高等学校辅导教材

新编
高等数学题解

XINBIAN GAODENG SHUXUE TIJIE （上 册）

同济高等数学（三版）习题选解

是非题题解 · 综合题题解

王东生　周泰文　刘后邦　俞 政　编

华中理工大学出版社

内容简介

本书是学习工科“高等数学”、准备“高等数学”考试以及“高等数学”教学的参考书，本书题解详细，很多题给出了多种解法，并附有思路分析等内容，能起到深入学习“高等数学”的辅导作用.

本书分上、下册出版.上册内容为函数与极限、导数与微分、中值定理与导数的应用、不定积分、定积分及其应用、空间解析几何与向量代数.书末还附有各类试题选及其解答.

每章内容由四部分组成:①内容提要;②习题选解;③是非题题解;④综合题题解

前　　言

“高等数学”是工科院校的一门重点基础课，近年来被许多部委和省市列为教学的重点评估课程之一. 在全国硕士学位研究生考试中被指定为全国统考科目. 每年有一大批新同学升入高等院校本科、专科、电大、职大、函大、夜大学习高等数学，他们渴望有一本切合实际的参考书；每年还有一批同志准备硕士学位研究生考试，他们渴望有一本针对性强的复习资料. 本书编者根据多年来从事“高等数学”教学的经验，力图靠近这一目标.

本书分上、下册，每章由四部分组成：

第一部分是“内容提要”. 书应该越读越薄，每一章中真正应该牢记并成为解题武器的内容其实并不多，这一部分就是为这方面准备的，特别对那些曾经学过高等数学，而又急于检起这门课的同志，无疑将起到立杆见影的效果；

第二部分是“习题选解”. 高等数学学习效果的一个重要标志是会不会做题. 我们采用同济大学主编的“高等数学”第三版，对其中大部分习题（包括所有较难解和带 * 号的题）给出了解答. 值得强调的是，我们采用该书的习题，是因为该书是我国高等学校使用量最大的一本数学教材；它在全国优秀教材评选中荣获国家教委一等奖；并被许多院校指定为研究生考试的复习教材. 该书的习题难易适度，联系实际，比较准确地反映了学习高等数学应达到的水平. 我们从多年习题课教学的经验出发，在许多习题的解答前后加了“思路分析”、“注意”，并且给出了多种解法. 我们希望读者重视这些方面. 在使用这部分时，初学者应该先独立思考，自已解答，然后与题解对照，做到理解原理、明确步骤、掌握方法和技巧. 只有这样，才能有效地提高自己的解题能力. 如果只是抄袭而不求理解，那就使我们大大地失望了；

第三部分是“是非题题解”. 在这一部分里，我们汇集了一些重要的正误判断题，弄清这些问题，学习就深入了一步；

第四部分是“综合题题解”. 培养学生解综合题的能力，是教学中的一个难点，针对这一点，我们编写了这一部分.

为了便于查找各章、各部分的题解，对题号的意义规定如下：

“习题”题号由表示章序、习题序、题序(小题序)的三个或四个数码构成，例如，4. 4. 1 (2)是指同济“高等数学”(第三版)第四章习题 4－4 中第 1 题的第(2)小题，题解中所指教材，也都是指同济“高等数学”(第三版)；

“是非题”题号由表示章序、题序的两个数码构成，加圆括号. 例如(4－6)是指本书中第四章是非题部分的第 6 题；

“综合题”题号由表示章序、题序的两个数码构成，加方括号. 例如[5－14]是指本书中第五章综合题部分的第 14 题.

由于水平有限，时间仓促，不足之处一定难免，恳请广大读者指正.

