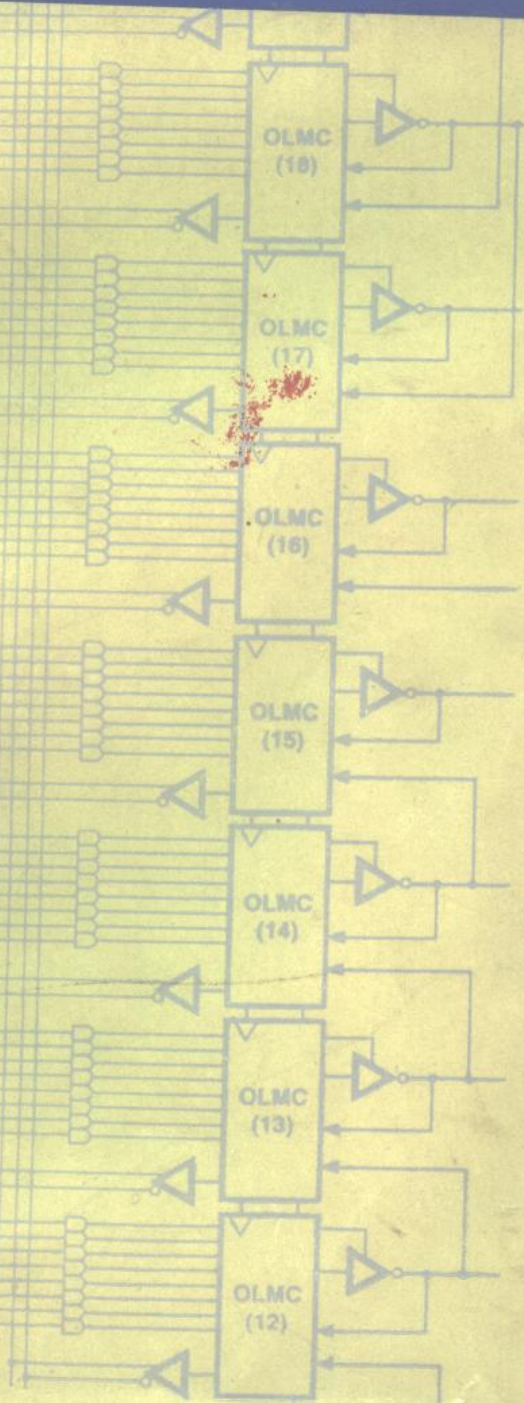


范 芸 编

# 数字逻辑设计



中国科学技术大学出版社

TP331.2

3

# 数字逻辑设计

范 芸 编  
董占球 审

中国科学技术大学出版社

1992·合肥

(皖)新登字 08 号

数字逻辑设计

范芸编

\*

中国科学技术大学出版社出版  
(安徽省合肥市金寨路 96 号, 邮政编码 230026)

中国科学技术大学印刷厂印刷  
安徽省新华书店发行

\*

开本: 787×1092/16 印张: 30.75 字数: 763 千  
1992 年 4 月第 1 版 1992 年 4 月第 1 次印刷

印数: 1—3000 册

ISBN7-312-00305-2/TP·34 定价: 7.90 元

## 内 容 简 介

本书系统介绍了数字逻辑电路的分析和设计方法——硬件逻辑方式,引入了当今数字设计的新技术——专用集成电路 ASIC。主要内容有:布尔代数;组合逻辑与时序逻辑的分析和设计;MSI 的应用;ASIC 的概念和用 ASIC 进行逻辑设计(重点是 PLD);A/D 和 D/A 转换;数字系统设计和计算机辅助逻辑设计的概念等。

