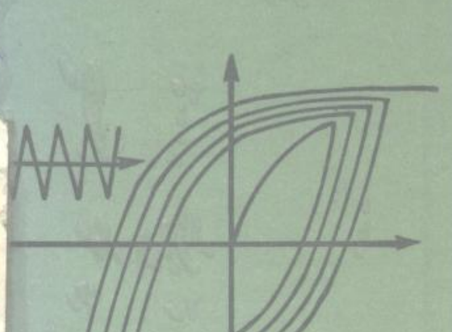
非线性连续介质力学基础

范镜泓　高芝晖 著



重庆大学出版社

非线性连续介质力学基础

范镜泓　高芝晖　著

重庆大学出版社

内 容 简 介

本书用较统一、较普遍和较新的观点介绍连续介质的基本力学原理及其应用，重点摆在有限变形、本构关系、热力学和公理化方法等难度较大的内容上。前五章在少而精的原则下，叙述连续介质力学的基本内容；后五章则在物理概念及其应用的基础上，介绍次弹性、超弹性、粘弹性、不可逆热力学、本构理论、非线性场论中的有限元、经典塑性理论与内蕴时间本构理论等较高深的内容。本书可作为力学、数学、机械、动力、土建、采矿和材料等理工科专业的研究生教材，亦可供大学教师、工程研究人员和高年级大学生参考。

非线性连续介质力学基础
范镜泓　高芝晖　著
责任编辑　朱庆祥

*

重庆大学出版社出版
新华书店重庆发行所发行
重庆大学出版社印刷厂印刷

*

开本：787×1092 1/16　印张：18.75　插页：4　字数：468千
1987年5月第一版　1987年5月第一次印刷
印数：1—1,000

标准书号：ISBN 7-5624-0000-8 / O·1　统一书号：13408·4
定　价：3.50元　检 2

前　　言

连续介质力学领域内的工作者现在有幸注视该学科近些年来在新的层次和广度范围内深入发展的趋势，正是这种活跃的势头孕育着连续介质力学某些难题深一层突破的新希望，也孕育着与它的发展密不可分的应用力学与工程学科深一层发展的可能性。回顾自1638年伽利略发表其名著“两种新的科学”以来的有关连续体力学的发展史，可以看出早期的力学家十分注意在较大范围内，运用力学的基本原理去发展有关的理论、概念及其数学描述。后来由于生产技术的发展，分工越来越细，人们被迫局限于很小的范围内工作。与这种状况相适应，力学教学与研究也往往局限于很小而互相割裂的分支内，模糊了它们的联系及其共同基础的研究。现在人们已越来越认识到这种方法的危害性，事实上，那种脱离了整体认识的专门化的研究是难以富有生命力的，而那种在庞杂、互相割裂和重复的力学科目下培养出来的学生是难以把握力学学科的总貌并富有创造性的。以上的叙句述画了写作本书的背景和原动力，也决定了本书的内容和追求的目标。具体地说，本书力图用较统一、较普遍和较新的观点来讲述连续介质的基本力学原理，目的是使力学工作者和研究生从具体的力学分支中得到的理论知识综合化、深化和普遍化，以穿透狭窄力学分支的壁垒而了解连续介质力学总学科的概貌；本书也力图为力学工作者和研究生们更富有创造力的工作提供一定的理论基础，并为他们掌握当代连续介质力学领域内的新的学术思想和方法论提供必要的学习材料。在这种目的下，本书将把主要内容集中在有限变形、本构关系、不可逆热力学和公理化方法等概念难度较大的部分，以及有关连续介质力学诸分支相互联系的阐述上，至于解边值与初值问题的解析方法与数值方法则很少涉及。

本书前五章属于基本部分，注意在少而精的原则下介绍有限应变、瞬时运动、守恒定律及应力理论、热力学的基本概念和简单工程介质的本构关系及基本方程，也涉及到某些宏观规律的微观解释。第六章介绍次弹性材料和经典弹性理论，第七章介绍有限变形下的应力理论、运动

方程和功率方程，并介绍非线性场论的有限元要义和超弹性材料。第八章则用ε_{Tq}空间及其子空间的观点介绍连续介质的不可逆热力学。第九章则结合流变介质的分析，集各种研究本构方程的方法于一章，以便使读者在综合性地学习与运用中对本构方程及有关的方法论得到更深的理解与掌握，其中还较详细地讨论了本构方程的客观性原理。第十章则专门讲述经典塑性理论及内蕴时间本构理论，并对后者的应用作了较多的阐述。本书为适应广大读者的阅读起见，只使用了笛卡尔张量，但为了满足某些读者的需要，在"附录"中专门给出了张量分析等数学内容。

