

数学建模 与 数学实验

主 编 贾 敬 桂占吉
蔡吉花
副主编 母丽华 刘海林
主 审 何文章



哈尔滨工程大学出版社

数学建模与数学实验

主 编 贾 敬 桂占吉

蔡吉花

副主编 母丽华 刘海林

主 审 何文章

江苏工业学院图书馆
藏书章

哈尔滨工程大学出版社

内 容 提 要

本书共分五章,主要包括微分方程模型、离散模型、数值分析模型、数学规划及数理统计模型。每章内容一般分为三部分:首先介绍模型实例,然后介绍建模所需的数学方法,最后介绍数学实验。每章均配有大量的数学建模实例,并配备了习题。

本书着重讲解数学建模的基本思想和方法,深入浅出、通俗易懂。以数学建模为主体,以计算机操作为手段,以数学软件为基础,把数学建模与数学实验紧密结合起来。该书可作为各类工科院校本专科数学改革教材,也可作为各行业工程技术人员的自学参考书。

数学建模与数学实验

SHU XUE JIAN MO YU SHU XUE SHI YAN

主 编 贾 敬 桂占吉

蔡吉花

副 主 编 母丽华 刘海林

主 审 何文章

责任编辑 张 奎

*

哈尔滨工程大学出版社出版发行

新 华 书 店 经 销

黑龙江矿业学院印刷厂印刷

*

开本 787×1092 1/16 印张 12.375 字数 271 千字

1998 年 7 月第 1 版 1998 年 7 月第 1 次印刷

印数:1~1000 册

ISBN 7-81007-882-8

O·62 定价:18.50 元

前 言

数学是工科大学生重要的基础理论课,它作为工程教育的一个重要内容,其目的在于培养工程技术人才所必备的基本素质。随着我国市场经济的不断发展,社会用人单位越来越感到我国的工科大学毕业生,理论联系实际的能力较低,反映在应用方面与发达国家的差距更大,针对这种情况,教育部曾委托全国工科数学课程指导委员会多次召开会议研究讨论工科数学教学改革问题,并于1995年5月下发了“关于工科数学系列课教学改革的建议”,按照这一建议的精神,结合当前国内外教学改革的发展趋势,我院制定了“工科数学教学内容与体系改革方案”。在近几年的教学改革试点中,我们开设了“数学建模与数学实验”课,根据教学中反馈出来的意见,我们又做了修改和补充,形成了现在这本教材。本教材作为这项改革的内容之一,其特色是突出数学建模的思想与方法,以数学建模内容为主体,以计算机操作为手段,以数学软件为基础,把数学建模与数学实验紧密结合起来。

本书由黑龙江矿业学院贾敬、桂占吉、蔡吉花任主编,黑龙江矿业学院母丽华、广东工业大学刘海林任副主编、佳木斯大学工学院鲁立刚也参加了本书的编写工作。

全书由黑龙江矿业学院何文章主审。

本书可作为工科院校本、专科数学改革教材,也可以作为参加数学建模竞赛培训的基础教材,还可供工程技术人员参考。

在本书的编写过程中得到了哈尔滨工程大学出版社及黑龙江矿业学院有关部门的大力支持和具体指导,得到了门艳春教授的关心和支持,在此表示衷心感谢。

由于编写时间仓促,水平有限,书中定有不当与错误之处,请各位同行与读者批评指正。

编 者

1998年7月

目 录

引 言 数学模型概述	1
一、科学技术的数学化	1
二、数学模型方法	2
三、数学模型的分类	3
第一章 微分方程模型	5
第一节 放射性元素衰变模型	5
一、马王堆一号墓年代	5
二、陨品的鉴定	6
第二节 恶性肿瘤增长模型	8
一、指数模型	8
二、Logistic 模型	8
三、Gompertz 模型	9
四、与时间有关的肿瘤生长模型	10
第三节 人体减肥模型	10
一、线性模型	10
二、非线性模型	12
第四节 新产品销售模型	13
一、新产品销售的 Logistic 模型	13
二、Bass 模型	13
三、Steffens—Murthy 模型	14
第五节 作战模型	16
一、三个 Lanchester 战斗模型	16
二、常规战斗模型	17
三、游击战模型	18
四、常规—游击战混合模型	19
五、硫黄岛战斗模型	20
第六节 种群生态学模型	22
一、单种群模型	22
二、简单的两种群相互作用的模型	24
三、数学实验	27