编　者　　1994 年 5 月

目　录

第一章　函数与极限 …… (1)

内容提要 …… (1)

习题选解 …… (6)

习题 1—1 (6)　习题 1—2 (13)　习题 1—3 (16)

习题 1—4 (19)　习题 1—5 (22)　习题 1—6 (26)

习题 1—7 (29)　习题 1—8 (31)　习题 1—9 (34)

习题 1—10 (37)　习题 1—11 (39)

是非题题解 …… (41)

综合题题解 …… (50)

第二章　导数与微分 …… (65)

内容提要 …… (65)

习题选解 …… (67)

习题 2—1 (67)　习题 2—2 (72)　习题 2—3 (74)

习题 2—4 (78)　习题 2—5 (79)　习题 2—6 (83)

习题 2—7 (92)　习题 2—8 (94)

是非题题解 …… (100)

综合题题解 …… (104)

第三章　中值定理与导数的应用 …… (123)

内容提要 …… (123)

习题选解 …… (126)

习题 3—1 (126)　习题 3—2 (132)　习题 3—3 (137)

习题 3—4 (143)　习题 3—5 (151)　习题 3—6 (156)

习题 3—7 (163)　习题 3—8(171)　习题 3—9 (180)

习题 3—10 (185)

是非题题解 …… (188)

综合题题解 …… (196)

第四章　不定积分 …… (220)

内容提要 …… (220)

习题选解 …… (221)

习题 4—1 (221)　习题 4—2 (225)　习题 4—3 (233)

习题 4—4（238） 习题 4—5（263）
是非题题解 …………（264）
综合题题解 …………（267）
第五章 定积分 …………（282）
内容提要 …………（282）
习题选解 …………（285）
习题 5—1（285） 习题 5—2（289） 习题 5—3（292）
习题 5—4（299） 习题 5—5（307） 习题 5—6（310）
习题 5—7（312）
是非题题解 …………（318）
综合题题解 …………（324）
第六章 定积分的应用 …………（351）
内容提要 …………（351）
习题选解 …………（354）
习题 6—1（） 习题 6—2（354） 习题 6—3（362）
习题 6—4（369） 习题 6—5（376） 习题 6—6（384）
综合题题解 …………（386）
第七章 空间解析几何与向量代数 …………（396）
内容提要 …………（396）
习题选解 …………（400）
习题 7—1（400） 习题 7—2（403） 习题 7—3（404）
习题 7—4（405） 习题 7—5（410） 习题 7—6（412）
习题 7—7（416） 习题 7—8（420） 习题 7—9（430）
是非题题解 …………（436）
综合题题解 …………（440）
各类试题选（附解答）…………（453）
考试题选（一）（453） 考试题选（二）（457） 考试题选（三）（464）
考试题选（四）（468） 考试题选（五）（473）
附录 极限的复习 …………（477）

第一章　函数与极限

一　内容提要

1　函数

(1)　函数的概念

设 x 和 y 是两个变量，D 是一个给定的数集. 如果对于每一个数 $x\in D$，变量 y 按照一定法则总有确定的数值和它对应，则称 y 是 x 的函数，记作 $y=f(x)$. 数集 D 叫做这个函数的定义域，x 叫做自变量，y 叫做因变量.

如果自变量在定义域内任取一个数值时，对应的函数值仅有(不只)一个，则这种函数叫做单(多)值函数. 以后凡未特别说明时，函数都是指单值函数.

(2)　反函数

设函数 $y=f(x)$ 的定义域、值域分别为 D 与 W，若对于变量 y 在 W 中的每一个值，变量 x 在 D 中都有满足 $f(x)=y$ 的确定的值和它对应，则 x 是 y 的函数，记为 $x=\varphi(y)$ 或 $x=f^{-1}(y)$，并称 $x=\varphi(y)$ 或 $x=f^{-1}(y)$ 是 $y=f(x)$ 的反函数. 按习惯，自变量、因变量分别用 x、y 表示，所以 $y=\varphi(x)$ 或 $y=f^{-1}(x)$ 是 $y=f(x)$ 的反函数.

(3)　几种特殊的函数

有界函数　设函数 $f(x)$ 在数集 X 上有定义，若存在正数 M，当 $x\in X$ 时，恒有 $|f(x)|\leqslant M$，则称 $f(x)$ 是 X 上的有界函数；若这样的 M 不存在，则称 $f(x)$ 在 X 上无界.