本书包含了笔者在材料本构关系和内时塑性理论等方面的一些研究工作；对客观性原理、Coleman 定理和不可逆热力学等作了一些分析与探讨，即使在一些传统内容的叙述上，如连续介质的基本模型、经典塑性理论、弹性理论和有限变形等也力求有所前进和创新。

本书初稿写成后曾在上海交通大学工程力学系给该系及外校的研究生进行了讲授，然后进行了修改。修改后的稿子又在重庆大学向内蕴时间本构理论研讨班成员及研究生再次进行讲授。初步实践表明，前五章约需20学时，可适用于固体力学和流体力学等专业研究生的需要；后五章约需40学时，偏重于固体力学方面的内容，教师可根据教学要求和学时数选择其中部分内容进行讲授。

本书从写作至出版前后只有两年，重庆大学出版社为提高本书的质量作了很大努力，特此深表谢忱。由于作者水平有限，缺点在所难免，敬希读者批评予以指正。

作者谨识于

歌乐山下

一九八六年四月

目　录

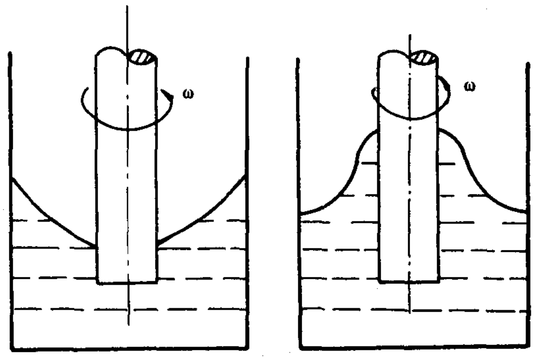
第一章 导　　论

§1·1　近代连续介质力学发展的特点和展望

大约从1960年以来，连续介质力学在更深的层次和更广的范围内向前发展着。这一进程不仅在认识论和方法论上给力学工作者以新的启迪，而且给力学带来了新的活力，鼓舞着力学工作者从更高的和更普遍的观点把握本学科的发展规律，开辟那些过去很难涉猎的边缘领域和禁区。纵观连续介质力学这段时期的发展，不难看出它具有下述四个密切联系的特点。

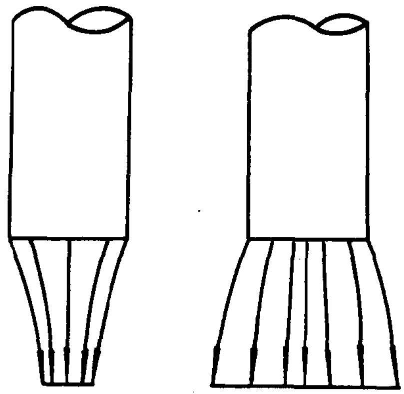
首先，它摆脱了连续介质力学与热力学相互割裂的局面，在互相渗透、互相补充的综合过程中向前发展。众所周知在连续介质力学发展的早期阶段，它处理的只是几种在特殊情况下工作的简单介质，例如在材料力学和水力学中处理的大都是在等温或绝热条件下工作的线弹性体和理想流体。对这类介质常可不卷入能量平衡，而列出只包含力学量的一组微分方程式去决定应力应变场或流动与压力分布。然而在近代由于大量新材料及新工艺的出现，也由于高温和变温等复杂工作条件，使得热力学量与力学量互相耦合，例如在焊接、铸造与热处理等工艺过程中，应力、温度与材料金相组织之间有着复杂的耦合作用，不仅温度要引起应力场的变化，而且相变释放的潜热也要改变应力场与温度场，因而连续介质力学就不可能脱离热力学来发展了。在弹性和气体动力学中固然离不开热力学的基本定律，在研究本构关系中热力学引入的约束条件、概念和基本关系的意义就更为突出了。从连续介质热力学的关系和原理来看待纯力学的关系和原理，则后者只不过是前者在特殊情况下（例如等温和绝热）的表现形式。这就使人们可以从高的层次和更大的系统范围内来考察各种力学问题，发展新概念、建立新模型。另一方面，传统热力学处理的是平衡态或拟平衡态的均匀系统，例如通过象体积、压力和温度等状态变量去描述理想气体的循环过程。然而若使研究的模型与实际比较接近时，就必须摆脱平衡态的束缚去发展非平衡态的热力学，摆脱均匀、闭系统和诸如循环等在发展热机时代引入的概念，而考虑非均匀的系统。这就要求用应力张量来代替压力，用应变张量来代替体积，即必须采用连续介质力学的概念和方法来研究热力学。这样就形成了理论物理学两个最古老的分支间互相渗透和补充的局面，使连续介质力学的发展建立在更坚实的物理基础之上，并大大开拓了自己的研究领域，这就是这一时期连续介质力学发展的第一个显著特点。