第七节	交通流模型	28
一、	交通流的连续性假设	28
二、	交通流的守恒方程	28
第八节	扩散模型	30
一、	一维扩散模型	30
二、	大气污染的扩散	31
习题一		32
第二章	离散数学模型	34
第一节	图的基本概念	35
一、	图、子图	35
二、	关联矩阵,邻接矩阵及顶点的度	38
三、	路,圈和连通	38
四、	有向图,赋权图	39
第二节	最小生成树及模型	40
一、	树的定义	40
二、	最小生成树	42
三、	通讯网络的最小生成树	43
第三节	最短路模型	45
	最短路问题	45
第四节	网络最大流模型	50
一、	基本概念与基本定理	50
二、	Ford 和 FulKerson 标号法	53
第五节	最小费用最大流模型	54
一、	问题的提出	54
二、	解法	54
第六节	匹配模型	58
	问题的提出及解决	58
第七节	中国邮路模型	62
一、	问题的提出	62
二、	几种邮路问题及解法	62
习题二		66
第三章	数值分析建模	69
第一节	拉格朗日插值及模型	69
一、	拉格朗日插值	69
二、	丙烷导热系数的估计	72

第二节	牛顿插值公式及模型	74
	一、牛顿插值公式	74
	二、等距结点的牛顿插值公式	76
	三、氨蒸汽的压力和密度	77
第三节	三次样条插值及模型	79
	一、三次样条插值	79
	二、动物上半身曲线的描绘	82
	三、用自然三次样条预测人口的数值实验	84
第四节	双线性插值及模型	86
	一、双线性插值	86
	二、三维空间雷达反射因子的一种求解方法	87
第五节	曲线拟合法及其模型	88
	一、最小二乘原理和多项式拟合	88
	二、线性最小二乘拟合	93
	三、非线性拟合	95
	四、交通事故调查	98
	五、估计水塔的水流量	102
	习题三	107
第四章	数学规划模型	109
第一节	线性规划模型	109
	一、生产计划安排	109
	二、混料问题的最优设定	110
	三、线性规划的一般性问题	111
	四、线性规划问题的图解法	113
	五、解线性规划的单纯形法	113
	六、线性规划的对偶问题及求解原理	120
第二节	非线性规划模型	120
	一、资源分配	120
	二、最佳定货量	121
	三、非线性规划的概念	121
	四、解无约束问题的最速下降法及实验	122
	五、解有约束问题的外罚函数法及实验	124
第三节	动态规划模型	127
	一、管道铺设线路的最优化问题	127
	二、动态规划问题的基本概念、原理和逆推方程	128
	三、资源分配模型	130

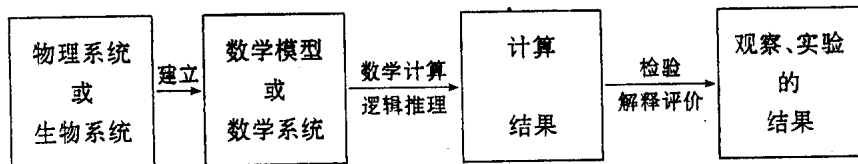
习题四	134
第五章 数理统计模型	138
第一节 随机决策模型	138
一、决策模型	138
二、风险型决策	140
三、完全不确定型决策	143
第二节 多元线性回归分析	146
一、多元线性回归的数学模型	147
二、参数的最小二乘估计	148
三、最小二乘法估计量的性质	149
四、多元线性回归方程的显著性检验	151
第三节 多项式回归模型及广义线性回归模型	156
一、多项式回归模型	156
二、广义线性回归模型	157
三、最优回归模型的选择	158
第四节 方差分析	166
一、单因素试验方差分析	167
二、无重复不考虑交互作用的双因素试验方差分析	171
三、有重复考虑交互作用的双因素试验方差分析	176
习题五	180
附录 1992~1997 年全国大学生数学模型竞赛题	184

引言 数学模型概述

一、科学技术的数学化

现实世界中任何一种物质系统及其运动都有其质的规定性,又有其量的规定性,是质与量的统一.由于数学所研究的量及其关系普遍存在于各种物质系统及其运动形式之中,因此一切科学技术原则上都可以用数学来解决相关的问题,其应用广度是空前的.而用数学方法解决实际问题,首先都要通过抽象与简化,用数学的语言和方法,建立一个近似描述这个问题的数学模型.数学模型是运用数学的语言和工具,对部分现实世界的信息(现象、数据、……)加以翻译、归纳的产物,它源于现实,又高于现实.科学的发展离不开数学,数学模型在其中又起着重要作用.科学就是通过对模型的研究来阐明真实世界的客观规律.