本书内容充实、取材新颖、通俗易懂;举例丰富,每章后附有适量习题,可作为计算机专业或非计算机专业的教材,亦可供科技人员参考。

# 前 言

本书是以教育部制订的计算机专业“数字逻辑”课的教学大纲为基础,结合数字逻辑的新技术及发展方向编写的。

本课程是电子计算机专业的一门专业基础课。这门课的基础课是电子技术基础,它的后续课程有计算机原理和计算机体系结构。

数字技术是当前发展最快的学科之一。自1938年香农(Claude Shannon)将布尔(George Boole)代数的有关理论应用于开关电路以来,数字技术获得了飞跃的发展。数字逻辑元件已从40年代的电子管、50年代的晶体管及60年代的小规模集成电路(SSI)发展到目前的中、大规模集成电路(MSI, LSI)乃至超大规模集成电路(VLSI)。相应地,数字逻辑电路的设计方法也在不断地演变和发展,从硬件逻辑设计发展为三个分支,即硬件逻辑设计、软件逻辑设计和兼有二者优点的专用集成电路 ASIC(Application-Specific Integrated Circuit)设计,鉴于这一情况,在编写本书时,有如下考虑:

首先,由于本书是专业基础课,应将重点放在基本概念和基本方法上。尽管中、大规模集成电路已成为数字系统的主体,但小规模集成电路仍是各种类型数字电路不可缺少的一部分。同样,布尔代数基本定律、组合逻辑和时序逻辑的基本概念仍是分析和设计数字系统的基础,也是设计大规模集成芯片的基础。因此,本书前五章介绍以小规模集成电路为主的硬件逻辑设计的理论和方法。

其次,由于中规模集成电路的应用已相当普遍,本书第二章的一部分和第六章介绍一些常用的,具有代表性的 MSI 器件的原理和应用。第八章对系统级逻辑设计进行了初步的讨论。掌握了前六章和第八章的内容,即可进行简单数字装置的设计。当然,通常设计的结果不是唯一的,而最佳设计结果还要受当时具体客观条件的制约。必须紧密联系实际才能作出适合于当时、当地条件的最佳设计。

第三,近十年发展起来的专用集成电路 ASIC 设计新技术产生了数字逻辑设计的第三个分支。ASIC 本身又可划分为三类:标准单元(Standard Cell),门阵列(Gate Array)和可编程逻辑器件 PLD (Programmable Logic Device)。本书第七章专门介绍采用 ASIC 进行数字逻辑设计的原理和方法,主要介绍可编程逻辑器件 PLD,且以 PAL 和 GAL 为重点阐述;PAL(Programmable Array Logic)是70年代后期出现的可编程器件;它的速度快,具有多种输出结构,利用适当的开发工具,在系统研制和开发过程中采用 PAL 器件,有利于简化和缩短系统开发过程,减少元、器件数量,简化印制板的设计及提高系统可靠性;而通用阵列逻辑 GAL (Generic Array Logic)是在 PAL 的基础上于80年代中期发展起来的 PLD 器件。它除了具有 PAL 的所有优点外,还有更为灵活的可编程 I/O 结构,并采用了先进的 E<sup>2</sup>CMOS 工艺在数秒钟内即可完成芯片的擦除和编程,并可反复改写。它以最优的性能和 100% 的成品率成为最有竞争力的 ASIC 产品。另外,本章还对大规模集成电路门阵列和标准单元电路的结构,开发过程也作了简单介绍。在第七章的最后两节,简要介绍了代表未来发展方向的硅编译技术和智能编译技术。

为使读者在实际工作中能正确选用 A/D 及 D/A 集成芯片,在第九章讨论了数字系统与模拟系统之间的桥梁 A/D 和 D/A 转换器的基本原理。

最后一章介绍了计算机辅助设计逻辑电路的基本概念和方法,以便使读者对数字逻辑设计的这一新手段有初步的了解.

对于数字逻辑设计的第二个分枝——软件逻辑设计,它是由硬件支持下的程序设计来实现的.要讲清这个问题需要计算机的整机概念,本书不作介绍.读者可通过微机原理课而深入了解.

编写本书的另一指导思想是尽可能保持数字逻辑设计在内容上的完整性和先进性.因此,本书的讲授任务大致需 110 学时左右(超过了讲授一学期 80 学时的时间),在教学时数不足时,目录中打有“\*”的可作选修内容.