第二个特点是在这一时期内连续介质本构关系的研究日趋活跃。这主要是由于大量实际问题迫切需要建立更接近于材料真实响应特性的模型。实际上很多问题已不能用经典的模型，如线弹性，理想流体和牛顿流体来加以解释。例如柱杆的扭转时的伸长现象，岩石的剪胀特性，高分子粘弹流体在容器内旋转时的爬杆效应（Weissenberg效应，图1·1 *b*），及粘弹流体流出管口时向四周膨胀的效应（Barus效应，图1·2*b*）。另外在各种不同的工程问题中要求处理具有遗传性质的材料，即应力响应不仅与当时的应变有关，而且还与变形的历史过程有关，这些都对本构关系的研究提出了迫切的要求。促使力学工作者越来越重视本构关系的另一个原因，是人们已意识到本构关系研究的落后现状必将影响其它学科的深入发展。薛昌明



(a)粘性流体　　(b)粘弹流体

图1·1　Weissenberg效应



(a)粘性流体　　(b)粘弹流体

图1·2　Barus效应

（Sih，G·C·）关于本构关系在研究断裂与疲劳中的意义的下述讲话可从一个侧面来说明这一问题，他说〔1〕：“除非某些基本的问题被加以解决，断裂力学的研究将面临停滞。例如应当发展一种方法将材料特性的表观变化与由于损伤（例如空隙与裂隙的出现）而引起的材料性质的内蕴变化区别开来，这需要发展一种现实的本构关系通过宏观变量来计及微结构与微缺陷的影响。疲劳裂纹扩展是应能从这一观点得到好处的另一课题，损伤积累的概念必须通过疲劳过程的路径依赖性质弄清楚。”可以说明这一问题的另一观点是，在应力分析工作者中普遍感到本构理论的研究远远落后于计算力学的发展。现在的数值算法已可以处理象松驰、蠕变、循环加载和大变形等非常复杂的变形和流动情况，但所用的本构模型却常常与实际相差甚远（例如塑性变形后的卸载和循环加载），这就会使那些昂贵的和费时的非线性数值计算失去应有的实用价值。值得注意的是，当前人们研究本构关系的热潮是在各种条件已具备的情况下涌现的。除了上面提到的高级计算机和计算力学的发展以外，近二十年来发展起来的高级材料试验机（如MTS系统，Instron系统），使得人们可以更精确地研究材料的力学性能，检验和发展各种模型。另一方面是理论上的准备，这主要指的是理性力学的复兴及含内变量的不可逆热力学的发展。现在我们先对后者作进一步的说明，热力学在本构理论中的成功应用首先应归功于Biot，他在五十年代将含内变量的不可逆热力学成功地应用于粘弹性体的研究，这一进展鼓舞着人们向作为连续介质力学一大难题的塑性理论进军，并已取得了可喜的进展。在含内变量的不可逆热力学中，内变量被考虑成能够宏观地表征材料内部组织状态变化的某种内部参量，而载荷史的效应可等价地用对应的热力学路径造成的后果——内变量在该时刻的一组完整的集合值来加以代替，不可逆的能量耗散则表现在克服阻碍内变量变化的广义内摩擦力上。这一套理论上比较严格应用起来又较简便的方法，为考虑材料内部组织结构变化对宏观本构关系的影响，为将宏观表象与微观机制结合起来的努力开拓了新的途径。

第三是理性力学的复兴和发展。理性力学这一名词最初是Newton采用的，在十九世纪以前已有了相当的发展，如两种坐标下的应力应变描述、守恒方程和广义虎克定律等，但由于当时数学上遇到的困难，在十九世纪末页后的一段历史时期内基本上处于停滞状态。但是在近代由于新材料的应用越来越多，本构理论的发展越来越迫切，新现象和新问题不断涌现，迫切需要摆脱狭隘经验的束缚，从理性上加以概括和提高；另一方面近代数学各分支的发展也为在新的层次上恢复和发扬力学与数学紧密结合的古老传统开辟了可能，这促使了理性