单调函数　设函数 $f(x)$ 在 (a,b) 上有定义，若对于任意的 x_1、

$x_2\in(a,b)$，且 $x_1<x_2$，恒有 $f(x_1)<f(x_2)$（$f(x_1)>f(x_2)$），则称 $f(x)$在(a,b)上是单调增（减）函数.

奇偶函数　设函数 $f(x)$的定义域为$(-a,a)$，若对于任意的 $x\in(-a,a)$，恒有 $f(-x)=f(x)$（$f(-x)=-f(x)$），则称 $f(x)$为偶（奇）函数.

周期函数　设函数 $f(x)$的定义域为 D，若存在一个不为零的 l，对于任意的 $x\in D$，且 $x\pm l\in D$，恒有 $f(x\pm l)=f(x)$，则称$f(x)$为以 l 为周期的周期函数.

（4）　初等函数

1°　基本初等函数是幂函数、指数函数、对数函数、三角函数、反三角函数的统称.

2°　复合函数　设 $y=f(u)$的定义域是 D，$u=\varphi(x)$的定义域是 X，值域是 U，若 $U\subseteq D$，则称 $y=f[\varphi(x)]$是由 f 与 φ 复合而成的复合函数.

3°　初等函数　由常数和基本初等函数经过有限次四则运算和有限次函数的复合步骤所构成并可用一个式子表示的函数称为初等函数.

2　极限

（1）　数列的极限

$$\lim_{n\to\infty}u_n = A\Leftrightarrow\begin{bmatrix}\forall\ \varepsilon>0,\exists\ \text{自然数 } N\\ \text{只要 } n>N,\text{就有 } |u_n-A|<\varepsilon\end{bmatrix}.$$

（2）　函数的极限

$$\lim_{x\to\infty}f(x) = A\Leftrightarrow\begin{bmatrix}\forall\ \varepsilon>0,\exists\ X>0\\ \text{只要 } |x|>X,\text{就有 } |f(x)-A|<\varepsilon\end{bmatrix}.$$

$$\lim_{x\to x_0}f(x) = A\Leftrightarrow\begin{bmatrix}\forall\ \varepsilon>0,\exists\ \delta>0\\ \text{只要 } 0<|x-x_0|<\delta,\text{就有 } |f(x)-A|<\varepsilon\end{bmatrix}.$$

左极限

$$f(x_0-0)\triangleq\lim_{x\to x_0-0}f(x)=A$$

$$\Leftrightarrow\begin{bmatrix}\forall\ \varepsilon>0,\exists\ \delta>0\\ \text{只要 } 0<x_0-x<\delta,\text{就有 } |f(x)-A|<\varepsilon\end{bmatrix}.$$

右极限

$$f(x_0+0)\triangleq\lim_{x\to x_0+0}f(x)=A$$

$$\Leftrightarrow\begin{bmatrix}\forall\ \varepsilon>0,\exists\ \delta>0\\ \text{只要 } 0<x-x_0<\delta,\text{就有 } |f(x)-A|<\varepsilon\end{bmatrix}.$$

(3) 无穷小与无穷大

1° $\alpha(x)$为某过程中的无穷小$\Leftrightarrow\lim\alpha(x)=0$;

$\lim$(有界变量·无穷小)$=0$;

2° $f(x)$为某过程中的无穷大$\Leftrightarrow\lim f(x)=\infty(+\infty,-\infty)$;

如 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=-\infty\Leftrightarrow\begin{bmatrix}\forall\ M>0,\exists\ \delta>0\\ \text{只要 } 0<|x-x_0|<\delta,\text{就有 } f(x)<-M\end{bmatrix}$;

$\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=\infty\Leftrightarrow\begin{bmatrix}\forall\ M>0,\exists\ X>0\\ \text{只要 } x>X,\text{就有 } |f(x)|>M\end{bmatrix}$.

在同一过程中,除 0 外的无穷小与无穷大互倒.