为使读者既熟悉国内常用逻辑图符号(四机部部颁标准 SJ1223-77),又熟悉国外常用逻辑图符号(MIL-STD-806 标准),本书中,两种逻辑图符号交叉使用.

本书承中国科学技术大学北京研究生院董占球教授审阅和修改,并对本书的编写提出了许多宝贵意见,在此表示衷心感谢.

本书是编者在近十年来讲授“数字逻辑设计”课的基础上编写而成的,限于编者水平,书中难免有不妥之处,敬请读者批评指正.

编 者

1990.8 于合肥

# 目 录

<b>第一章 布尔代数</b> .....	(1)
§ 1.1 布尔代数的基本概念 .....	(1)
一、集合论概念 .....	(1)
二、布尔代数定义 .....	(3)
三、布尔函数 .....	(4)
四、布尔代数的基本定理 .....	(4)
五、布尔代数的三规则 .....	(7)
§ 1.2 逻辑函数的性质 .....	(9)
一、逻辑函数的表示方法 .....	(9)
二、完备集 .....	(10)
三、布尔函数的标准式 .....	(12)
§ 1.3 完全定义的布尔函数和不完全定义的布尔函数 .....	(18)
§ 1.4 布尔函数与开关电路 .....	(19)
一、简单门电路 .....	(19)
二、复合门电路 .....	(21)
§ 1.5 布尔函数的化简 .....	(25)
一、代数化简法 .....	(26)
二、图解化简法(卡诺图化简) .....	(32)
三、奎恩-麦克拉斯基法 .....	(45)
四、多输出函数的逻辑化简 .....	(49)
本章习题 .....	
<b>第二章 组合逻辑电路</b> .....	(57)
§ 2.1 正逻辑与负逻辑 .....	(57)
一、正负逻辑的基本概念 .....	(58)
二、门电路的两种逻辑符号 .....	(58)
三、混合逻辑的变换定理 .....	(59)
§ 2.2 组合逻辑电路的分析 .....	(61)
一、一般分析方法 .....	(62)
二、利用混合逻辑变换定理分析 .....	(63)
三、与非门电路的简化分析法 .....	(64)
四、带有非号的门电路简化分析法 .....	(66)
§ 2.3 组合逻辑电路一般设计方法 .....	(67)
一、逻辑问题的描述 .....	(67)
二、二进制加法器的设计 .....	(68)

三、代码转换电路的设计 .....	(74)
四、十进制运算电路的逻辑设计 .....	(83)
§ 2.4 几种常用 MSI 组合器件及其应用 .....	(87)
一、译码器 .....	(88)
二、数据分配器 .....	(92)
三、多路选择器 .....	(93)
四、四位全加器 .....	(96)
五、数字比较器 .....	(99)
六、奇偶校验发生器/校验器 .....	(101)
§ 2.5 一般组合逻辑电路中存在的实际问题 .....	(105)
一、竞争现象 .....	(106)
二、险象 .....	(106)
三、险象的判别 .....	(108)
四、险象的消除 .....	(109)
§ 2.6 线逻辑及总线结构 .....	(112)
一、门的并联应用——线逻辑 .....	(112)
二、集电极开路门和三态门 .....	(113)
三、总线结构 .....	(114)

#### 本章习题

<b>第三章 时序机</b> .....	(120)
§ 3.1 概述 .....	(120)
§ 3.2 时序机基本模型 .....	(121)
§ 3.3 密利机和莫尔机的转换 .....	(125)
一、莫尔机转换成密利机 .....	(125)
二、密利机转换成莫尔机 .....	(126)
§ 3.4 触发器——二状态时序机 .....	(127)
一、基本 $S-R$ 触发器 .....	(128)
二、时钟 $S-R$ 触发器 .....	(130)
三、主从 $J-K$ 触发器 .....	(132)
四、 $T$ 触发器 .....	(134)
五、 $D$ 触发器 .....	(135)
§ 3.5 触发器类型的相互演化 .....	(138)
一、将 $D$ 触发器转换成其它类型触发器 .....	(138)
二、将 $J-K$ 触发器转换成其它类型触发器 .....	(138)
三、将 $S-R$ 触发器转换成其它类型触发器 .....	(139)