力学在1950年前后开始的复兴，并在新的理论基础和数学工具下向前发展，这一进程中的先驱者有Truesdell，Noll和Coleman等人。理性力学从作为公理的最必须的基本事实出发，建立起与基本的力学和物理规律不相矛盾的公理系统，并由此运用严密的数学演绎去进行理性的分析，使理论具有较大的普遍性。理性力学提供了人们研究连续介质复杂力学行为的锐利武器，极大地推动着非线性场论的发展，诚如Odqvist所说〔2〕，理性力学学派“所完成的公理化方法，证明对于洞察非线性固体力学的复杂课题是极端重要的，因此应用力学的发展得感谢这一批年轻光辉的数学家不辞辛苦地打下我们课题的基础”。理性力学学派的这一努力有人比喻为古埃及量度尼罗河沙洲的大量实践到欧几里德几何公理体系的发展，其蕴含的意义是会在历史进程中进一步显示出来的。

第四是重视有限变形的研究。弹性力学作为精确理论本质上是非线性的，并进行过大量的分析，例如 Finger1894年就完成了超弹性(Hyperelasticity)有限变形理论的研究，但由于有限弹性理论的方程冗长、繁杂而难以求解，于是大家走上了线性化的道路。线弹性理论有了一百多年历史，虽在工程中获得了重要的应用，但早已处于强弩之末。近代由于生产技术的发展提出了大量有限变形的问题（例如金属成形、薄壁结构、裂尖场、地质构造、高分子材料和生物组织的分析等）更促使几何非线性的研究日趋活跃。另一方面除计算机的发展使数字计算变得容易以外，精密的数学分析工具也日趋成熟，张量分析的大量应用使过去需要大量篇幅的数学公式变得十分简单清晰，而Cayley-Hamilton定理又使张量多项式的最高阶数降低至三阶以下，特别是Rivlin等人找到了一些简单而重要的非线性问题的精确解，也重新鼓起了人们对有限变形理论研究的勇气。在塑性大变形理论的研究方面，自从Nagtegaal和de Jong在1981年斯坦福大学举行的塑性大变形讨论会上，报告他们计算简单剪切大变形时得到了与实际不符的摆动剪应力的奇怪结果之后，Truesdell等对塑性理论的批评才更引起了大家的重视（参见193页和109页）。人们纷纷从本构关系客观性原理的要求出发，从材料的细观力学到宏观响应特性等多方面进行了研究，弄清楚了区分材料本身的旋转与连续介质力学观念上的旋转在建立大变形本构关系上的重要性，这就促进了有限变形的研究在更高层次上的深入发展。

从以上的综述中我们可以看出非线性连续介质力学的研究已经取得了重大的进展。展望其发展趋势，可以预料在方法论上它将更多地从分析走向综合，从限于个别分支的努力，扩大到包括物理、化学、数学和材料学科等多学科的相互渗透和进行大系统的研究，并注意将宏观的表象与物质内部组织结构的变化联系起来。近代连续介质力学有坚实的理论基础和新颖的方法论，有严密的数学分析工具和高速的数字计算机，以及有现代化的实验设备作为后盾，不难想象这将意味着连续介质力学从总体到各分支深一层发展的新的希望，也孕育着那些与工程科学紧密相连的应用力学学科，如疲劳、弹塑性断裂力学、弹塑性结构力学、复合材料力学、金属成型、非牛顿流体力学、弹塑性冲击与稳定和地下工程力学等在实际应用中取得纵深进展的可能性，而这一切必将产生巨大的社会经济效益。作为力学工作者我们应当认真注意这一动向，提高和开阔视野以便掌握近代力学的发展规律，增强信心和勇气，大胆地和不断深入进行连续介质力学及其应用的研究，我们也应当大胆开拓新领域，勇于进行横向学科间的穿插，在这一过程中发展新的概念和方法，为祖国的力学事业作出应有的贡献。

