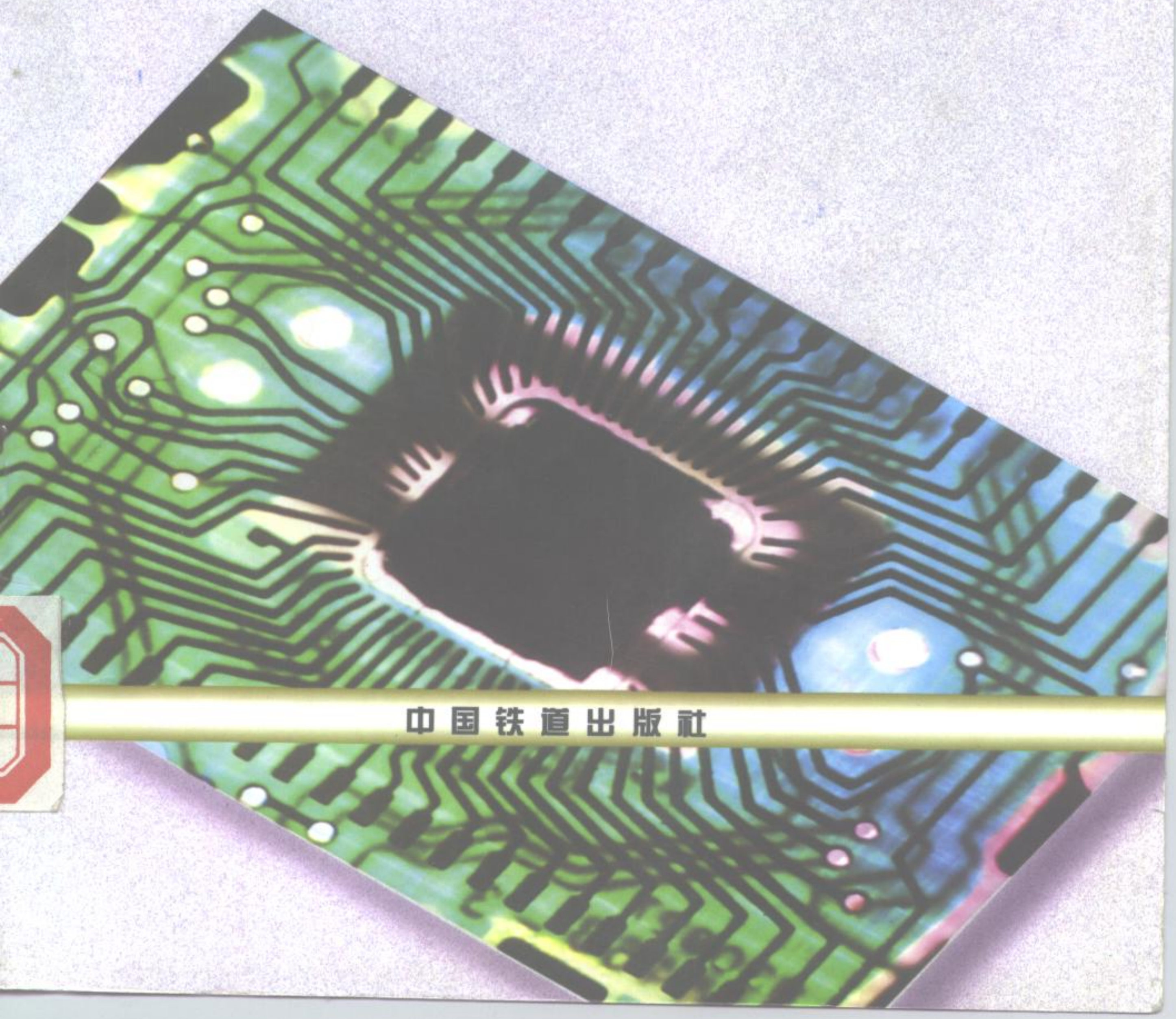
高等学校函授教材

信号与系统

北方交通大学 陈后金 李 丰 编



中国铁道出版社

高等学校函授教材

信号与系统

北方交通大学　陈后金　李丰　编

中　国　铁　道　出　版　社

1998年·北京

（京）新登字 063 号

内 容 简 介

本书是针对成人教育的特点，根据国家教委对工科电工教材的基本要求以及多年来成人教育的实践经验而编写的。全书共七章，主要内容包括：信号与系统分析导论，连续时间信号与系统的时域分析，连续时间信号与系统的频域分析、复频域分析、系统函数及系统特性，离散时间信号与系统的时域分析、z 域分析、离散时间系统的系统函数与系统特性，系统的状态空间分析等。为配合教学各章均附有小结、思考题及习题，书后附有习题答案。

本书可作为通信技术、无线电技术、自动控制技术以及计算机等专业的本专科成人教育教材，也可供从事通信工程、控制工程、信息工程以及计算机等专业的科技人员自学参考。

图书在版编目（CIP）数据

信号与系统/陈后金，李丰编.-北京：中国铁道出版社，1997.12

ISBN 7-113-02902-7

Ⅰ.信… Ⅱ.①陈… ②李… Ⅲ.信号系统-信号分析-高等教育：成人教育-教材 Ⅳ.TN911.6

中国版本图书馆 CIP 数据核字（98）第 01424 号

中国铁道出版社出版发行
（100054，北京市宣武区右安门西街 8 号）
责任编辑 武亚雯 封面设计 薛小卉
北京市兴顺印刷厂 印
1998 年 4 月 第 1 版 第 1 次印刷
开本：787×1092 1/16 印张：18.75 字数：469 千字
印数：1－4000 册