#### 本章习题

<b>第四章 同步时序电路</b> .....	(144)
§ 4.1 同步时序电路的分析 .....	(144)
§ 4.2 同步时序电路的设计 .....	(148)



一、建立原始状态表(或原始状态图).....	(149)
二、状态化简.....	(151)
1. 完全给定同步时序电路的化简.....	(152)
2. 非完全给定同步时序电路的化简.....	(155)
三、状态分配.....	(158)
四、状态函数的化简.....	(161)
1. 给定触发器后状态函数的化简.....	(161)
2. 触发器的选择—动态卡诺图.....	(163)
五、输出函数的化简.....	(169)
六、设计举例.....	(169)
<b>本章习题</b>	
<b>第五章 异步时序电路</b> .....	(179)
§ 5.1 脉冲异步时序电路的分析和设计.....	(179)
一、脉冲异步时序电路的分析.....	(179)
二、脉冲异步时序电路的设计.....	(180)
§ 5.2 电平异步时序电路基本概念.....	(183)
§ 5.3 电平异步时序电路的分析.....	(185)
§ 5.4 电平异步时序电路的设计.....	(188)
一、建立原始流程表.....	(188)
二、状态化简,建立最简流程表.....	(191)
三、状态分配,建立无临界竞争编码流程表.....	(192)
1. 电平异步时序电路所特有的竞争现象.....	(192)
2. 消除临界竞争的状态分配.....	(193)
四、设计无组合险象的组合逻辑电路.....	(198)
五、工程设计—避免时序险象.....	(200)
1. 时序险象的产生.....	(200)
2. 时序险象的判断和消除.....	(201)
六、设计举例.....	(202)
<b>本章习题</b>	
<b>第六章 常用时序逻辑电路</b> .....	(212)
§ 6.1 寄存器.....	(212)
一、并行寄存器.....	(212)
二、移位寄存器.....	(213)
§ 6.2 计数器.....	(216)
一、同步计数器.....	(216)
1. 二进制同步计数器.....	(216)
2. 十进制同步计数器.....	(216)
3. 其它功能的同步计数器.....	(216)
* 4. 任意进制同步计数器快速设计法.....	(218)
5. 非二进制码同步计数器.....	(221)

二、异步计数器	(221)
1. 行波计数器的设计	(222)
* 2. 任意进制异步计数器快速设计法	(228)
三、中规模集成电路计数器及其应用	(230)
§ 6.3 节拍分配器和脉冲分配器	(233)
一、计数型节拍分配器	(234)
二、脉冲分配器	(235)
三、移位型节拍分配器	(235)
* § 6.4 伪随机序列发生器	(237)
一、伪随机序列	(238)
二、线性移位寄存器序列	(238)
三、M 序列	(240)
本章习题	
第七章 用 ASIC 设计数字逻辑电路	(248)
§ 7.1 ASIC 概述	(249)
一、ASIC 的由来	(249)
二、ASIC 的分类	(249)
三、ASIC 的选择	(250)
§ 7.2 可编程逻辑器件 PLD	(251)
一、只读存储器 ROM	(253)
1. 可编程只读存储器 PROM	(255)
2. 可改写只读存储器 EPROM	(256)
3. PROM 的扩展	(257)
4. 用 PROM 实现组合逻辑电路设计	(258)
二、可编程逻辑阵列 PLA	(262)
1. 组合型 PLA	(262)
2. 时序 PLA	(263)
三、可编程阵列逻辑 PAL	(266)
1. PAL 器件系列	(267)
2. 怎样设计可编程逻辑	(269)
3. 软件支持	(280)
4. 硬件工具	(283)
5. 设计举例	(283)
四、通用阵列逻辑 GAL	(294)
1. GAL 器件概述	(294)
2. GAL 器件分类	(295)
3. GAL 器件的结构	(295)
4. FGMOS 晶体管编程原理	(308)
5. GALLAB 开发工具	(310)