3° 无穷小的比较　设$\lim\alpha=0,\lim\beta=o$(此处,α 与 β 分别为 $\alpha(x)$、$\beta(x)$的简写).

若 $\lim\dfrac{\beta}{\alpha}=0$,则称 β 是比 α 高阶的无穷小,记作 $\beta=o(\alpha)$;

若 $\lim\dfrac{\beta}{\alpha}=\infty$,则称 β 是比 α 低阶的无穷小;

若 $\lim\dfrac{\beta}{\alpha}=c\neq0$,则称 β 与 α 是同阶无穷小. 特别地,当 $c=1$ 时,称 β 与 α 是等阶无穷小,记作 $\beta\sim\alpha$;

若 $\lim\dfrac{\beta}{\alpha^k}=c\neq0(k>0)$,则称 β 为 α 的 k 阶无穷小;

4° 常用的等阶无穷小　当 $x\to0$ 时,$\sin x\sim x$;$\mathrm{tg}x\sim x$;$1-\cos x\sim\dfrac{x^2}{2}$;$\ln(1+x)\sim x$;$e^x-1\sim x$;$\sqrt[n]{1+x}-1\sim\dfrac{x}{n}$.

若 $\beta-\alpha=o(\beta)$,则称 α 是 β 的主部.

两个无穷小互为主部的充要条件是它们等价.

(4) 性质

唯一性　变量若有极限，则极限唯一；

有界性　有极限的变量必有界；

保号性

1° 某时刻后 $f(x)\geqslant 0$（或$\leqslant 0$）$\Rightarrow \lim f(x)\geqslant 0$（或$\leqslant 0$）；

2° $\lim f(x)>0$（或<0）$\Rightarrow$某时刻以后 $f(x)>0$（或<0）；

3° 某时刻以后 $\varphi(x)\geqslant\psi(x)\Rightarrow \lim\varphi(x)\geqslant\lim\psi(x)$.

充要条件

1° $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A \Leftrightarrow f(x_0-0)=f(x_0+0)=A$；

2° $\lim f(x)=A\Leftrightarrow f(x)=A+\alpha$（此处 $\lim\alpha=0$）.

运算法则　有限个有极限的变量之和（积）的极限等于各自极限之和（积）；

两个有极限的变量之差（商）的极限等于各自极限之差（商，但分母的极限为 0 时除外）；

求两个无穷小之比的极限时，分子、分母的因子可用其等价无穷小来代替.

两个准则　单调有界的变量必有极限的准则；夹逼准则.

两个重要极限　若 α 为某个过程中的无穷小，则

1° $\lim\limits_{\text{某过程}}\dfrac{\sin\alpha}{\alpha}=1$；　2° $\lim\limits_{\text{某过程}}(1+\alpha)^{\frac{1}{\alpha}}=e$.

3 连续

$$(1)\quad f(x)\text{在点 } x_0 \text{ 处连续}\Leftrightarrow\begin{cases}\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=f(x_0).\\ \lim\limits_{\Delta x\to 0}\Delta y=0.\\ \begin{bmatrix}\forall\ \varepsilon>0,\exists\ \delta>0,\text{只要}\\ |x-x_0|<\delta,\\ \text{就有}|f(x)-f(x_0)|<\varepsilon\end{bmatrix}.\end{cases}$$

$$f(x)\text{在点 } x_0 \text{ 处}\frac{\text{左}}{\text{右}}\text{连续}\Leftrightarrow\frac{f(x_0-0)}{f(x_0+0)}=f(x_0).$$

$f(x)$在区间 I 上一致连续

$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\forall\ \varepsilon>0,\exists\ \delta>0,\text{对于}\forall\ x_1、x_2\in I,\\ \text{只要}|x_1-x_2|<\delta,\text{就有}|f(x_1)-f(x_2)|<\varepsilon\end{array}\right]$$

(2) 设 $f(x)$ 在 x_0 的某去心邻域内有意义，则 $f(x)$ 在点 x_0 处间断 $\Leftrightarrow f(x)$ 在点 x_0 处不连续

若 x_0 为 $f(x)$ 的间断点：

1° x_0 为第一类间断点 $\Leftrightarrow f(x_0-0)$ 与 $f(x_0+0)$ 均存在.