在近代,科学的数学化过程加快了,科学家越来越认识到数学在研究自然界中的重大作用,自牛顿开始,由于微积分的发明,力学的数学化便逐步臻于完善.物理学的数学化过程走得更为深远.当代最新的物理学许多重大成果都是数学工具的帮助下完成的.它们的理论表述也往往采取了数学的形式,例如爱因斯坦的相对论力学就专门运用了黎曼在 19 世纪中叶创立的黎曼几何.当代科学数学化的一个显著标志是数学向各门科学领域广泛渗透.科学的数学化首先是在力学、物理学、化学、天文学、地质学等基础学科中进行的.其次是生物科学的数学化.生物科学是研究生命现象及其过程的,在 19 世纪 80 年代中期,恩格斯根据当时的科学状况认为,数学在生物学中的应用等于零,到了 20 世纪,生物学向理论科学的转变过程中,使得它对数学的要求更迫切了,人们开始运用数学方法来研究生理现象,神经活动、生态系统以及遗传规律,并产生了数学生物学这样的学科,物理学与生物学以及其它科学的数学化途径基本上是一致的,我们可以用下图表示.



首先是从现实世界中的某一系统出发,这是科学研究的对象,它是一个十分复杂的系统,包含着许多变量,当我们选择了能在实验中被控制或可观察的参数,并用数学语言描述它们之间的关系时,一个数学模型便建立了,可见科学的数学化即意味着数学模型化.

社会科学最初是经济学的数学化,20 世纪 20 年代后期,西方经济学中产生了经济计量学这一学派.这一学派在研究经济现象的数量关系时,采用了下列步骤:第一步建立经济数学模型,它是由表示经济现象的数量关系的方程组体系刻划的;第二步运用概率论和数理统计等数学方法估计参数;第三步把估算的参数值与观察值的统计资料相对照,进行理论验证;第四步根据已经估算出的参数值的方程式,求出预期变量的数值,即所谓预测

未来,目前,数学已广泛应用于社会科学的其它领域,如法学、人口学、史学等.尤其是计算机的发展,促进了科学技术数学化的进程和数学建模的发展,大量的计算是数学建模中不可缺少的,过去在高性能计算机尚未产生之前,正是由于缺乏这一技术手段而一定程度上限制了数学建模方法的应用和发展.而计算机的出现解决了数学建模中的大量而又复杂的计算问题,从而加速了科学数学化,使数学建模得到了飞速发展.

二、数学模型方法

数学模型方法,就是通过建立和研究客观对象的数学模型来揭示对象的本质特征和变化规律的一种方法.所谓数学模型是指对研究对象(现实原型)的本质特征和关系的数学表达.它是针对所要研究的具体事物的特征或数量相依关系,采用形式化的数学语言,概括地、近似地表达出来的一种数学结构,它或者能解释特定现象的现实状态,或者能预测对象的未来状况,或者能提供处理对象的最优决策或控制.

建立数学模型的方法一般要经过以下几个步骤:

1. 数学模型的建立

要了解所研究对象的实际背景,明确预期要达到的目标,根据研究对象的特点,确定刻画该对象系统的状态、特征和变化规律的若干基本量.这就要求我们查阅大量的资料,请教专家,力求掌握研究对象的各种信息,弄清实际对象的特征.

一个实际问题往往是很复杂的,影响它的因素比较多,如果想把全部影响因素都反映到建模中来,这样的数学模型就很难建立甚至是不可能建立的,即使建立了模型,也未必能达到预期的目标.因此,要根据研究对象的特征和建模目的,对问题进行必要的简化,这是建模的关键一步,不同的简化和假设会得到不同的模型.

考察一个质量为 m 的物体受到一个力 F 作用时的运动状况.如果物质运动速度不大,可以假设空气阻力可以忽略不计,根据牛顿第二定律,模型为

$$F = m \frac{d^2 x}{dt^2}$$

这个式子表达了力 F 与位移 x 之间的规律.