§1·2 宏观无穷小、微观无限大的连续介质力学模型

连续介质力学的深入发展，要求建立作为其分析基础的概念更清晰的模型。连续介质力学属于唯象理论，它不采用物质的宏观行为由粒子理论推出的本质论的观点，而采用连续介质的假设，使得与连续场论有关的数学分析都可无困难地进行。由于这种方法远较本质论简单实用，且由于它所依据的是宏观实验，而所得的结论仍用于宏观世界，因此又是合理的，这使得它的应用极为广泛。但是由于连续介质的概念是一种数学上的抽象，因而当将它用到真实的物理世界时必须十分谨慎，应当注意将连续介质的观点与粒子论的观点很好地协调起来。解决这一“实际粒子离散”和“模型介质连续”概念上困难的办法是宏观无限小和微观无限大的模型〔26〕。这一模型认为在连续介质中所使用的微元体（或微系统）不是一个点，它应包含大量的粒子，以便从物理的观点来看，它使温度、熵、质量和能量密度等具有确定的物理内涵；另一方面它又足够小，以致从场的分析的观点来看，它在无穷小的尺寸范围内均匀性的假设对场论中数学分析引起的误差可以忽略不计。这种宏观无限小和微观无限大的模型表面上看有些奇怪，实际上是一种很有用的研究连续介质的热力学模型。当然这种唯象学的模型也有一定的实用条件，如果考察的范围小到与材料的特征尺寸密切相关的某种尺度以下，该模型的误差就可能是很大的。例如地表上的空气在室温下的特征尺寸（平均自由路径）大约是5×10^{-6}厘米*，因此如果考虑空气围绕飞机的流动，我们可以考虑空气是连续介质，而对水分子来说，其特征尺寸大约是1 Å（10^{-8}厘米），如果我们考虑的问题中的尺寸小于10^{-6}厘米；则由此模型引入的误差就会是很大的。

顺便指出，习惯上常把物体分为固体和流体，把材料分成弹性体和粘弹性体等，实际上这些概念都是相对的，有条件的，它们同物质的结构、载荷特性和环境有关。在一定温度下缓缓拉伸沥青，它的变形近似于流体的流动，如果在高速拉伸下，其试样则呈现固体断裂时那种脆性断口；如果在人类通常的活动时间内考察地壳的变化是难以观察出地球的变形的，但如果从地质构造的长远周期来考察地壳的变化，则会发现地壳也在蠕变。后面这一情况促使我们象特征尺寸一样引入特征时间的概念，以便与外界的作用时间或观察时间作相对的比较，在第九章中将要引入的松驰时间就可以作为特征时间的例子。如果两个地质（或煤层）构造，一个特征（松驰）时间长而另一个短，则在同样的地质力作用下，一个可能不会造成损害而另一个可能在较短时间内造成较大的蠕变而塌方。

---

*这里引入的数据引自参考文献〔4〕

第二章　有限形变与应变

本章研究连续介质域的变形。假设一点处的变形只与该质点无限小邻域内各质点间的相对运动有关，而与有限距离质点的运动无关。研究的内容包括参考标架的选择、构形的描述和如何从质点邻域的运动中分离出纯变形部分以及质点邻域变形的合适度量方法，这种研究是纯几何学的。在研究变形时，暂不考虑引起变形的力和连续介质的物性，对变形的大小则不加限制。

§2·1　构形、变形和流动、Lagrange描述和Euler描述

考虑连续介质构成的集合。所谓“质点”（Particle），是指构成连续介质的某一无限小物质部分。而所谓“点”（Point）则指占据空间某一确定位置的几何点。我们假设集合Ω_x的每一质点占有确定的空间点位置，而Ω_x中的每一空间点也恰为一质点所占据。质点与空间点的这种对应关系是双向单值的，即集合Ω_x对应的空间域内充满着连续介质。

称所研究的连续介质集合Ω_x在空间所占据的域为构形（Configuration）。任意瞬时的构形记为χ，连续介质构形随时间的变化称之为运动或流动。流动一词常用以着重指明连续介质运动的整个过程，而在塑性力学中流动则带有引起永久变形的运动的含义。

术语“变形”指已变形的构形相对于初始（未变形）的自然构形的改变。运动不一定产生变形，只有当连续介质域中各质点间有相对运动时才产生变形。研究构形的变形就是确定由初始构形到变形构形间的相对运动，以得到变形场的恰当描述。研究变形时，我们强调的是初始构形与瞬时构形间的相对关系，而不去注意中间构形或经过怎样的路径才从初始构形达到瞬时构形。