ISBN 7－113－02902－7/TN·110 定价：24.60 元

编 委 会 名 单

主 任 委 员　恽大文

副主任委员　赵金勇　关锋华

委　　　员　（按姓氏笔划为序）

王琴放　池淑清　李　丰　李明仪

张　凡　张凤翥　陈后金　周宝珀

周忠雯　蒋大明

前　言

信息技术的迅速发展和日益广泛的应用是信息时代的主要特征，信息的获取、传递、处理、识别及综合是信息技术研究的主要内容。信号是信息的载体，系统是信息处理的手段，因此以研究信号与系统理论的基本概念和基本分析方法为目的的“信号与线性系统分析”课程是通信技术、信息技术及自控技术类各专业本专科生必修的主干技术基础课之一。

本书是针对高等成人教育的特点，根据国家教委制订的对工科电工教材的基本要求，结合多年来成人教育的实践经验编写的一部适用于成人教育有关专业的教材。本教材的编写遵循两个指导思想，一方面应满足国家教委的基本需求，注重基本概念、基本理论和基本分析方法的讲解；另一方面针对成人教育以自学为主的特点，内容安排上力求做到由浅入深，循序渐进，简明易懂，以便于自学。与普通高等院校本专科教材相比，对部分内容进行了有针对性的调整和更新，具有以下三方面的特点：

(1)为了适合于学生自学，内容的编排顺序上采用先信号后系统，先时域后变换域，先连续后离散，先输入输出法后状态空间法的体系结构。这样从较为浅显的连续时间信号时域分析入手，引出连续时间系统的时域分析，进而进行频域及复频域的分析，由浅入深，内容连贯，学生可以比较容易地切入和接受。而其后的离散时间信号与系统分析部分的学习可以采用与连续时间信号与系统相比较的方法进行，理解和掌握也就较为容易了。

(2)根据教学对象的实际情况，立足于基本概念和基本原理，不贪多求深，对有些复杂的纯数学推导进行了适当的删减。同时强调物理概念和工程概念，注重阐明抽象数学理论的物理意义以及信号与系统分析方法的掌握。内容中一些纯数学的分析方法只进行简要的介绍，例如连续系统的时域分析中的经典法和算子法，而代以具有较强物理概念的方法，如卷积法及复频域分析法，后者围绕系统的时域及复频域的功能描述 $h(t)$ 和 $H(s)$ 进行，强调了系统对信号的处理功能。

(3)为了便于概念的理解，适当地增加了例题数量，通过例题的解答进一步对一些难点进行解释和阐述，同时使学生对理论的运用有所了解，也提高了学生理论解决实际问题的能力。各章的结尾均安排有小结、思考题和习题，书后附有习题答案，以方便于学生的阶段性总结和自我检查。为了使学生合理地安排学习时间和进度，书后还附有自学指导书，供自学时参考用。

本书由北方交通大学陈后金和李丰共同编写，其中陈后金编写了第一、二、三章，李丰编写了第四、五、六章，第七章由两人共同完成。全书由北方交通大学的王瑞英教授审阅，并提出了许多宝贵意见。在编写过程中还得到了北方交通大学成人教育学院有关领导和同志的支持和帮助，在此表示衷心地感谢。

限于水平，书中错误及不妥之处在所难免，诚恳地希望读者批评指正。

编　者

1997 年 10 月

目　录

第一章 信号与系统分析导论

主要内容

- 信号与系统的定义
- 信号的分类及各类信号的特性
- 系统的分类及各类系统的特性
- 信号与系统分析的主要内容及主要分析方法
- 信号与系统的相互关系

随着近代科学技术的发展，信号的形式不断增多，对信号传输与处理的要求不断更新，系统的规模和功能日益庞大与复杂，从而促使信号与系统理论的进一步完善和发展。

系统分析理论是在电路理论分析的基础上逐步发展起来的，两者有着紧密的联系，但两者的着眼点不同。电路理论分析是根据电路的结构与元件性质来求解支路的电流与电压；而系统分析则是根据系统的特性由系统的输入来求解系统的输出。

本章作为全书的开始，首先讨论信号与系统的一般定义、分类及其特性，然后对信号与系统的分析方法作扼要的叙述，以便先建立一个总体轮廓，为学习全书奠定基础。

第一节 信号的分类与特性

"信号"一词在人们的日常生活与社会活动中有着广泛的含义。究竟什么是信号，广义地说，信号是随时间变化的某种物理量。严格地说，信号是指消息的表现形式与传送载体。在通信技术中，一般将语言、文字、图像或数据等统称为消息。而将消息之中赋予人们的新知识与新概念称为信息。这就是说，消息与信息有所不同，信息是包含在消息之中的新内容，即是人们原来不知道或不确定的内容。但是，消息的传送一般都不是直接的，而必须借助于某种物理量作为运载手段。例如通过声、光、电等物理量的变化形式来表示和传送消息。这些物理量的变化就是信号。

在可以作为信号的诸多物理量中，电是应用最广的物理量。因为电比较容易产生与控制，传送速率快，也容易实现与非电量的相互转换。因此，本课程中将只讨论目前应用广泛的电信号，以下简称为信号。电信号通常是随时间变化的电压或电流。由于是随时间而变化的，在数学上可以用时间 t 的函数来表示，习惯上我们常常交替地使用"信号"与"函数"这两个名词。

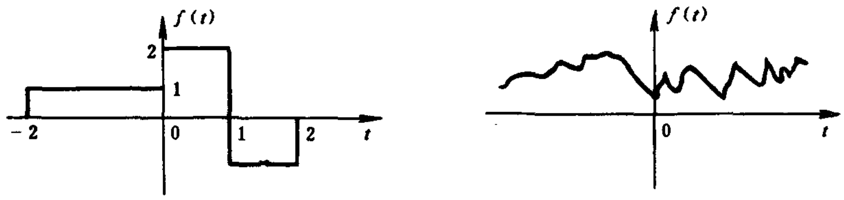
信号的分类方法很多，可以从不同的角度对信号进行分类。在信号与系统分析中，我们常以信号所具有的时间函数特性加以分类。这样，信号可以分解为确定信号与随机信号；连续时间信号与离散时间信号；周期信号与非周期信号；能量信号与功率信号等。