若速度较大,假设空气阻力可以忽略不计就不合理了.必须考虑空气摩擦力这个因素,由实验得知,粘性阻尼的摩擦力与速度的平方成正比,于是得到一个该系统比较精确的数学模型.

$$F = m \frac{dv}{dt} + kv^2$$

因此,要针对所要解决的特定问题,分析系统中主要矛盾,摒弃可以忽略的因素,突出主要的因素和主要关系.

根据所做的假设,利用适当的数学工具,建立各个量之间的等式或不等式,画出图型列出表格或确定其它数学结构,建立模型.

2. 数学模型的求解与检验

模型的求解包括解方程、画图形、证明定理以及逻辑运算等,有时会用到传统的和近代的数学方法.

由于数学模型是进行一系列简化抽象的结果,但这种简化是否合理,其解是否能在误

差允许的范围内反映客观实际,这还是不得而知的.因此求解和检验也是非常重要的一步,求解与检验的方法是:(1)对于比较简单的数学模型可以直接求解,安排相应的观察实验加以检验并根据检验结果加以修正.(2)运用计算机进行反复多次的“数学实验”.过去有许多科学技术模型由于比较复杂,计算次数太多.在计算机出现以前无法对其进行求解,对模型也无从验算和评价,随着计算机的出现和发展,提高了计算速度和求解方程的能力,为人们检验、校正、评价所建立的数学模型提供了有力的实验手段.(3)从理论上进行分析和探讨,对数学模型加以辅助性的检验.因为有些模型如核战争模型是不可能接受实际的检验,对模型进行一些理论上的探讨也是很有实际意义的.

3. 对数学解的解释和评价

对数学解进行分析与评价,形成对实际问题的判断和预见,这是运用数学模型方法的最后一个步骤.

科学发展史上,根据数学模型求解的结果,做出科学的解释,提出重要的科学预言的事例很多.英国物理学家狄拉克于1928年建立了相对论量子力学,给出了描写单个电子行为的电子波动方程——狄拉克方程,在解狄拉克方程时发现了电子负能态的存在,并且预言了正电子的存在,后来确实得到了证实.当然对数学模型求解的结果要能做出正确的解释,形成对实际问题的判断和预见是很不容易的,这要求模型研究者具有广博的知识,丰富的想象力,深刻的洞察力,要勇于创新.

三、数学模型的分类

模型的分类比较复杂,分类方法很难有统一的标准,也没有严格界限,这里列举几种分类方法.

按照变量的情况,可分为确定性模型和随机性模型.对于服从确定的因果联系,连续变化的自然过程,可以运用经典的数学方法,用各种方程式来描述,这类模型称为确定性模型.自然界中还存在着另一类普遍现象,在这类现象中,就个别来看是无规律的,即事物的发展变化没有确定的因果性,有几种可能的不同结果,究竟出现哪一种结果是偶然的、随机的.但是,当这类随机现象由大量成员组成或出现大量次数时,又可看出遵循着一种非偶然的规律性.在许多系统中,由于受到一些复杂而尚未完全搞清楚的因素影响,使得系统在有确定的输入时,得到的输出是不确定的,这样的系统称为随机系统,这类数学模型为随机数学模型.

按照变量的情况,还可分为线性数学模型与非线性数学模型.

如果系统的输入与输出是呈线性关系,也就是说满足均匀性.即满足若 $x_1(t), x_2(t)$ 是任意两个输入;而 $y_1(t), y_2(t)$ 为对应的输出.

$$x_1(t) \rightarrow y_1(t), x_2(t) \rightarrow y_2(t)$$

那么有

$$\alpha x_1(t) + \beta x_2(t) \rightarrow \alpha y_1(t) + \beta y_2(t)$$

我们称这种系统为线性系统,这种数学模型为线性数学模型,反之不满足上述关系式的,称之为非线性系统或非线性数学模型.

按变量情况还可分为连续模型与离散模型,单变量模型和多变量模型.

如果系统输入和输出是连续时间的函数,则称为连续时间系统或连续模型.另一种系

统,它的输入与输出只在离散的瞬间取值,这种系统和模型称为离散时间系统或称为离散模型,通常用差分方程来表示.

按照时间变化对模型的影响,可分为定常数学模型和时变数学模型,若系统在初始条件给定的情况下,输出的状态取决于输入的状态而与输入的时刻无关,具有这种特性的系统称为定常系统,对应的数学模型叫做定常数学模型.反之,若参数为时间 t 的函数时,系统为时变系统,相应的模型称为时变数学模型.