当 $f(x_0-0)=f(x_0+0)$ 时，x_0 为可去间断点；

当 $f(x_0-0)\neq f(x_0+0)$ 时，x_0 为跳跃间断点.

2° x_0 为第二类间断点 $\Leftrightarrow f(x_0-0)$ 与 $f(x_0+0)$ 中至少有一个不存在. 无穷间断点和振荡间断点均为第二类间断点.

如果在 x_0 的任何邻域内 $f(x)$ 均无界，则称 x_0 为 $f(x)$ 的无界间断点或瑕点.

(3) 连续与极限的关系 $f(x)$ 在点 x_0 处连续，则 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$ 存在，但其逆不真.

(4) 性质

1° 运算性质.

有限个在某点连续的函数之代数和(或积)，仍在该点连续；

两个在某点连续的函数之商(分母在该点为零的除外)，仍在该点连续.

2° 反函数、复合函数、初等函数的连续性

若 $f(x)$ 在区间 I_x 上单值、单调增加(或减少)且连续，则它的反函数 $x=f^{-1}(y)$ 也在对应的区间 $I_y=\{y\mid y=f(x),x\in I_x\}$ 上单值、单调增加(或减少)且连续；

设函数 $u=\varphi(x)$ 在点 x_0 处连续，且 $\varphi(x_0)=u_0$，而函数 $y=f(u)$ 在点 $u=u_0$ 处连续，那末复合函数 $y=f[\varphi(x)]$ 在点 $x=x_0$ 处也连续；初等函数在其定义区间内连续.

3° 闭区间上连续函数的性质

最值定理 在闭区间上连续的函数在该区间上一定有最大值和最小值；

有界定理 在闭区间上连续的函数在该区间上一定有界；

介值定理 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，且 $f(a)\neq f(b)$，则对于 $f(a)$ 与 $f(b)$ 之间的任意一个数 c，必有 $\xi\in(a,b)$，使得 $f(\xi)=c$.

特别的，当 $f(a)$ 与 $f(b)$ 异号时，有

零点定理 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，且有 $f(a)\cdot f(b)<0$，则必有 $\xi\in(a,b)$，使得 $f(\xi)=0$.

二　习题选解

习题 1-1

1.1.2　求函数 $y=\begin{cases}\sin\dfrac{1}{x}, & x\neq 0\\ 0, & x=0\end{cases}$ 的定义域和值域.

思路分析 分段函数是一个函数，分段函数的定义域是各段自变量允许值集合之并，分段函数的值域是各段函数值集合之并.

解 定义域：$(-\infty,+\infty)$　值域：$[-1,1]$.

1.1.3　下列各题中，函数 $f(x)$ 和 $g(x)$ 是否相同？为什么？

(1)　$f(x)=\lg x^2$，　$g(x)=2\lg x$；

(2)　$f(x)=x$，　$g(x)=\sqrt{x^2}$；

(3)　$f(x)=\sqrt[3]{x^4-x^3}$，　$g(x)=x\sqrt[3]{x-1}$.

思路分析 如果两个函数具有：①定义域相同，②对应规则相同，则这两个函数相同，否则它们就不相同.

解 (1) $f(x)=\lg x^2$ 与 $g(x)=2\lg x$ 不是相同函数，因为定义域不同.

(2)　$f(x)=x$，$g(x)=\sqrt{x^2}$ 不是相同函数，因为对应规则不同.

(3)　$f(x)=\sqrt[3]{x^4-x^3}$，$g(x)=x\sqrt[3]{x-1}$ 是相同函数，因为它

们的定义域和对应规则都相同.

1.1.4　求下列函数的定义域:

(5)　$y=\frac{1}{1-x^2}+\sqrt{x+2}$;　(6) $y=\frac{1}{x}-\sqrt{1-x^2}$.