一、确定信号与随机信号

按照时间函数的确定性来划分，信号可分为确定信号与随机信号。

确定信号是指能够以确定的时间函数表示的信号。换句话说，确定信号在其定义域内的任意时刻都有确定的函数值。如在电路分析课程中所遇到过的正弦信号以及各种周期信号等都是确定信号。

随机信号也称为不确定信号，它不是时间的确定函数。也就是说，在其定义域内的任意时刻没有确定的函数值。随机信号无法以确定的时间函数来描述，也无法根据过去的记录准确地预测未来的情况。如雷达发射机发射的信号到达目标又反射回来，接收机收到的回波信号就有很大的随机性，属于不确定信号。因为它与目标的性质、大气条件、外界干扰等诸多因素有关，不能用确定的时间函数式表示，而只能用统计规律来描述。图 1—1(*a*)与(*b*)分别表示一个确定信号波形与随机信号波形。



(*a*)　　(*b*)

图 1—1　确定信号与随机信号波形

严格地说，确定信号是理论的抽象，实际应用中的信号几乎都具有未可预知的不确定性，因此很多信号都是随机信号。以通信传输为例，如果传送的信号都是确定信号，接受者就不能得到什么有用的信息，从而也就失去了通信传输的意义。此外，像电视中图像信号，各种噪声信号等都是随机信号。

虽然实际应用中的大部分信号是随机信号，但在一定条件下，可以将许多随机信号近似地作为确定信号来分析，从而是分析过程简化，便于实际应用。因此，一般先研究确定信号，在此基础上再根据随机信号的统计规律进一步研究随机信号的特性。本书着重讨论确定时间信号。随机信号的分析在数字信号处理等后续课程中阐述。

二、连续时间信号与离散时间信号

按照时间函数自变量的连续性划分，信号可分为连续时间信号与离散时间信号。

连续时间信号是指在信号的定义域内，任意时刻都有确定的函数值的信号。通常以 $f(t)$ 表示连续时间信号。连续时间信号最明显的特点是其定义域为连续的区间。对于连续时间信号，允许在其时间定义域上存在有限个间断点。如正弦信号为连续时间信号。

离散时间信号其时间自变量的定义域为一些离散时刻，这些离散时刻可以为均匀间隔或非均匀间隔。本课程讨论均匀间隔的离散时间信号，通常以 $f[k]$ 表示。离散时间信号最明显的特点是其定义域为离散的时刻点。如公司每月的销售利润就是离散信号。离散信号是定义在离散的时刻点上，而在这些离散的时刻点之外无定义，不要误以为在这些时刻点之外定义为零。图 1—2(*a*)、(*b*)分别表示一个连续时间信号波形与离散时间信号波形。

三、周期信号与非周期信号

按照时间函数的周期性划分，信号可以分为周期信号与非周期信号。

周期信号是每隔一个固定的时间间隔重复变化。连续周期信号与离散周期信号的数学表

示式分别为

$$f(t)=f(t+nT),\qquad n=\pm1,\pm2,\pm3,\cdots,\qquad -\infty<t<\infty \tag{1—1}$$

$$f[k]=f[k+nN],\qquad n=\pm1,\pm2,\pm3,\cdots,\qquad -\infty<k<\infty, k\text{ 取整数} \tag{1—2}$$

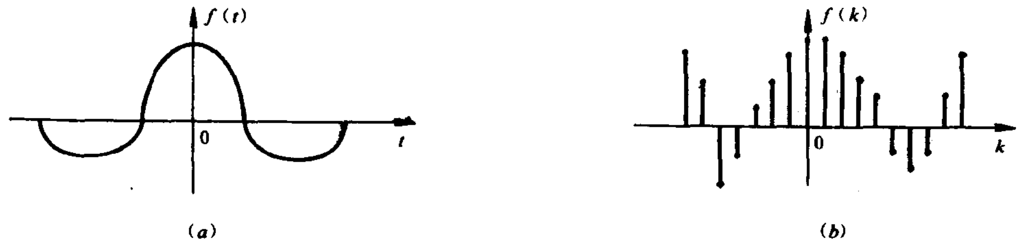


图 1—2　连续时间信号与离散时间信号波形

式中，T、N 分别称为周期信号的周期。对于周期信号，只需给出其一个周期内的变化过程，便可知道信号在任意时刻的数值。周期信号有两个基本要素：一是重复性；二是无限性。如果某信号只在定义域内有限的范围内重复，不能称为周期信号。当然，在实际工程应用中，常把在较长一段时间内重复的信号近似为周期信号来处理。

非周期信号就是不具有重复性的信号。实际中的信号一般都是非周期信号。

四、能量信号与功率信号

按照时间信号的可积性划分，信号可以分为能量信号与功率信号。

如果把信号 $f(t)$ 看作是随时间变化的电压或电流，则当信号 $f(t)$ 通过 1Ω 的电阻时，信号在时间间隔 $-T\leqslant t\leqslant T$ 内所消耗的能量称为归一化能量，即为

$$W=\lim_{T\to\infty}\int_{-T}^{T}f^2(t)\mathrm{d}t \tag{1—3}$$

而在上述时间间隔 $-T\leqslant t\leqslant T$ 内的平均功率称为归一化功率，即为

$$P=\lim_{T\to\infty}\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T}f^2(t)\mathrm{d}t \tag{1—4}$$