按照研究方法和对象的数学特征分类,有初等模型、优化模型、逻辑模型、稳定性模型、模糊数学模型、突变模型等.

按照研究对象的实际领域,有人口模型、交通模型、生态模型、经济模型、社会模型、体育模型等.

模型的分类问题在本门课程中并没有什么重要意义,我们应该把注意力集中在建立模型,运用模型解决实际问题上来,从而达到增强数学的应用能力和加强数学素质的培养的目的.

第一章 微分方程模型

在研究实际问题时,经常无法找到该系统的有关变量之间的直接关系.但是却容易找到这些变量和它们的变化率之间的关系式,利用这些微分关系式,我们可以建立相应的微分方程模型.这种模型揭示出系统的变量在局部或瞬时所遵循的规律.因此在解决实际问题时,微分方程模型得到了广泛应用.

第一节 放射性元素衰变模型

一、马王堆一号墓的年代

湖南省长沙市马王堆一号墓于 1972 年 8 月出土,估算出该墓的大致年代是考古工作者的重大课题.

美国物理学家 Rutherford 和他的同事们证明了某些放射性元素的原子是不稳的,在一个给定的时期内,一定比例的原子会自动衰变,形成新元素的原子. Rutherford 还证明了,放射性物质在任意时刻的衰变速度都与该物质现存的数量成正比.

对有机物(动、植物)遗体的年代测定方法是放射性碳 14 测定法.它的根据是:由于大气层受到宇宙射线的连续照射,使之产生中子,中子与空气中的氮结合生成具有放射性的碳 14(C^{14}).有机体存活时,它们通过新陈代谢与外界进行物质交换,使体内的 C^{14} 与空气中的 C^{14} 有相同的百分含量.一旦有机体死亡,新陈代谢终止,因而体内 C^{14} 由于不断地衰变而不断减少.这种测定法就是根据衰变减少量的变化情况来判定有机体的死亡时间.

设在时间 t (年)碳 14 的存量为 y ,由上述原理可得微分方程

$$\frac{dy}{dt} = -\lambda y \quad (1.1)$$

其中 $\lambda > 0$ 为衰变常数,式中负号表示 C^{14} 的存量 y 是递减的.对于物质衰变速度的一种度量就是物质的半衰期,它定义为一定数量的放射原子衰变到一半时所需要的时间.设有机体死亡时间为 $t_0=0$, C^{14} 含量为 y_0 ,则初值问题

$$\frac{dy}{dt} = -\lambda y, y(0) = y_0 \quad (1.2)$$

的解是

$$y(t) = y_0 e^{-\lambda t} \quad (1.3)$$

由(1.3)式可得

$$t = \frac{1}{\lambda} \ln \frac{y_0}{y} \quad (1.4)$$

由元素衰变的半衰期 $y(T_{1/2}) = \frac{y_0}{2}$ 决定衰变常数为.

$$\lambda = \frac{\ln 2}{T_{1/2}} \quad (1.5)$$

由于

$$y'(0) = -\lambda x(0) = -\lambda y_0 \quad (1.6)$$

所以

$$\frac{y'(0)}{y'(t)} = \frac{y_0}{y(t)} \quad (1.7)$$

将(1.5), (1.7)式代入(1.4)式,得

$$t = \frac{T_{1/2}}{\ln 2} \ln \frac{y'(0)}{y'(t)} \quad (1.8)$$

其中 $y'(0)$ 表示有机体死亡时 C^{14} 的变化率, 由于地球周围的 C^{14} 的百分含量可以认为是基本不变的, 因而认为现代有机体中 C^{14} 的衰变速度与古代有机体中 C^{14} 的衰变速度相同, 所以可以用现代同类有机体死亡时 C^{14} 的变化率代替 $y'(0)$. 我们可以测得出土木炭标本的 C^{14} 的 $y'(t)$ 为 29.78 次/分, $y'(0)$ 为 38.37 次/分, C^{14} 的半衰期为 5730 年, 将这些数据代入(1.8)式, 得

$$t = \frac{5730}{\ln 2} \ln \frac{38.37}{29.78} \approx 2095(\text{年})$$

这样就估算出马王堆一号墓的年代大约是在 2000 年前的.

