有源线性网络多路输出

图 1—2

[例 2] 异步电动机的优化设计

异步电动机优化设计问题中，可以选作设计变量的参数有：

定子内径 D_i，铁心长 l，每槽导线数 Z，定子齿磁密 B_{ts}，轭磁密 B_{yS}，转子齿磁密 B_{tR}，转子导电条电流密度 J_Z，气隙磁密 B_g 等等。

变量数的多少与设计的要求有关，多的可达十多个。一般建议取 6—7 个。因为变量数取得越多，计算工作量急剧上升。

约束条件主要是设计出来的电机应满足国家标准规定的七项主要指标，它们是：

效率 η_0，功率因数 $\cos\varphi_0$，起动电流 I_{s0}，起动转矩 T_{s0}，最大转矩 T_{m0}，定子绕组温升 θ_{10}，转子温升 θ_{20}。

因此，以上述变量表示的各约束函数，使之满足这些指标，就可列出电机优化设计的约束条件：

$$g_1(X)=\eta(X)-\eta_0\geqslant 0$$

$$g_2(X)=\cos\varphi(X)-\cos\varphi_0\geqslant 0$$

$$g_3(X)=I_{s0}-I_s(X)\geqslant 0$$

$$g_4(X)=T_s(X)-T_{s0}\geqslant 0$$

$$g_5(X)=T_m(X)-T_{m0}\geqslant 0$$

$$g_6(X)=\theta_{10}-\theta_1(X)\geqslant 0$$

$$g_7(X)=\theta_{20}-\theta_2(X)\geqslant 0$$

$$g_i(X)=g_i(D_i,\ l,\ Z,\ B_{ts}\cdots)$$

$$i=1,\ 2,\ \cdots,\ 7$$

电机优化设计的目标函数可以是：

1. 有效材料费用函数（有效材料指铁心材料、绕组材料，有时还加上结构材料）。

2. 制造和运行的总费用函数。

3. 单位有效材料费用产生的电磁转矩。

例如有的企业建议用下述目标，即每 400 元的有效材料费所产生的电磁转矩，它反应了要尽量节约有效材料、力争较高经济指标的想法。[注]