对于某信号 $f(t)$，若其归一化能量为非零的有限值，且其归一化功率为零，即 $0<W<\infty$，$P=0$，则此信号称为能量信号；若其归一化能量为无限值，且其归一化功率为非零的有限值，即 $W\to\infty$，$0<P<\infty$，则此信号称为功率信号。直流信号与周期信号都是功率信号。值得注意的是，一个信号 $f(t)$，不可能既是能量信号又是功率信号。但却有少数信号既不是能量信号也不是功率信号。

当然，上述定义式(1—3)、(1—4)是连续时间信号 $f(t)$的归一化能量 W 与归一化功率 P 的定义，对于离散时间信号 $f[k]$，其归一化能量 W 与归一化功率 P 的定义分别为

$$W=\lim_{N\to\infty}\sum_{-N}^{N}f^2[k] \tag{1—5}$$

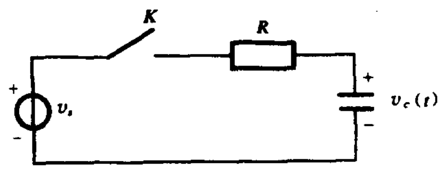
$$P=\lim_{N\to\infty}\frac{1}{2N}\sum_{-N}^{N}f^2[k] \tag{1—6}$$

以上对信号的定义及分类进行了描述，这为后面的信号分析奠定一个基础。所谓信号分析，主要就是研究各种信号的描述方法及其信号通过系统的基本特性，从而实现对信号的滤波、取样、检测、估值及其特征提取与波形设计等。

第二节 系统的分类与特性

“系统”是一个较为广义的概念。系统是指由相互作用和依赖的若干事物组成的、具有特定功能的整体。如通信系统，计算机系统，机器人等都称之为系统。在各种系统中，电系统具有特殊的重要作用。这是因为电路元件便于安装、易于测量和成本低廉，更重要的是大多数的非电系统可以用电系统来模拟或仿真。因此，我们主要分析电系统。在电子技术领域中，“系统”、“电路”、“网络”三个名词常常是通用的，尽管它们之间有一些细微的区别。

为了说明系统的基本概念，首先分析如图 1—3(a)所示的 RC 电路。图中电容 C 具有初始电压 v_0，开关在 $t=0$ 时闭合(设 $v_s>v_0$)，使电容充电。



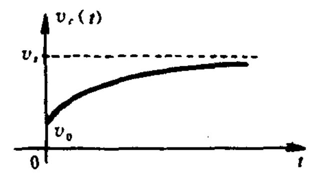


图 1—3 RC 电路与电容电压

根据电路分析的知识，若以电容电压 $v_c(t)$ 为变量，由基尔霍夫电压定律可列出电路的动态方程式为

$$RC\frac{\mathrm{d}v_c(t)}{\mathrm{d}t}+v_c(t)=v_s,\quad t>0 \tag{1—7}$$

由电容电压的初始值 $v_c(0)=v_0$，求解上述动态方程，可得到电容电压随时间变化的数学表达式为

$$v_c(t)=v_0\mathrm{e}^{-t/RC}+v_s(1-\mathrm{e}^{t/RC}),\quad t>0 \tag{1—8}$$

其波形如图 1—4(b)所示。

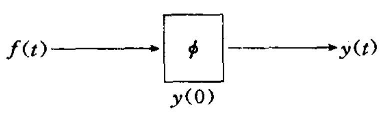


图 1—4 系统方框图

上式表明，电容电压 $v_c(t)$ 是时间 t 的函数。其变化规律与电源电压 v_s，初始电压 v_0 以及电路结构与参数 R、C 有关，该电路就是一个系统。其中电源是系统的输入，又称激励，一般以信号 $f(t)$ 表示；电容电压是系统的输出，又称响应，一般以信号 $y(t)$ 表示；电容的初始电压称为系统的初始状态，记作 $y(0)$。整个系统可以用图 1—4 所示的方框图表示。其中 ϕ 表示系统的功能作用，它取决于系统的内部结构与元件参数。系统的输出响应 $y(t)$ 是系统的初始状态 $y(0)$ 与输入激励 $f(t)$ 的函数，即

$$y(t)=\phi[y(0),f(t)],\qquad t>0 \tag{1—9}$$

从系统方框图可见，所谓系统分析，就是在已知系统的内部结构与元件参数、系统的初始状态与系统输入激励的条件下，求解系统的输出响应。因此，系统分析的过程分为两个步骤。首先由系统的结构与参数建立系统的数学模型，即系统的动态方程式；然后根据系统的输入激励与系统的初始状态求解系统的输出响应。当系统的输入激励有多个，系统的初始状态也有多个

时，系统响应 $y(t)$是这多个输入激励与多个初始状态的函数，即

$$y(t)=\phi[x_1(0),x_2(0),\cdots f_1(t),f_2(t),\cdots] \tag{1—10}$$

其中 $x_1(0),x_2(0),\cdots$为系统的初始状态。如某系统的动态方程式是一个二阶常系数微分方程式，则上式中的 $x_1(0)=y(0),x_2(0)=y'(0)$。

系统的分类方法也有许多。不同类型的系统其系统分析的过程是一样的，但系统的数学模型不同，因而其分析方法不同。在信号与系统分析中，常以系统的数学模型和基本特性分类。这样，系统可分为连续时间系统与离散时间系统；线性系统与非线性系统；时变系统与时不变系统；因果系统与非因果系统；记忆系统与即时系统等。下面分别阐述各种系统的定义与特性。为简单起见，仅讨论单输入、单输出情况，下面各种系统的定义都可直接推广到多输入、多输出情形。

一、连续时间系统与离散时间系统

如果一个系统要求其输入激励与输出响应都必须为连续时间信号，则该系统称为连续时间系统。同样，如果一个系统要求其输入激励与输出响应都必须为离散时间信号，则该系统称为离散时间系统。例如，常见的 R、L、C 组成的电路是连续时间系统，而计算机则为离散时间系统。尽管连续时间系统与离散时间系统有明确的区分，但加入某些信号的变换部件（如 A/D、D/A）后，它们则又可以相互替代。连续时间系统的数学模型是微分方程式，离散时间系统的数学模型是差分方程式。