二、赝品的鉴定

Jan Vermeer 是 17 世纪荷兰著名画家, 他的传世作品仅有 37 件. 他生前卖出的画很少, 以致在相当长的历史时期内他的画都没有引起人们的重视. 直到 19 世纪中叶, 人们才发现了这位杰出的画家. 由于他的画严谨细腻, 精美绝伦, 使他的画价剧增, 成为当时文物市上售价最高的作品之一. 第二次世界大战中, 比利时解放后, 德国战场安全部在追捕纳粹同党时, 引发了 Van Meegeren 伪造 Jan Vermeer 的名画案.

德国战场安全部在调查一家曾把大批艺术品出卖给德国的公司中, 发现一位银行家. 这位银行家在拍卖 Jan Vermeer 的名画中作过中间人. 他还承认, 他曾是德国三流画家 H. A. Van Meegeren 的代理人. 1949 年 5 月 29 日, Meegeren 以通敌罪被逮捕. 然而, 在 1945 年 7 月 12 日, Meegeren 在监狱中说, 他从未拍卖过 Vermeer 的名画.《妓女》以及非常著名和精美的《Emmaus 的信徒们》, 还有其它四幅被认为是 Vermeer 的作品, 都是他伪造的. 许多人认为 Van Meegeren 是为了逃脱通敌罪而说谎. 为了证实他所说的一切, 他在监狱中开始伪造 Vermeer 的画《耶稣在学者们中间》, 从而向持怀疑态度的人表明自己是一个高明的伪造者. 当他的工作几乎要完成时, 他获悉他的通敌罪可能被伪造罪所取代. 于是, 他拒绝完成他的画及使之老化, 他希望调查人员不会发现使他的伪造品老化的秘密. 为了解决这个问题, 一个由著名化学家、物理学家和艺术家组成的国际调查小组受命调查此事. 调查小组对油画作了 X-射线检查以确定是否有其它油画在它们下面. 此外, 他们分析了绘画所用的颜料, 并检验某些年代迹象. 尽管 Van Meegeren 伪造的十分逼真, 专家调查小组还是在油画中发现了现代颜料钴蓝的痕迹. 在有些画中还发现了 19 世纪才发明的苯酚甲醛, 因此伪造罪成立. Van Meegeren 被判处有期徒刑一年. 在服刑期间, 他因心脏病发作于 1947 年 11 月 30 日死亡.

尽管专家调查小组提供了某些证据,许多人还是不相信著名的《Emmaus 的信徒们》是 Van Meegeren 伪造的. 甚至著名的艺术史学家 A. Bredius 也认为《Emmaus 的信徒们》是真正的 Vermeer 的作品. 这幅画已被 Rembradt 协会用 170 000 美元买下. 1967 年卡内基-梅隆大学的科学家们给出了一个完全科学的、确定性的论据,证明了《Emmaus 的信徒们》确实是一件伪造品.

由初等化学知识可以知道,地壳中的所有岩石几乎都含有少量的铀. 岩石中的铀衰变成一种其它的元素,而这种元素又衰变成另一种元素,如此衰变下去,形成一个元素系列直到铅就不再衰变了. 铀不断地补充序列中的后续元素. 所以,这些后面的元素被前面的元素替代的速度与他们衰变的速度同样快.

画家使用白铅做为颜料已有 2 000 多年的历史. 白铅属于铀系,其主要成分是无放射性的白铅 206,也含有微量的放射性元素镭 226 和铅 210. 白铅是由铅金属产生的,而铅金属是经过熔炼从铅矿石中提取出来的. 在这个过程中,矿石中的铅 210 随铅金属被提取出来. 不过 90%~95% 的镭以及它的派生物都随着炉渣中的废物被排出了. 所以大多数铅 210 的提供物被排掉了,而铅 210 开始迅速地衰变,其半衰期为 22 年. 这个衰变过程一直持续到白铅中的铅 210 再次与现存的少量镭达到放射平衡,即铅 210 的衰变数恰好被镭的衰变所平衡.