6. 设计举例 .....	(312)
* § 7.3 门阵列 .....	(324)
一、门阵列特点 .....	(324)
二、门阵列的基本概念 .....	(324)
三、门阵列的结构和布线方法 .....	(324)
四、门阵列分类 .....	(325)
五、门阵列的开发过程与接口形式 .....	(327)
六、门阵列的设计 .....	(328)
七、目前的门阵列研究状况 .....	(329)
* § 7.4 标准单元电路 .....	(330)
一、标准单元电路的结构 .....	(330)
二、标准单元电路的特点 .....	(331)
三、标准单元电路的开发过程 .....	(331)
* § 7.5 硅编译技术和智能编译 .....	(332)
一、硅编译技术的概念 .....	(332)
二、硅编译技术的分类 .....	(333)
三、智能编译 .....	(334)
* § 7.6 ASIC 的经济评估和验证 .....	(334)
一、经济性评估 .....	(334)
1. 成本评估 .....	(335)
2. 研制周期评估 .....	(335)
二、ASIC 的验证 .....	(336)
1. 验证设计的正确性 .....	(336)
2. 可测试性与自测功能 .....	(337)
3. 验证 ASIC 芯片的正确性 .....	(337)
<b>本章习题</b>	
<b>第八章 数字系统的设计方法</b> .....	(340)
§ 8.1 数字系统概述 .....	(340)
§ 8.2 数字系统设计的工具 .....	(341)
一、阵维卡诺图 .....	(342)
二、时序流程图 .....	(345)
三、MDS 图 .....	(350)
§ 8.3 数字系统设计方法 .....	(353)
一、确定系统的逻辑功能 .....	(353)
二、确定系统方案及逻辑划分 .....	(354)
三、异步信号输入和系统控制器设计 .....	(357)
四、微程序控制器的设计 .....	(365)
1. 用 ROM 实现直接寻址的微程序控制器 .....	(365)
2. 单测试、双地址微程序设计 .....	(370)
3. 单测试,单地址微程序设计 .....	(372)

本章习题

<b>* 第九章 数模和模数转换电路</b> .....	(381)
§ 9.1 数模转换电路 .....	(381)
一、数模转换的基本原理.....	(381)
二、权电阻 D/A 转换电路 .....	(383)
三、T 型电阻 D/A 转换电路 .....	(384)
四、BCD 码 D/A 转换器 .....	(388)
五、双极型 D/A 转换 .....	(389)
六、D/A 转换器的性能 .....	(391)
§ 9.2 模数转换电路 .....	(394)
一、模数转换的基本原理.....	(394)
二、几个基本概念.....	(395)
三、几种常用的 A/D 转换 .....	(397)
1. 平行 A/D 转换器 .....	(397)
2. 并/串型 A/D 转换电路 .....	(398)
3. 逐次比较 A/D 转换电路 .....	(399)
4. 积分型 A/D 转换 .....	(402)
四、应用举例.....	(405)

本章习题

<b>* 第十章 数字系统计算机辅助设计初论</b> .....	(412)
§ 10.1 数字系统计算机辅助设计概述 .....	(412)
一、数字系统计算机辅助设计的产生和发展.....	(412)
二、总体设计阶段.....	(413)
1. 描述语言的选取 .....	(413)
2. 模型的构成 .....	(414)
三、逻辑设计自动化.....	(414)
1. 逻辑设计语言(硬件描述语言) .....	(414)
2. 逻辑综合 .....	(415)
3. 逻辑模拟 .....	(415)
4. 逻辑图的自动绘制 .....	(416)
四、工程实现阶段的设计自动化.....	(416)
五、计算机辅助系统.....	(416)
六、CAD 的发展方向 .....	(417)
§ 10.2 寄存器传输语言.....	(418)
一、概述.....	(418)
二、AHPL 的符号定义和语法规则 .....	(418)
1. 标识符 .....	(418)
2. 向量 .....	(419)
3. 矩阵 .....	(419)