二、线性系统与非线性系统

线性系统是指具有线性特性的系统，线性特性包括均匀特性与叠加特性。线性系统的数学模型是线性微分方程式或线性差分方程式。

系统具有均匀特性是指当系统的输入激励增加 K 倍时，系统的输出响应也相应地增加 K 倍，其中 K 为任意的常数。系统具有叠加特性是指若干个输入激励同时作用于系统时，系统的输出响应是每个输入激励单独作用时（此时其余输入激励为零）相应输出响应的叠加。因此，系统的线性特性可以表示如下：

均匀特性：

若 $$f_1(t)\longrightarrow y_1(t)$$

则 $$K\cdot f_1(t)\longrightarrow K\cdot y_1(t) \tag{1—11}$$

叠加特性：

若 $$f_1(t)\longrightarrow y_1(t),f_2(t)\longrightarrow y_2(t)$$

则 $$f_1(t)+f_2(t)\longrightarrow y_1(t)+y_2(t) \tag{1—12}$$

同时具有均匀特性与叠加特性方为线性特性，线性特性可表示为

若 $$f_1(t)\longrightarrow y_1(t),f_2(t)\longrightarrow y_2(t)$$

则 $$\alpha\cdot f_1(t)+\beta\cdot f_2(t)\longrightarrow \alpha\cdot y_1(t)+\beta\cdot y_2(t) \tag{1—13}$$

其中 α、β 为任意常数。上式如图 1—5 所示。

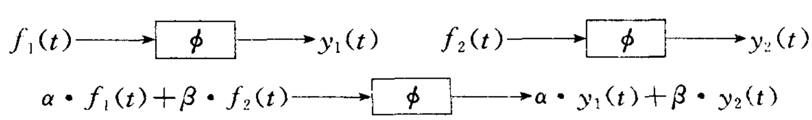


图 1—5　系统的线性特性示意图

根据系统的线性特性，可以将系统的初始状态看作是系统的一种输入激励。这样，对于一个线性系统，其输出响应必然是由外部输入激励与初始状态分别产生的输出响应之叠加。当系统的初始状态单独作用时，相应的输出响应没有外部输入信号的影响，因此称之为零输入响应，以 $y_x(t)$表示。当仅有系统的外部输入激励单独作用时，相应的输出响应没有初始状态的影响，因此称之为零状态响应，以 $y_f(t)$表示。显然，系统的零输入响应 $y_x(t)$绝对不应与 $f(t)$有关，而系统的零状态响应 $y_f(t)$也不应与初始状态有关。于是，当线性系统既存在外部输入激励同时又具有初始状态时，系统的输出响应必定是零输入响应与零状态响应的叠加。称为完全响应，以 $y(t)$表示。即有

$$y(t)=y_x(t)+y_f(t) \tag{1—14}$$

上式表明，任意线性系统的输出响应都可分解为零输入响应与零状态响应两部分之和。其中零输入响应必须对所有的初始状态呈现线性特性，零状态响应则必须对所有的输入信号呈现线性特性。只有这样，系统的完全响应对所有的初始状态和输入信号的整体呈现线性特性。因此，判断一个系统是否为线性系统，应从三个方面来判断。其一是可分解性，系统的完全响应可以分解零输入响应与零状态响应两项之和。即 $y(t)=y_x(t)+y_f(t)$。其二是零输入线性，系统的零输入响应 $y_x(t)$必须对所有的初始状态呈现线性特性。其三是零状态线性，系统的零状态响应 $y_f(t)$必须对所有的输入信号呈现线性特性。只有这三个条件都符合，该系统才为线性系统。

上述的定义表达式是指连续时间系统，同样，对于具有线性特性的离散时间系统，应有以下表达式

若 $$f_1[k]\longrightarrow y_1[k],\ f_2[k]\longrightarrow y_2[k]$$

则 $$\alpha\cdot f_1[k]+\beta\cdot f_2[k]\longrightarrow\alpha\cdot y_1[k]+\beta\cdot y_2[k] \tag{1—15}$$

式中 α、β 为任意常数。

同样，系统的完全响应可表示为

$$y[k]=y_x[k]+y_f[k] \tag{1—16}$$

凡不具备上述三个条件（即可分解性、零输入线性、零状态线性）的系统称为非线性系统。式(1—13)与(1—15)是分别判断连续时间系统与离散时间系统是否为线性系统的唯一依据。现举例说明。

【例 1—11】 判断下列输出响应所对应的系统是否为线性系统？（其中 $y(0)$为系统的初始状态，$f(t)$为系统的输入激励，$y(t)$为系统的输出响应）。

(1) $y(t)=5y(0)+4f(t)$

(2) $y(t)=2y(0)+6f^2(t)$

(3) $y(t)=4y(0)f(t)+3f(t)$

(4) $y(t)=2t^2y(0)+7\dfrac{\mathrm{d}f(t)}{\mathrm{d}t}$

(5) $y(t)=4y(0)+4t\displaystyle\int_0^t f(\tau)\mathrm{d}\tau$

(6) $y(t)=6y^2(0)+4f(t)\dfrac{\mathrm{d}f(t)}{\mathrm{d}t}$

(7) $y(t)=4y(0)+3f(t)+2\dfrac{\mathrm{d}f(t)}{\mathrm{d}t}$

(8) $y(t)=4y(0)+3y^2(0)+6f(t)+t^2\dfrac{\mathrm{d}f(t)}{\mathrm{d}t}$

【解】 判断一个系统是否为线性系统，只需根据该系统的完全响应是否满足可分解性，零输入线性，零状态线性。

(1)系统的完全响应 $y(t)$ 可以分解为零状态响应 $y_f(t)$ 与零输入响应 $y_x(t)$ 之和，且零状态响应 $y_f(t)=4f(t)$ 与零输入响应 $y_x(t)=5y(0)$ 都具有线性特性。故为线性系统。