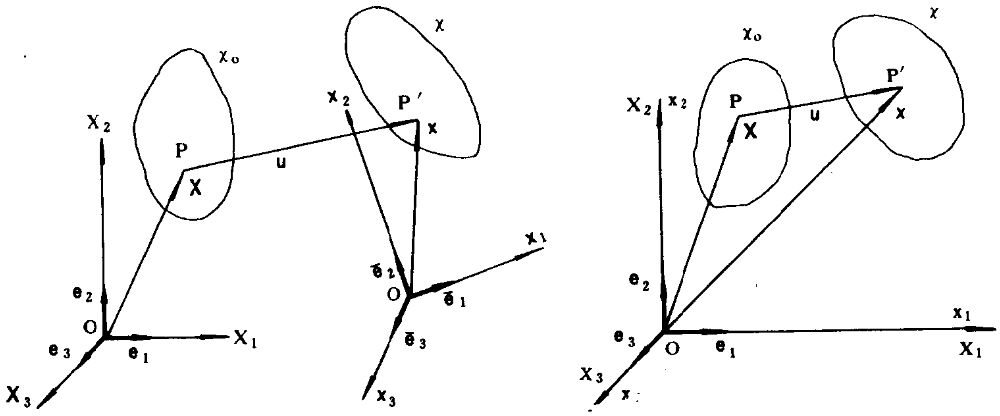
为了研究连续介质的流动和变形，必须选择一固定的笛卡尔坐标系，并选择某一特定瞬时的构形作为参考构形χ_0去考察构形的变化。参考构形的选取是任意的，不失一般性，可取$t=0$时刻或未变形状态的构形作为参考构形。参考构形中的质点P在固定笛卡尔坐标系中以大写字母$\mathbf{X}(X_1, X_2, X_3)$表之。不论物体怎样运动，该质点在参考构形中的坐标是确定不变的。这样，这类坐标就可作为识别各“质点”的标记，因此称$\mathbf{X}$为物质坐标。今后简称物质坐标为$\mathbf{X}$的质点为“质点$\mathbf{X}$”。

在t瞬时，质点$\mathbf{X}$运动至空间点$\mathbf{x}(x_1, x_2, x_3)$位置（以小写字母表之）。显然$\mathbf{x}$是质点物质坐标和时间为函数，记为

$$\mathbf{x}=\mathbf{x}(\mathbf{X},\ t)。\qquad (1\cdot1)$$

坐标$\mathbf{x}$可作为识别“空间点”的标记，在不同的时刻它们由不同的质点$\mathbf{X}$所占有，故称$\mathbf{x}$为空间坐标。

连续介质集合Ω_x的参考构形和瞬时构形可用不同的坐标架来确定（图2·1a）。本书中为简化起见采用同一个笛卡尔坐标架作为物质和空间坐标架（图2·1b）。



(a) 参考构形与瞬时构形采用不同的坐标架　　(b) 参考构形与瞬时构形采用同一个坐标架

图2.1　物质与空间坐标架

在连续介质力学中，物理和力学参量可用物质坐标$\mathbf{X}$为自变量来描述，称为物质描述或Lagrange描述；也可以用空间坐标$\mathbf{x}$为自变量来描述，称为空间描述或Euler描述。物质描述给出了任一质点在任意瞬时的物理参量的值（如密度、速度等），这样所有质点的信息就给出了连续介质场的充分描述。空间描述给出的则是任一空间点在任意瞬时的参量值。显然，不同瞬时该空间点将为不同的质点所占据。可以形象地将空间描述比喻为交通警察对街道上汽车运动情况的描述，而物质描述则比喻为该街道上所有汽车司机对汽车的位置和运动速度等的描述。在研究运动学时采用Lagrange描述较简单，而研究静力学或动力学时却带来复杂化，此时，空间描述却能得到简单的表达式。不过这两种描述是可以互换的，若设某物理量的空间描述为

$$f(\mathbf{x}, t), \tag{1·2}$$

将(1·1)代入其中，就将空间描述变换成了物质描述

$$p = f[\mathbf{x}(\mathbf{X}, t), t] = g(\mathbf{X}, t)。 \tag{1·3}$$

设式(1·1)的函数为单值、连续、存在一阶连续偏导数，且其雅可比行列式在给定域中满足

$$J = \left|\frac{\partial x_i}{\partial X_I}\right| > 0, \tag{1·4}$$

则存在唯一的反函数

$$\mathbf{X} = \mathbf{X}(\mathbf{x}, t)。 \tag{1·5}$$

于是某参变量p的物质描述$p = g(\mathbf{X}, t)$可通过式(1·5)逆变换为原来的空间描述式(1·2)，即

$$p = g[\mathbf{X}(\mathbf{x}, t), t] = f(\mathbf{x}, t)。 \tag{1·6}$$

在进入讨论变形之前，我们先对矢量和张量的符号及其运算的表示作下述规定。

标量、矢量和张量的符号表示：（1）矢量及由其元素构成的列矩阵用粗体大写或粗体小写字母表示，而其行矩阵则用转置来表示。二阶张量及其元素构成的矩阵用粗体大写或粗体小写字母表示。例如下面即将讨论的Almansi应变张量及其元素构成的矩阵用粗体小写字母$\mathbf{e}$表示。二阶张量有时也用字母下加波纹号来表示，例如应力张量可记为$\underset{\sim}{\tau}$。（2）凡标量用白体字母表示。矢量和张量的分量，用带下标的白体字母表示。若为物质坐标系（参考构