下面来计算从油画颜料样本中得到的铅 210 的含量,设 $y(t)$ 为 t 时每克白铅中铅 210 的数量, y_0 为油画刚完成的 t_0 时刻每克白铅中存在的铅 210 的数量,而 $r(t)$ 为 t 时刻每分钟每克白铅中镭 226 的衰变数, λ 是铅 210 的衰变数,则 $y(t)$ 是如下初值问题的解.

$$\frac{dy}{dt} = -\lambda y + r(t), y(t_0) = y_0 \quad (1.9)$$

由于我们感兴趣的只是 300 年左右的事情,而镭 226 的半衰期是 1 600 年,故 $r(t)$ 是一个常数,即 $r(t) = r$,解方程(1.9)得

$$y(t) = \frac{r}{\lambda} (1 - e^{-\lambda(t-t_0)}) + y_0 e^{-\lambda(t-t_0)} \quad (1.10)$$

通过下面方法,我们可以为赝品的鉴定提供科学论据.

若画是真品,我们选 $t - t_0 \approx 300$, 则

$$\lambda y_0 = \lambda y(t) e^{\lambda(t-t_0)} - r[e^{\lambda(t-t_0)} - 1], \quad (1.11)$$

表 1-1 被怀疑为赝品的油画

画 名	钋 210 的衰变	镭 226 的衰变
Emmaus 的信徒们	8.5	0.8
洗 足	12.6	0.26
读乐谱的妇人	10.3	0.3
弹曼陀林的妇人	8.2	0.17
做花边的人	1.5	1.4
欢笑的女孩	5.2	6

$$\lambda y_0 \approx \lambda y(t) e^{300\lambda} - r(e^{300\lambda} - 1) \quad (1.12)$$

又由于铅 210 的半衰期为 22, 由(1.5)式得 $\lambda = \ln 2 / 22$, 因此

$$e^{300\lambda} = e^{\frac{300}{22}\ln 2} = 2^{\frac{150}{11}} \quad (1.13)$$

由于钋 210 的衰变率等于铅 210 的衰变率,而且钋 210 的衰变率较易测量.人们测定了《Emmaus 的信徒们》及其它几幅被认为是伪造品的钋 210 和镭 226 的衰变率如表 1-1. 我们由(1.12)计算《Emmaus 的信徒们》中白铅的 λ_{y_0} ,得

$$\lambda_{y_0} = 2^{\frac{150}{11}} \cdot 8.5 + 0.8 \cdot (2^{\frac{150}{11}} - 1) = 98\,050 \text{ 个}$$

这个值大得令人无法接受,因此,这幅《Emmaus 的信徒们》一定是伪造的.用类似的分析可以证明《洗足》、《读乐谱的妇人》、《弹曼陀林的妇人》都是伪造 Vermeer 的.另一方面专家们也证实了《做花边的人》和《欢笑的女孩》不可能是近期伪造 Vermeer 的画.因为这两幅画的钋 210 与镭 226 几乎接近放射平衡,而且在 19 世纪或 20 世纪的绘画样品中都没有观察到这样的平衡.

第二节 恶性肿瘤增长模型

恶性肿瘤是一种癌症.人类为了攻克癌症,医学、遗传学、生物学、生理学、生物物理、生物化学等各科的专家们进行各种联合,以便研究它的发生成长规律及防治方法.随着医疗卫生、科学技术的不断创新,蓬勃发展,癌的防治工作也发生了令人瞩目的进展.癌的发展包括两个阶段:转形变异和增大.在转形变异阶段,正常的细胞会变成一个有能力生成肿瘤的异常细胞.在增长阶段异常细胞的分裂速率比正常细胞高得多,进行分裂倍增,从而导致肿瘤的增长发展.对恶性肿瘤,异常细胞的增长常常是侵略性的,它们甚至可以杀死宿主.本节介绍了四个恶性肿瘤增长模型.

一、指数模型

设 $N(t)$ 为时刻 t 的肿瘤细胞数目,设肿瘤细胞的相对增长率为 λ ,如果 $N(t)$ 相对 t 的变化率是与 $N(t)$ 的瞬时值成正比,则

$$\frac{dN}{dt} = \lambda N$$

由于肿瘤细胞数目超过 10^{11} 时,才是临床可观察的,所以 $N(0) = 10^{11}$. $N(t)$ 满足初值问题

$$\frac{dN}{dt} = \lambda N, N(0) = 10^{11}$$

的解是

$$N(t) = 10^{11} e^{\lambda t}$$

设肿瘤细胞增加一倍所需时间为 T ,即 $N(t+T) = 2N(t)$,由此可得

$$\lambda = \ln 2 / T$$

这就是肿瘤增长的指数模型.大量临床实践表明:在肿瘤生长初期,几乎每经过一定的时间,肿瘤细胞数目就增加一倍.在肿瘤生长后期,由于各种生理条件的限制,肿瘤细胞数目逐渐趋向于某个稳定值.所以指数模型适应于肿瘤生长初期,后期会出现较大偏差.