思路分析　求函数的定义域,就是求使算式有意义时自变量可取的一切实数,所以,往往是先列出不等式组,再解不等式组.

解　(5)　$y=\frac{1}{1-x^2}+\sqrt{x+2}$,使$\frac{1}{1-x^2}$有意义的自变量的值是 $1-x^2\neq0$,因为 $1-x^2=0$,$x=\pm1$,所以 $x\neq\pm1$.

使 $\sqrt{x+2}$ 有意义的自变量的值是 $x+2\geqslant0$,即 $x\geqslant-2$.

因此所求函数的定义域是$[-2,-1)\cup(-1,1)\cup(1,+\infty)$.

(6)　$y=\frac{1}{x}-\sqrt{1-x^2}$,要求$\begin{cases}x\neq0,\\1-x^2\geqslant0,\end{cases}$即$\begin{cases}x\neq0,\\-1\leqslant x\leqslant1.\end{cases}$

所以定义域 $D=[-1,0)\cup(0,1]$或$\{x\mid-1\leqslant x\leqslant1,x\neq0\}$.

1.1.8　设

$$\varphi(x)=\begin{cases}|\sin x|, & |x|<\frac{\pi}{3};\\ 0, & |x|\geqslant\frac{\pi}{3},\end{cases}$$

求 $\varphi\left(\frac{\pi}{6}\right)$,$\varphi\left(\frac{\pi}{4}\right)$,$\varphi\left(-\frac{\pi}{4}\right)$,$\varphi(-2)$,并作出函数 $y=\varphi(x)$的图形.

解　$\varphi\left(\frac{\pi}{6}\right)=\left|\sin\frac{\pi}{6}\right|=\frac{1}{2}$,$\varphi\left(\frac{\pi}{4}\right)=\left|\sin\frac{\pi}{4}\right|=\frac{\sqrt{2}}{2}$,

$$\varphi\left(-\frac{\pi}{4}\right)=\left|\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right|=\frac{\sqrt{2}}{2},\varphi(-2)=0$$

$y=\varphi(x)$的图形如图 1-1.

1.1.9　下列函数中哪些是偶函数,哪些是奇函数,哪些既非奇函数又非偶函数?

(3)　$y=\frac{1-x^2}{1+x^2}$;　(4)　$y=x(x-1)(x+1)$;

(5)　$y=\sin x-\cos x+1$;　(6)　$y=\frac{a^x+a^{-x}}{2}$.

思路分析　判断函数奇偶性的方法一:根据定义,若 $f(-x)$

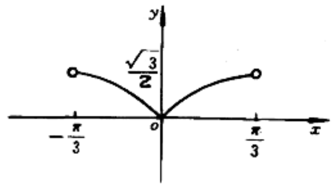

图 1-1

$=-f(x)$，则称 $y=f(x)$为奇函数；若 $f(-x)=f(x)$，则称 $y=f(x)$为偶函数；方法二：根据图形，若 $y=f(x)$的图形关于原点对称，则称 $y=f(x)$为奇函数，若 $y=f(x)$的图形关于 y 轴对称，则称 $y=f(x)$为偶函数，无论是奇函数还是偶函数，它们的定义域都是关于原点对称的区间．此外一般有：奇＋奇＝奇；偶＋偶＝偶；奇×奇＝偶，偶×偶＝偶；奇×偶＝奇；但奇＋偶则为非奇非偶．

解　(3)　因为 $f(-x)=\dfrac{1-(-x)^2}{1+(-x)^2}=\dfrac{1-x^2}{1+x^2}=f(x)$．所以此函数是偶函数．

(4)　因为
$$\begin{aligned} f(-x)&=-x(-x-1)(-x+1)\\ &=-x(x+1)(x-1)=-f(x), \end{aligned}$$
所以此函数是奇函数．

(5)　因为
$$\begin{aligned} f(-x)&=\sin(-x)-\cos(-x)+1\\ &=-\sin x-\cos x+1\neq\pm f(x), \end{aligned}$$
所以此函数是非奇非偶函数．