有效材料费

$$C(X)=14G_{cu}(X)+1.4G_{Fe}(X)$$

14 及 1.4 元分别表示绕组导线及硅钢片每公斤价格。

〔注〕 参见中小型电机技术情报，1980，No.1，P53～58 电机电磁方案的优化技术

则目标函数为

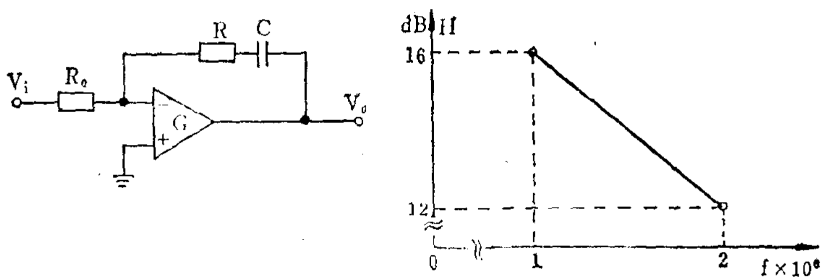
$$f(X)=\frac{400T}{C(X)}$$

T 为电磁转矩。

[例 3] 运算放大器的最优设计

如果我们要设计一个如图 1—3a 所示的运算放大器，有 RC 负反馈，这是一个补偿网络。给定的频率响应为（如图 1—3b）

$$H(\omega)=20-\frac{4}{2\pi}\frac{\omega}{10^6}$$



(a)电路图　　　　(b)频率响应特性

图 1—3　运算放大器

定义　$H(\omega)=20\log\left|\frac{V_o}{V_i}\right|$

V_o 为输出电压，V_i 为输入电压。网络最优设计的任务就是要选择参数 R 和 C，使给定网络的响应 $H(\omega)$ 与实际响应之间的误差为最小。

为了列出目标函数，我们应当先列出实际响应的频率特性 H_1（ω，R，C）表达式。

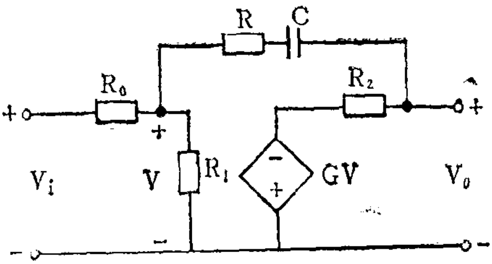
从电路理论角度讲，运算放大器是一个电压控制的电压源（受控源或非独立电源），其等值电路如图 1—4，其中 R_1 为固体组

件（集成电路）的输入电阻，R_2 为输出电阻，G 为电压增益。R_0 为外接的入端电阻。

设本例中 $G=100$，$R_1=10^K$，$R_2=100\Omega$，$R_0=1^K$。又设 R、C 的范围为

$50\Omega \leqslant R \leqslant 10^4\Omega$，

$10pf \leqslant C \leqslant 1000pf$。



运算放大器等值电路

图 1—4

则由上述等值电路可推导出响应 $H_1(\omega, R, C)$，再经过简化可得[注]

$$H_1(\omega, R, C,) \cong 10\log\frac{1}{10^6}\left[R^2+\frac{1}{\omega^2C^2}\right]$$

根据最小二乘误差准则，可得目标函数为

$$f(\omega, R, C)=\sum_{k=1}^{m}W(\omega_k)\left[H(\omega_k)-H_1(\omega_k, R, C)\right]^2$$

加权系数 W 为非负实数，加权以后可以使着重加权的某些频率下的误差比其它频率的误差更小。

一般希望在变量数为 2 时取 10 个采样点，即 $m=10$。因此本例的数学模型为

$$\min f(\omega, R, C)$$

$$50 \leqslant R \leqslant 10^4\Omega,\ 10 \leqslant C \leqslant 1000pf$$

§ 1-3　最优化问题的分类

最优化问题可以按下述情况分类：

一、有没有约束？有约束的话是等式约束还是不等式约束？

[注]　参见 G.C.Temes, J.W.Lapatra Introduction to circuit synthesis and design 1977.

二、是确定性的还是随机性的最优问题？

三、目标函数是线性的还是非线性的？约束式是线性的还是非线性的？

四、是静态最优还是动态最优问题，即变量是不是时间的函数？

五、问题的模型用数学解析公式表示还是用网络图表示，在网络图上寻优称为网络最优化。

下面我们分别讨论不同类型最优化问题的性质及特点。

一、无约束与有约束最优问题。

求无约束极值时，问题的最优解就是目标函数的极值。有约束时，问题是求有约束极值（或称条件极值），如果是等式约束，则约束的数目m必须小于变量的数目n（即问题的维数）。当$m=n$时，问题的解是唯一的（即约束方程的交点），显然它不一定为最优。这种情况下，因为约束过多，没有选择最优点的余地，称为没有自由度，自由度的数目等于$n-m$。显然如果$m>n$，则要求同时满足这m个约束是不可能的，这种情况下的最优化问题无解。

等式约束上各点称为可行解，因此等式约束曲线表示可行解域。约束也可以是不等式约束，满足不等式约束的区域范围称为解的可行域。在这个区域内的解都是可行的，称为可行解，可行解的数目有无限多个，其中必有一个是最优解。

[例] $\min f(x)=(x-a)^2+b$[注]

1）无约束

2）等式约束 $x=c$

3）不等式约束 $x\geqslant c$ 设 $c<a$

解：这是单变量寻优问题。其解如图 1—5 所示。

[注] min 为 minimize 的缩写，$\min f(x)$表示求 $f(x)$的极小值，与之类似的有 $\max f(x)$表示求 $f(x)$极大值，max 为 maximize 的缩写。