三、基本语句.....	(419)
四、设计举例.....	(424)
§ 10.3 自动逻辑综合.....	(427)
一、多维体及其基本运算.....	(427)
1. 逻辑函数的多维体表示法.....	(427)
2. 多维体的基本运算.....	(429)
二、用计算机实现多维体运算.....	(434)
1. 交集运算的实现.....	(435)
2. 蕴涵运算的实现.....	(436)
3. 星积运算的实现.....	(436)
4. 锐积运算的实现.....	(437)
三、函数的质蕴涵及最小覆盖.....	(440)
1. 质蕴涵项的计算.....	(440)
2. 用相容运算求质蕴涵.....	(441)
3. 求最小覆盖的算法.....	(444)
§ 10.4 逻辑模拟.....	(447)
一、结构描述语言.....	(447)
二、逻辑模型.....	(449)
1. 编译模型.....	(449)
2. 表驱动模型.....	(450)
三、多值模拟.....	(453)
四、门级逻辑模拟程序 MLM111.....	(455)
1. 模拟语言.....	(455)
2. 模拟程序的举例.....	(459)
<b>本章习题</b>	
<b>附录 TTL 集成电路外特性.....</b>	<b>(466)</b>
<b>参考文献.....</b>	<b>(478)</b>

# 第一章 布尔代数

布尔代数是英国的乔治·布尔(George Boole 1815—1864)在十八世纪中叶首先提出来的. 他用数学方法研究人的逻辑思维规律和推理过程的代数, 这就是现在所说的布尔代数. 他在其著作《逻辑的数学的分析》(1847年)和《思维规律》(1854年)中, 首先提出了这种代数的基本概念和性质. 此后于1938年克劳德·香农(Claude E. Shannon)运用布尔代数分析开关电路问题时, 发现任何继电器触点组成的开关电路, 都能用布尔代数来进行描述和设计. 这给布尔代数找到了一个极其广阔的用武之地, 并加速了计算机时代的到来. 因此, 布尔代数又有开关代数之称. 现在布尔代数在数字电路和数字计算机的设计中被广泛应用, 成为开关理论和逻辑设计的数学基础.

本章先介绍布尔代数基本概念和运算规律及布尔函数的两种标准表达式, 然后讨论布尔函数与开关电路的关系, 最后介绍几种布尔函数常用的化简方法.

## § 1.1 布尔代数的基本概念

布尔代数研究的是具有特定条件下的集合. 因此我们先简单介绍一下集合论的概念, 它能帮助我们进一步理解布尔代数.

### 一、集合论概念

#### 1. 集合

凡是具有某些特殊性质的离散的个体聚合在一起统一考虑叫集合. 简单地说集合是一些对象的总体. 总体中的每一个对象称之为集合的元素或成员. 给定任一对象  $x$  以及集合  $S$ , 如果  $x$  是集合  $S$  中的一个元素, 我们将写成  $x \in S$ .

例如: “全体中国公民”, 是个集合, 集合中的元素是有限的.

“大于、等于 3 的整数”是个集合, 这个集合虽是无限的, 但是容易判断的.

“一副棋子”是个有限集合.

集合是以它的元素来表征的, 一个有限集合可用列出它的元素的办法来说明, 这些元素用括号括起来, 且元素间用逗号分开. 一般集合用大写字母表示, 集合元素用小写字母表示. 当  $A$  是有限集合时, 用  $|A|$  表示集合中元素的个数.

例如,  $A = \{a, b, c\}$   $a, b, c$  是集合  $A$  的元素. 且  $|A| = 3$

$B = \{0, 2, 4, 6, 8, 10\}$   $B$  是小于 12 的正偶数集合 且  $|B| = 6$

这种表示法称为列举法. 但有的集合元素无法一一列举.