(2)系统的完全响应 $y(t)$ 可以分解为零状态响应 $y_f(t)$ 与零输入响应 $y_x(t)$ 之和，但零状态响应 $y_f(t)=6f^2(t)$ 为非线性特性，尽管零输入响应 $y_x(t)=2y(0)$ 具有线性特性。因此，系统仍为非线性系统。

(3)系统的完全响应 $y(t)$ 无法分解为零状态响应 $y_f(t)$ 与零输入响应 $y_x(t)$ 之和，故系统为非线性系统。

(4)系统的完全响应 $y(t)$ 可以分解为零状态响应 $y_f(t)$ 与零输入响应 $y_x(t)$ 之和，零状态响应 $y_f(t)=7\dfrac{\mathrm{d}f(t)}{\mathrm{d}f}$ 具有线性特性(微分运算为线性运算，它满足均匀性与叠加性)，零输入响应 $y_x(t)=2t^2\cdot y(0)$ 也具有线性特性(注意：应以系统的初始状态 $y(0)$ 为考察对象，而不是 t，t 只是一个变系数)。故为线性系统。

(5)系统的完全响应 $y(t)$ 可以分解为零状态响应 $y_f(t)$ 与零输入响应 $y_x(t)$ 之和，零状态响应 $y_f(t)=4t\cdot\int_0^t f(\tau)\mathrm{d}\tau$ 具有线性特性(积分运算也为线性运算，它满足均匀性与叠加性)，零输入响应 $y_x(t)=4y(0)$ 也具有线性特性。故为线性系统。

(6)系统的完全响应 $y(t)$ 可以分解为零状态响应 $y_f(t)$ 与零输入响应 $y_x(t)$ 之和，零状态响应 $y_f(t)=4f(t)\dfrac{\mathrm{d}f(t)}{\mathrm{d}t}$ 不具有线性特性(尽管微分运算为线性运算，但 $4f(t)\dfrac{\mathrm{d}f(t)}{\mathrm{d}t}$ 不满足均匀性与叠加性。如 $f(t)$ 变为原来的 2 倍，即 $2f(t)$，则 $4f(t)\dfrac{\mathrm{d}f(t)}{\mathrm{d}t}$ 变为原来的 4 倍)，零输入响应 $y_x(t)=6y^2(0)$ 也不具有线性特性。故为非线性系统。

(7)系统的完全响应 $y(t)$ 可以分解为零状态响应 $y_f(t)$ 与零输入响应 $y_x(t)$ 之和，零状态响应 $y_f(t)=3f(t)+\dfrac{\mathrm{d}f(t)}{\mathrm{d}t}$ 具有线性特性，零输入响应 $y_x(t)=4y(0)$ 也具有线性特性。故为线性系统。

(8)系统的完全响应 $y(t)$ 可以分解为零状态响应 $y_f(t)$ 与零输入响应 $y_x(t)$ 之和，零状态响应 $y_f(t)=6f(t)+t^2\dfrac{\mathrm{d}f(t)}{\mathrm{d}t}$ 具有线性特性，但零输入响应 $y_x(t)=4y(0)+3y^2(0)$ 不具有线性特性。故为非线性系统。

在判断一个系统的完全响应是否满足可分解性时，不能简单地认为只要完全响应 $y(t)$ 可以表示为两项之和，就是具有可分解性(如上例(3))。也不要认为完全响应 $y(t)$ 可以表示为多项之和，就不具有可分解性(如上例(7)，例(8))。确切地说，系统具有可分解性是指系统的完全响应 $y(t)$ 可以表示为两部分之和，其中一部分只与系统的初始状态有关，而另一部分只与系统的输入激励有关。

在判断系统的零输入响应 $y_x(t)$ 是否具有线性时，应以系统的初始状态为自变量(如上述例题中 $y(0)$)，而不能以其它变量(如 t 等)作为自变量。同样，在判断系统的零状态响应 $y_f(t)$ 是否具有线性时，应以系统的输入激励为自变量(如上述例题中 $f(t)$)，而不能以其它的变量(如 t 等)作为自变量。这一点非常重要。

【例 1—2】 已知某线性系统，当其初始状态 $y(0)=2$ 时，系统的零输入响应 $y_x(t)=$

$6e^{-4t}$，$t>0$。而在初始状态 $y(0)=8$ 以及输入激励 $f(t)$ 共同作用下产生的系统完全响应 $y(t)=3e^{-4t}+5e^{-t}$，$t>0$。试求：

(1)系统的零状态响应 $y_f(t)$；

(2)系统在初始状态 $y(0)=1$ 以及输入激励为 $3f(t)$ 共同作用下产生的系统完全响应。

【解】 (1)由于已知系统在初始状态 $y(0)=2$ 时，系统的零输入响应 $y_x(t)=6e^{-4t}$，$t>0$。根据线性系统的特性，则系统在初始状态 $y(0)=8$ 时，系统的零输入响应应为 $4y_x(t)$，即为 $24e^{-4t}$，$t>0$。而且已知系统在初始状态 $y(0)=8$ 以及输入激励 $f(t)$ 共同作用下产生的系统完全响应为 $y(t)=3e^{-4t}+5e^{-t}$，$t>0$。故系统仅在输入激励 $f(t)$ 作用下产生的零状态响应 $y_f(t)$ 为

$$y_f(t)=3e^{-4t}+5e^{-t}-24e^{-4t}=5e^{-t}-21e^{-4t},\quad t>0$$

(2)同理，根据线性系统的特性，可以求得系统在初始状态 $y(0)=1$ 以及输入激励为 $3f(t)$ 共同作用下产生的系统完全响应为

$$\frac{1}{2}y_x(t)+3y_f(t)=3e^{-4t}+3(5e^{-t}-21e^{-4t})=15e^{-t}-60e^{-4t},\qquad t>0$$