形）中的分量，其下标采用大写字母，若为空间坐标系(瞬时构形)中的分量，其下标采用小写字母。有些张量如变形梯度的分量 $F_{iJ}=\frac{\partial x_i}{\partial X_J}$，联系着初始构形与瞬时构形，则其下标为混合的，既有小写字母下标 i，又有大写字母下标 J。（3）矢量和张量分量偏导数的表示法：若对物质坐标求偏导数，则采用逗号后加大写字母的下标表示，例如 $x_{i,J}$ 表示 $\frac{\partial x_i}{\partial X_J}$。若对空间坐标求偏导数，则采用逗号后加小写字母的下标表示，例如 $v_{i,j}$ 表示 $\partial v_i/\partial x_j$。

矢量和张量的运算表示法：（1）矢量**a**和**b**的标积用 $\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}=a_ib_i$ 表示，它们的矢积用 $\mathbf{a}\times\mathbf{b}=e_{ijk}a_jb_k\mathbf{e}_i$ 表示，式中 $\mathbf{e}_i$ 为笛卡尔坐标轴方向的单位矢量，e_{ijk} 为Ricci符号。（2）两个二阶张量**A**和**B**的内积仍为二阶张量**C**，或用分量记法记为 $C_{ij}=A_{ik}B_{kj}$，或用矩阵符号法记为 $\mathbf{C}=\mathbf{AB}$(注意：这并非并矢记法)。若对调内积次序，即求**B**与**A**的内积，则变为另一二阶张量**D**，记为 $D_{ij}=B_{ik}A_{kj}$ 或 $\mathbf{D}=\mathbf{BA}$。一个二阶张量**A**与一矢量**b**的内积仍为一矢量**c**，或用分量记法记为 $C_i=A_{ij}b_j$，或用矩阵符号记法记为 $\mathbf{C}=\mathbf{Ab}$，矢量在矩阵乘法中一律视为列矩阵，若对调两者的内积次序，得另一矢量**d**，记为 $d_i=b_iA_{ji}$，或 $\mathbf{d}^T=\mathbf{b}^T\mathbf{A}$，这里 $\mathbf{b}^T$ 为**b**的转置（即为行矩阵）。

§2·2 变形梯度和极分解

连续介质的运动可由(1.1)式表示，当连续介质各质点间存在相对运动时，介质就产生了变形。

考虑两个无限接近的质点**X**和 $\mathbf{X}+d\mathbf{X}$，经过变形后其矢径差已从 $d\mathbf{X}$ 变为 $d\mathbf{x}$，则在瞬时构形 $\mathcal{X}$ 中，它们分别占有空间位置**x**和 $\mathbf{x}+d\mathbf{x}$，且由(1·1)式有 $\mathbf{x}=\mathbf{x}(\mathbf{X},t)$，

其分量为：

$$x_i=x_i(X_J,t),\tag{2·1a}$$

及

$$\mathbf{x}+d\mathbf{x}=\mathbf{x}(\mathbf{X}+d\mathbf{X},t),\tag{2·1b}$$

质点**X**相对于参考构形的位移则为(图2·1b)

$$\mathbf{u}=\mathbf{x}(\mathbf{X},t)-\mathbf{X},\tag{2·2a}$$

或

$$u_i=x_i-X_I。(I=i)\tag{2·2b}$$

将 $d\mathbf{x}$ 用 $d\mathbf{X}$ 表示，并写成分量形式为

$$dx_i=\frac{\partial x_i}{\partial X_J}dX_J\tag{2·3}$$

上式可由式(2.1b)展成台劳级数并甩去高次项而得到。量 $\partial x_i/\partial X_J$ 称为变形梯度的分量，变形梯度为二阶张量，以符号 $\mathbf{F}\equiv\frac{\partial\mathbf{x}}{\partial\mathbf{X}}$ 表示

$$\mathbf{F}\equiv\frac{\partial\mathbf{x}}{\partial\mathbf{X}}=\begin{pmatrix}\frac{\partial x_1}{\partial X_{\mathrm{I}}} & \frac{\partial x_1}{\partial X_{\mathrm{II}}} & \frac{\partial x_1}{\partial X_{\mathrm{III}}}\\ \frac{\partial x_2}{\partial X_{\mathrm{I}}} & \frac{\partial x_2}{\partial X_{\mathrm{II}}} & \frac{\partial x_2}{\partial X_{\mathrm{III}}}\\ \frac{\partial x_3}{\partial X_{\mathrm{I}}} & \frac{\partial x_3}{\partial X_{\mathrm{II}}} & \frac{\partial x_3}{\partial X_{\mathrm{III}}}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}F_{1\mathrm{I}} & F_{1\mathrm{II}} & F_{1\mathrm{III}}\\ F_{2\mathrm{I}} & F_{2\mathrm{II}} & F_{2\mathrm{III}}\\ F_{3\mathrm{I}} & F_{3\mathrm{II}} & F_{3\mathrm{III}}\end{pmatrix}\tag{2·4a}$$