例如, ①全体偶数的集合:

$\{x | \text{存在整数 } y, x = 2y\}$

②自然数的集合:

$\{x | x \text{ 是自然数}\}$

③大于 10 的整数集合:

$\{x|x \text{ 为整数, 且 } x > 10\}$

这种集合表示法叫定义法.

没有元素的集合叫做空集, 用  $\phi$  表示.

### 集合的相等

给定两个集合  $A$  和  $B$ , 如果集合  $A$  中的每个元素都是集合  $B$  中的元素, 反过来集合  $B$  的每个元素也都是集合  $A$  中的元素, 那么称集合  $A$  与集合  $B$  相等. 记为  $A=B$ .

### 集合的包含

设  $A, B$  是两个集合, 如果集合  $A$  中的每个元素都是集合  $B$  中的元素, 我们称集合  $B$  包含集合  $A$ , 而集合  $A$  叫做集合  $B$  中的一个子集. 表示成  $B \supseteq A$  或  $A \subseteq B$ .

### 幂集

族集合: 设  $A, B, C, \dots$  是一些集合, 把它们放在一起构成一新的集合  $w = \{A, B, C, \dots\}$ . 这种以集合为元素的集合称为族集合.

由一个集合的全部子集构成的族集称为该集合的幂集. 若  $A = \{a, b, c\}$ , 则  $A$  的幂集  $\mathcal{P}(A)$  是有 8 个元素的族集:

$$\mathcal{P}(A) = \{\phi, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a, b\}, \{a, c\}, \{b, c\}, \{a, b, c\}\}$$

因此, 如果一个有限集合  $A$  有  $n$  个元素, 则其幂集合  $\mathcal{P}(A)$  共有  $2^n$  个元素.

如果一个集合包含了所要讨论的每一个集合, 则该集合称之为万有集合或叫全集, 记为  $E$ . 对于任意集合  $A$  均有  $A \subseteq E$ .

可以用图解法研究全集的各子集间的关系, 这种图叫文氏图或维恩图. 图 1-1 是用文氏图表示的全集、空集、集合  $A$  和  $A \subseteq B$ .

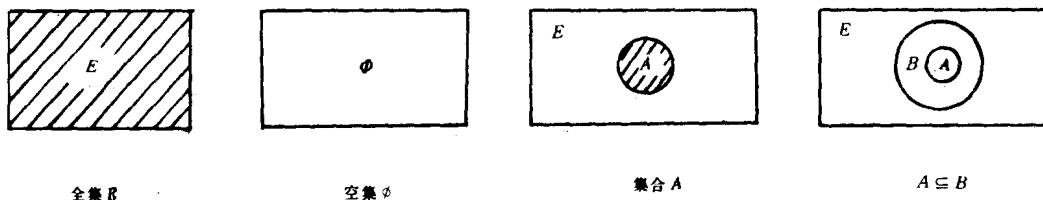


图 1-1 文氏图

## 2. 集合运算

集合有并、交、补三种基本运算.

定义 设  $A, B$  是两个集合:

1)  $A$  和  $B$  的并集  $A \cup B$  是由那些或属于  $A$ , 或属于  $B$ , 或同时属于二者的所有元素构成的集合. 并可规定成:

$$A \cup B = \{x | (x \in A) \cup (x \in B)\}$$

例 设  $A = \{a, b, c\}, B = \{b, c, d\}$

$$A \cup B = \{a, b, c\} \cup \{b, c, d\} = \{a, b, c, d\}$$

2) 任何两个集合  $A$  和  $B$  的交集  $A \cap B$ , 是由集合  $A$  和集合  $B$  所共有的全部元素构成的集合. 规定为:

$$A \cap B = \{x | (x \in A) \cap (x \in B)\}$$

例 设  $A = \{a, b, c\}, B = \{b, c, d\}$

$$A \cap B = \{a, b, c\} \cap \{b, c, d\} = \{b, c\}$$

3)  $B$  对  $A$  的相对补集  $A-B$ , 是由属于集合  $A$  的但不属于集合  $B$  的所有元素构成的集合. 并规定为:

$$A-B = \{x | (x \in A) \cap (x \notin B)\}$$

例 设集合  $A = \{0, 1, 2\}, B = \{1, 2, 3\}$

$$A-B = \{0\}$$

$$B-A = \{3\}$$

4) 给定全集  $E$ . 对于任何集合  $A$  来说,  $A$  对  $E$  的相对补集, 称为  $A$  的绝对补集, 简称为  $A$  的补集, 记作  $\bar{A}$ . 规定为:

$$\bar{A} = E - A = \{x | (x \in E) \cap (x \notin A)\} = \{x | x \notin A\}$$

图 1-2 是各种运算的文氏图.