【例 1—3】 已知某线性系统有两个初始状态 $x_1(0)$ 与 $x_2(0)$，已知

当 $x_1(0)=4,x_2(0)=2,f(t)=0$ 时，零输入响应 $y_{x1}(t)=6e^{-2t}+4e^{-3t}$，$t>0$；

当 $x_1(0)=2,x_2(0)=6,f(t)=0$ 时，零输入响应 $y_{x2}(t)=2e^{-2t}+8e^{-3t}$，$t>0$；

当 $x_1(0)=1,x_2(0)=2$，输入 $f(t)$ 时，完全响应 $y(t)=4e^{-2t}+2e^{-3t}+3e^{-3t}$，$t>0$；

试求：

(1)当 $x_1(0)=1,x_2(0)=0,f(t)=0$ 时，零输入响应 $y_{x3}(t)=?$

(2)当 $x_1(0)=0,x_2(0)=1,f(t)=0$ 时，零输入响应 $y_{x4}(t)=?$

(3)当 $x_1(0)=0,x_2(0)=0$，输入为 $f(t)$ 时，零状态响应 $y_f(t)=?$

(4)当 $x_1(0)=2,x_2(0)=3$，输入为 $2f(t)$ 时，完全响应 $y(t)=?$

【解】

(1)当 $x_1(0)=4,x_2(0)=2,f(t)=0$ 时，

零输入响应　　$y_{x1}(t)=6e^{-2t}+4e^{-3t}$，　　$t>0$；

当 $x_1(0)=2,x_2(0)=6,f(t)=0$ 时，

零输入响应　　$y_{x2}(t)=2e^{-2t}+8e^{-3t}$，　　$t>0$；

首先将第一组初始状态($x_1(0)=4,x_2(0)=2$)乘以 3 后，

再减去第二组初始状态($x_1(0)=2,x_2(0)=6$)，

即得初始状态 $x_1(0)=10,x_2(0)=0$，

该组初始状态($x_1(0)=10,x_2(0)=0$)除以 10，

即得初始状态 $x_1(0)=1,x_2(0)=0$。

因此，根据线性系统的特性，系统在初始状态 $x_1(0)=1,x_2(0)=0,f(t)=0$ 时，系统的零输入响应为

$$y_{x3}(t)=\frac{1}{10}[3y_{x1}(t)-y_{x2}(t)]=\frac{1}{5}[8e^{-2t}+2e^{-3t}],\qquad t>0$$

(2)首先将第二组初始状态($x_1(0)=2,x_2(0)=6$)乘以 2 后，

再减去第一组初始状态($x_1(0)=4,x_2(0)=2$)，

即得初始状态 $x_1(0)=0,x_2(0)=10$，

该组初始状态($x_1(0)=0,x_2(0)=10$)除以 10，

即得初始状态 $x_1(0)=0, x_2(0)=1$。

因此，根据线性系统的特性，系统在初始状态 $x_1(0)=0, x_2(0)=1, f(t)=0$ 时，系统的零输入响应为

$$y_{x4}(t)=\frac{1}{10}[2y_{x2}(t)-y_{x1}(t)]=\frac{1}{5}[-e^{-2t}+6e^{-3t}], \qquad t>0$$

(3)由于当 $x_1(0)=1, x_2(0)=2$，输入为 $f(t)$ 时，

完全响应 $y(t)=4e^{-2t}+2e^{-3t}+3e^{-3t}, \qquad t>0$，

而初始状态为 $x_1(0)=1, x_2(0)=2$ 时，

产生的零输入响应可以利用(1)、(2)的结果，即为 $y_{x3}(t)+2y_{x4}(t)$，

因此，当 $x_1(0)=0, x_2(0)=0$，输入为 $f(t)$ 时，

零状态响应 $y_f(t)$ 为

$$y_f(t)=y(t)-[y_{x3}(t)+2y_{x4}(t)]=\frac{1}{5}[14e^{-2t}-4e^{-3t}]+3e^{-t}, \qquad t>0$$

(4)利用(1)、(2)、(3)的结果，并根据线性系统的特性，

当 $x_1(0)=2, x_2(0)=3$，输入为 $2f(t)$ 时，系统的完全响应 $y(t)$ 为

$$y(t)=2y_{x3}(t)+3y_{x4}(t)+2y_f(t)=\frac{1}{5}[41e^{-2t}+14e^{-3t}]+6e^{-t}, \qquad t>0$$

在上述例题中，充分利用了线性系统的均匀性与叠加性，系统的线性特性是非常重要的特性，是系统分析的基础特性之一。

三、时不变系统与时变系统

一个系统，如果在零状态条件下，其输出响应与输入激励的关系不随输入激励作用于系统的时间起点而改变时，就称为时不变系统。否则，就称为时变系统。简单地说，时不变系统对输入激励的处理变换特性是不随时间的变化而变化的，即系统的特性沿时间轴是均匀的。一个时不变系统，当输入激励延时一段时间作用于系统时，其零状态响应也延时同样的一段时间，且保持输出的波形不变。系统的上述特性称为时不变特性。可表示为