1.1.11　设下面所考虑的函数都是定义在对称区间$(-l,l)$上的，证明：

(1)　两个偶函数的和是偶函数，两个奇函数的和是奇函数；

(2)　两个偶函数的乘积是偶函数，两个奇函数的乘积是偶函数，偶函数与奇函数的乘积是奇函数；

(3)　定义在对称区间$(-l,l)$上的任意函数可表示为一个奇函数与一个偶函数的和．

证 (1) 设 $f_1(x), f_2(x)$ 均为偶函数，令 $F(x)=f_1(x)+f_2(x)$，因 $F(-x)=f_1(-x)+f_2(-x)=f_1(x)+f_2(x)=F(x)$，故 $F(x)$ 为偶函数.

设 $g_1(x), g_2(x)$ 均为奇函数，令 $G(x)=g_1(x)+g_2(x)$，

因
$$\begin{aligned} G(-x) &= g_1(-x)+g_2(-x) \\ &= -g_1(x)-g_2(x) = -G(x), \end{aligned}$$

故 $G(x)$ 为奇函数.

(2) 设 $f_1(x), f_2(x)$ 均为偶函数，令

$$F(x) = f_1(x) \cdot f_2(x),$$

因 $F(-x) = f_1(-x) \cdot f_2(-x) = f_1(x) \cdot f_2(x) = F(x)$，

故 $F(x)$ 为偶函数.

设 $g_1(x), g_2(x)$ 均为奇函数，令

$$G(x) = g_1(x) \cdot g_2(x),$$

因
$$\begin{aligned} G(-x) &= g_1(-x)g_2(-x) = [-g_1(x)] \cdot [-g_2(x)] \\ &= g_1(x) \cdot g_2(x) = G(x), \end{aligned}$$

故 $G(x)$ 为偶函数.

设 $f(x)$ 为偶函数，$g(x)$ 为奇函数，令

$$H(x) = f(x) \cdot g(x),$$

因
$$\begin{aligned} H(-x) &= f(-x) \cdot g(-x) = f(x) \cdot [-g(x)] \\ &= -f(x) \cdot g(x) = -H(x), \end{aligned}$$

故 $H(x)$ 为奇函数.

(3) 设 $f(x)$ 为定义在 $(-l,l)$ 上的任意一个函数.

令 $\varphi(x)=\frac{1}{2}[f(x)+f(-x)]$，

因为
$$\begin{aligned} \varphi(-x) &= \frac{1}{2}\{f(-x)+f[-(-x)]\} \\ &= \frac{1}{2}[f(-x)+f(x)] = \varphi(x), \end{aligned}$$

故 $\varphi(x)$ 为偶函数.

令 $\psi(x)=\frac{1}{2}[f(x)-f(-x)]$，因为

$$\psi(-x)=\frac{1}{2}\{f(-x)-f[-(-x)]\}=\frac{1}{2}[f(-x)-f(x)]$$

$$=-\frac{1}{2}[f(x)-f(-x)]=-\psi(x),$$

故 $\psi(x)$ 为奇函数.

而 $$f(x)=\frac{1}{2}[f(x)+f(-x)]+\frac{1}{2}[f(x)-f(-x)]$$

$$=\varphi(x)+\psi(x),$$

故 $f(x)$ 可以表示为一个偶函数和一个奇函数的和.

1.1.12 试证下列函数在指定区间内的单调性：

(2) $y=\lg x,(0,+\infty)$； (3) $y=\sin x,\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$.

思路分析 欲证明 $f(x)$ 在 (a,b) 内的单调性，只要证明对任意的 $x_1,x_2\in(a,b)$，且 $x_1<x_2$，如果恒有 $f(x_2)-f(x_1)>0$，则 $f(x)$ 在 (a,b) 内单调增加；如果恒有 $f(x_2)-f(x_1)<0$，则 $f(x)$ 在 (a,b) 内单调减少.