其分量由式(2·2b)可得

$$F_{iJ}=\frac{\partial x_i}{\partial X_J}=x_{i,J}=\delta_{iJ}+u_{i,J} \tag{2·4b}$$

式中

$$u_{i,J}=\frac{\partial u_i}{\partial X_J} \tag{2·4c}$$

按照前节中的规则，将矢量写成列阵，则由式(2.3)可得

$$d\mathbf{x}=\mathbf{F}d\mathbf{X} \tag{2·5}$$

变形梯度反映了质点**X**邻域的相对运动。式(2.5)、(2.3)表明，$d\mathbf{x}$与$d\mathbf{X}$间成线性关系。

变形梯度的行列式

$$J=\det\mathbf{F}\neq 0 \tag{2·6}$$

称为雅可比行列式，它给出了质点**X**邻域无限小单元的瞬时构形与参考构形的体积比（参看(5·2)式）。

变形梯度**F**为非奇异张量，因此具有逆张量$\mathbf{F}^{-1}$，其分量F^{-1}_{Ij}为：

$$F^{-1}_{Ij}=\frac{\partial X_I}{\partial x_j}=\delta_{Ij}-u_{I,j} \tag{2·7}$$

但变形梯度不能作为变形程度的合适度量。事实上能作为变形程度度量的量的必要条件是刚体运动时它应保持不变，而**F**不满足此条件。例如，物体绕Z轴作刚体转动时由(图2·2)有：

$$\begin{cases}x=r\cos(\theta+\alpha)=X\cos\theta-Y\sin\theta\\ y=r\sin(\theta+\alpha)=X\sin\theta+Y\cos\theta\\ z=Z\end{cases}$$

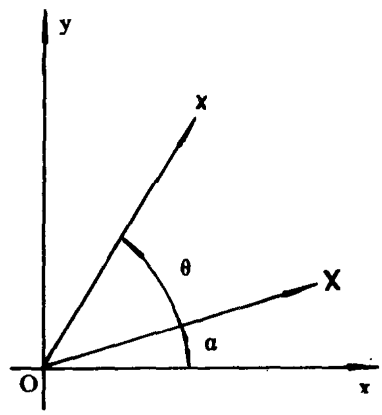


图2·2　绕Z轴转动

则由(2·4a)得

$$\mathbf{F}=\frac{\partial\mathbf{x}}{\partial\mathbf{X}}=\begin{pmatrix}\cos\theta & -\sin\theta & 0\\ \sin\theta & \cos\theta & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\neq \mathrm{const}.$$

这说明变形梯度包括了**X**点邻域的变形和转动。我们将变形梯度分解为变形和转动两个相继的过程。

根据张量极分解定理〔参见附录C〕，非奇异方阵**F**可唯一地分解为下面两个乘积之一

$$\mathbf{F}=\mathbf{RU},\quad \mathbf{F}=\mathbf{VR}。 \tag{2·8}$$

其中**R**为正交矩阵，即**R**满足

$$\mathbf{R}^T\mathbf{R}=\mathbf{R}\mathbf{R}^T=\mathbf{I}\text{（单位矩阵）}, \tag{2·9}$$

而**U**和**V**为正定对称矩阵。**R**反映质点**X**的邻域绕过**X**的瞬时转动轴作刚体转动，而**U**和**V**则反映**X**邻域的变形。事实上，由

$$d\mathbf{x}=\mathbf{F}d\mathbf{X}=\mathbf{RU}d\mathbf{X}=\mathbf{R}d\mathbf{y}, \tag{2·10a}$$

式中

$$d\mathbf{y}=\mathbf{U}d\mathbf{X}, \tag{2·10b}$$

可见，第一种分解$\mathbf{F}=\mathbf{RU}$将相对运动分解为顺序的两步：第一步$d\mathbf{X}\to d\mathbf{y}$，第二步$d\mathbf{y}\to d\mathbf{x}$。