若 $$f(t)\longrightarrow y_f(t)$$

则 $$f(t-t_0)\longrightarrow y_f(t-t_0)$$

式中 t_0 为任意值，如图 1—6 所示。

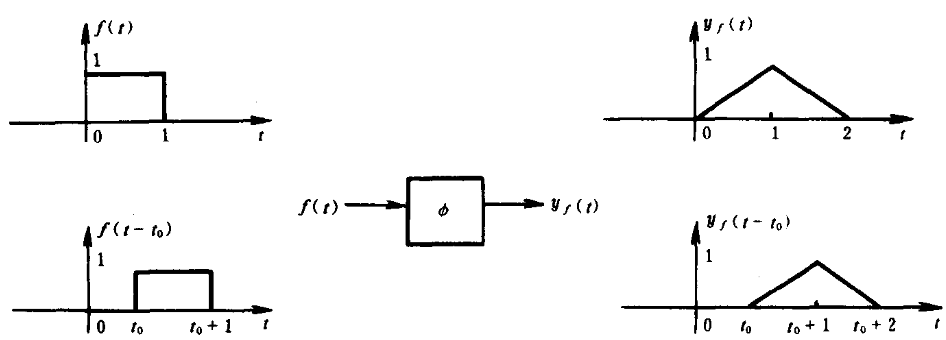


图 1—6 系统的时不变特性示意图

同样，对于时不变的离散时间系统，可以表示为

若 $$f[k]\longrightarrow y_f[k]$$

则 $$f[k-n] \longrightarrow y_f[k-n]$$
式中 n 为任意整数。

值得注意的是，系统的线性特性与时不变特性是系统两个重要的特性，它们是两个不同的概念。线性特性体现了系统的均匀性与叠加性；而时不变特性则体现了系统对于输入激励处理功能的时间无关性。这两个特性之间没有任何必然的联系。线性系统可以是时不变的，也可以是时变的。线性时不变系统可由定常系数的线性微分方程式或差分方程式描述；而线性时变系统则由时变系数的线性微分方程式或差分方程式描述。

【例 1—4】 试判断下列系统是否为时不变系统。

(1)$y(t)=\sin[f(t)]$；(2)$y(t)=\cos tf(t)$；(3)$y(t)=4f^2(t)+3f(t)$；(4)$y(t)=2tf(t)$。

【解】 判断一个系统是否为时不变系统，只需判断当输入激励 $f(t)$ 变为 $f(t-t_0)$ 时，相应的输出响应是否也由 $y(t)$ 变为 $y(t-t_0)$。由于系统的时不变特性只考虑系统的零状态响应，因此，在判断系统的时不变特性时，都不涉及系统的初始状态。

(1)当输入激励由 $f(t)$ 变为 $f(t-t_0)$，由系统的输入与输出之间的关系 $y(t)=\sin[f(t)]$ 可得相应于输入 $f(t-t_0)$ 的输出应为 $\sin[f(t-t_0)]$，恰好等于 $y(t-t_0)=\sin[f(t-t_0)]$，因此，该系统为时不变系统。

(2)当输入激励由 $f(t)$ 变为 $f(t-t_0)$，由系统输入激励与输出响应之间的函数关系 $y(t)=\cos tf(t)$，可得相应于输入 $f(t-t_0)$ 的输出应为 $\cos tf(t-t_0)$，而 $y(t-t_0)=\cos(t-t_0)\cdot f(t-t_0)$，两者不相等。因此，该系统也为时变系统。

(3)当输入激励由 $f(t)$ 变为 $f(t-t_0)$，由系统的输入激励与输出响应之间的函数关系 $y(t)=4f^2(t)+3f(t)$，可得相应于输入 $f(t-t_0)$ 的输出应为 $4f^2(t-t_0)+3f(t-t_0)$，恰好等于 $y(t-t_0)=4f^2(t-t_0)+3f(t-t_0)$，因此，该系统为时不变系统。

(4)当输入激励由 $f(t)$ 变为 $f(t-t_0)$，由系统的输入激励与输出响应之间的函数关系 $y(t)=2tf(t)$，可得相应于输入 $f(t-t_0)$ 的输出应为 $2tf(t-t_0)$，而 $y(t-t_0)=2(t-t_0)f(t-t_0)$，两者不相等。因此，该系统为时变系统。

从上分析可见，判断一个系统是否为时不变系统，其实很简单。因为当 $f(t)$ 变为 $f(t-t_0)$，根据系统的输入与输出关系，只能将输出响应中 $f(t)$ 的自变量由 t 变为 $(t-t_0)$，其它的 t 却不能改变。而将 $y(t)$ 变为 $y(t-t_0)$，却是将 $y(t)$ 中所有的 t 都变为 $(t-t_0)$。若使两者相等，必须在 $y(t)$ 中除了 $f(t)$ 含有时间变量 t 外，不出现任何含有时间 t 的函数。因此，判断一个系统是否为时不变系统时，只需观察系统响应 $y(t)$ 中除了 $f(t)$ 含有时间变量 t 外，是否还出现任何含有时间 t 的函数。若没有，说明系统参数是时不变的则为时不变系统；若有，则为时变系统。

四、因果系统与非因果系统

因果系统是指当且仅当输入信号激励系统时才产生系统输出响应的系统。这就是说，因果系统的输出响应不会出现在输入信号激励之前。更通俗地说，因果系统的输出不超前于输入。系统的这种特性称为因果特性。反之，不具有因果特性的系统称为非因果系统。

一般地说，一个常系数线性微分方程式或差分方程式描述的系统，如果当 $t<0$ 时输入信号为零，而此时的零状态响应也为零，换句话说，如果系统没有输入时，系统就没有输出，这个系统即为因果系统。如某系统的零状态响应 $y_f(t)=3f(t)$，$t>0$，因该系统的输出不超前于输入(输出 $y_f(t)$ 与输入 $f(t)$ 同时)，故为因果系统。再如某系统的零状态响应 $y_f(t)=2f(t-1)$，$t>0$，因该系统的输出也不超前于输入(输出 $y_f(t)$ 滞后输入 $f(t)$)，故也为因果系统。而若某系