证 (2) 设 $x_1,x_2\in(0,+\infty)$，且 $x_1<x_2$，因 $f(x_2)-f(x_1)=\lg x_2-\lg x_1=\lg\frac{x_2}{x_1}$. 而 $\frac{x_2}{x_1}>1$，$\lg\frac{x_2}{x_1}>0$，所以 $f(x_2)-f(x_1)>0$，即 $y=\lg x$ 在 $(0,+\infty)$ 内单调增加.

(3) 设 $x_1,x_2\in\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$，且 $x_1<x_2$，因为

$$f(x_2)-f(x_1)=\sin x_2-\sin x_1=2\cos\frac{x_2+x_1}{2}\sin\frac{x_2-x_1}{2},$$

而 $$-\frac{\pi}{2}<\frac{x_2+x_1}{2}<\frac{\pi}{2},\quad \cos\frac{x_2+x_1}{2}>0,$$

又 $$0<\frac{x_2-x_1}{2}<\frac{\pi}{2},\qquad \sin\frac{x_2-x_1}{2}>0,$$

所以 $f(x_2)-f(x_1)>0$，即 $y=\sin x$ 在 $\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$ 内单调增加.

1.1.13 设 $f(x)$ 为定义在 $(-l,l)$ 内的奇函数，若 $f(x)$ 在 $(0,$

l)内单调增加，证明 $f(x)$ 在 $(-l,0)$ 内也单调增加.

思路分析 根据奇函数关于原点中心对称的性质，从图形上易见结论的正确性，问题在如何进行论证？欲证明 $f(x)$ 在 $(-l,0)$ 内单调增加，根据函数单增的意义，可先在 $(-l,0)$ 内任取 $x_1<x_2$，再证明 $f(x_1)<f(x_2)$.

证 设 $x_1,x_2\in(-l,0)$，且 $x_1<x_2$（注意 x_1、x_2 均为负数），则 $-x_1,-x_2\in(0,l)$，且 $-x_2<-x_1$（如图 1-2），$-x_1,-x_2$ 均为正数）. 已知 $f(x)$ 在 $(0,l)$ 内单调增加，则 $f(-x_2)<f(-x_1)$. 因为 $f(x)$ 在 $(-l,l)$ 内是奇函数，所以 $f(-x_2)=-f(x_2)$，$f(-x_1)=-f(x_1)$，即 $-f(x_2)<-f(x_1)$，亦即 $f(x_1)<f(x_2)$. 这就证明了在 $(-l,0)$ 内任取 $x_1<x_2$，都有 $f(x_1)<f(x_2)$，因此 $f(x)$ 在 $(-l,0)$ 内也单调增加.

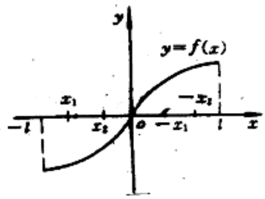

图 1-2

1.1.14 下列各函数中哪些是周期函数？对于周期函数，指出其周期：

(4) $y=x\cos x$； (5) $y=\sin^2 x$.

解 (4) $y=x\cos x$ 的定义域是 $(-\infty,+\infty)$. 假设 $y=x\cos x$ 有一个周期 $T>0$，则 $(x+T)\cos(x+T)=x\cos x$ 对任意的 $x\in(-\infty,+\infty)$ 都成立. 令 $x=0$，得 $T\cos T=0$，因为 $T>0$，所以 $\cos T=0$，从而 $T=n_0\pi+\dfrac{\pi}{2}$（n_0 是某一个确定的整数）. 于是有

$$\left(x+n_0\pi+\frac{\pi}{2}\right)\cos\left(x+n_0\pi+\frac{\pi}{2}\right)=x\cos x,$$

再令 $x=n_0\pi+\dfrac{\pi}{2}$，代入上式，又得

$$\left(n_0\pi+\frac{\pi}{2}+n_0\pi+\frac{\pi}{2}\right)\cos\left(n_0\pi+\frac{\pi}{2}+n_0\pi+\frac{\pi}{2}\right)$$