二、Logistic 模型

用荷兰生物数学家 Verhulst 提出的 Logistic 模型更为合适.记由于生理限制肿瘤细

胞数目的极限值为 N_m , 关于 $N(t)$ 的微分方程可写作

$$\frac{dN}{dt} = \lambda N \frac{N_m - N}{N_m - N(0)} \quad (1.14)$$

解为
$$N(t) = N(0) \left[\frac{N(0)}{N_m} + \left(1 - \frac{N(0)}{N_m} \right) e^{-\frac{\lambda N_m t}{N_m - N(0)}} \right]^{-1}$$

下面我们研究 Logistic 模型的解曲线的凹凸性及拐点. 对 (1.14) 式求导, 得

$$\frac{d^2 N}{dt^2} = \lambda \frac{dN}{dt} \left(\frac{N_m - N}{N_m - N(0)} \right) + \lambda N \left(-\frac{1}{N_m - N(0)} \frac{dN}{dt} \right) = \lambda \frac{dN}{dt} \left(\frac{N_m - 2N}{N_m - N(0)} \right)$$

显然拐点的横坐标为 $\frac{N_m}{2}$, 当 $N < \frac{N_m}{2}$ 时, 二阶导数为正, 曲线 $N(t)$ 是凹的; 当 $\frac{N_m}{2} < N < N_m$ 时, 二阶导数为负, 曲线 $N(t)$ 是凸的. 并且曲线的凹凸弧段基本是关于拐点对称的. 专家在实践中发现, 肿瘤生长曲线一般不是关于 Logistic 模型的拐点对称. 即拐点横坐标未必取在 $\frac{N_m}{2}$ 处. 因此 Logistic 模型经常不能与实际数据很好地吻合.

三、Gompertz 模型

$N(t)$ 、 N_m 及 λ 表达的意义同 Logistic 模型, 则 Gompertz 模型为

$$\frac{dN}{dt} = -\lambda N \ln \frac{N}{N_m} \quad (1.15)$$

方程 (1.15) 的解为

$$N(t) = N(0) \exp \left[\ln \frac{N_m}{N(0)} (1 - e^{-\lambda t}) \right]$$

显然方程的解有以下性质:

(1) 当 $t \rightarrow \infty$ 时, $N(t) \rightarrow N_m$.

(2) 当 t 较小时, $e^{-\lambda t} \approx 1 - \lambda t$, 从而得 $N(t) \approx N(0) e^{\left(\ln \frac{N_m}{N(0)} \right) \lambda t}$. 所以当 t 较少时, Gompertz 模型与指数模型近似.

(3) 当 $N < \frac{N_m}{e}$ 时, $\frac{d^2 N}{dt^2} > 0$; 当 $N > \frac{N_m}{e}$ 时, $\frac{d^2 N}{dt^2} < 0$; 而 $N = \frac{N_m}{e}$ 是解曲线拐点的横坐标.

由于 Gompertz 模型的解曲线的拐点横坐标为 $\frac{N_m}{e}$, 凹凸弧段不是关于拐点对称, 所以此模型能比较灵活地与实际数据吻合.

J. R. Usher 提出了一个更一般的模型:

$$\frac{dN}{dt} = \frac{\lambda N}{\alpha} \left[1 - \left(\frac{N}{N_m} \right)^\alpha \right]$$

它的解为

$$N(t) = N(0) \left\{ \left(\frac{N(0)}{N_m} \right)^\alpha + e^{-\lambda t} \left[1 - \left(\frac{N(0)}{N_m} \right)^\alpha \right] \right\}^{-\frac{1}{\alpha}}$$

上述三个模型均为 Usher 模型的特殊形式:

当 $\alpha \rightarrow 0$ 时, $\frac{dN}{dt} \rightarrow -\lambda N \ln \frac{N}{N_m}$, 即得 Gompertz 模型;

当 $\alpha \rightarrow 1$ 时, $\frac{dN}{dt} \rightarrow \lambda N \left(1 - \frac{N}{N_m} \right)$, 即得 Logistic 模型;