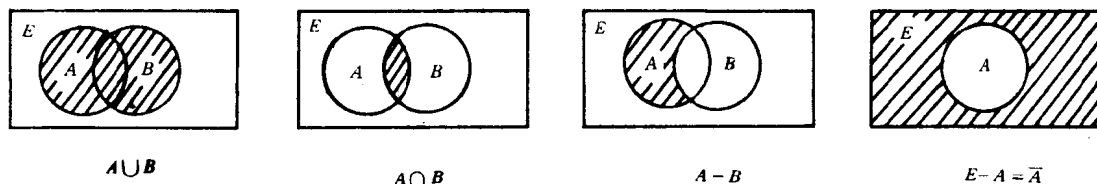


图 1-2 各种运算的文氏图

### 3. 映射的基本概念

设  $A$  和  $B$  是任意两个集合, 如果有一确定的规律或法则  $f$ , 它把集合  $A$  中的每个元素  $a$  对应成集合  $B$  的唯一确定的元素  $b$ , 我们称这个规律或法则  $f$  为从  $A$  集合到  $B$  集合中的映射. 表示成  $f: A \rightarrow B$ .

如果  $A$  和  $B$  都是通常的数集合, 那么从集合  $A$  到集合  $B$  的映射就是普通的函数, 由此, 映射的概念是函数概念的扩展.

设  $f: A \rightarrow A$ , 对  $A$  中任意元素  $a$ , 使  $f(a) = a$ , 则称  $f$  是  $A$  上的恒同映射.

## 二、布尔代数定义

布尔代数是一代数  $(B; \cdot, +, -; 0, 1)$ , 它由布尔变量有限集合  $B$  ( $B$  至少包含  $0, 1$  两个元素) 和三种操作 (与  $\cdot$ , 或  $+$ , 非  $-$ ) 组成, 而且对  $B$  中任何元素  $x, y$  和  $z$ , 它们的积  $x \cdot y$ , 和  $x + y$  及非  $\bar{x}$  都仍在  $B$  内. 即:

$$B = \{B, x + y, x \cdot y, \bar{x} | x, y \in B\}$$

下面举两个布尔代数简单例子:

例 1 二元布尔代数  $B_2 = (\{0, 1\}; \cdot, +, -; 0, 1)$ , 其三个操作的定义如下:

$\cdot$	0	1
0	0	0
1	0	1

$+$	0	1
0	0	1
1	1	1

$-$	
0	1
1	0



例2 四元布尔代数  $B_4(\{0, a, b, 1\}; \cdot, +, -; 0, 1)$ , 其三个操作定义如下:

·	0	a	b	1
0	0	0	0	0
a	0	a	0	a
b	0	0	b	b
1	0	a	b	1

+	0	a	b	1
0	0	a	b	1
a	a	a	1	1
b	b	1	b	1
1	1	1	1	1

-	
0	1
a	b
b	a
1	0

这里要着重指出的是, 当  $B = \{0, 1\}$  时, 我们将上述布尔代数称为二值布尔代数, 如例1. 它是分析和设计数字系统中的开关电路的数学基础, 因此又称为开关代数. 另外, 在逻辑命题中, 只有真、假两种可能, 而真和假的值可用1和0来代表. 所以, 二值布尔代数也称为逻辑代数. 本章着重讨论二值布尔代数.

### 三、布尔函数

在布尔代数  $B$  中的一个元素我们称为  $B$  上的一个常量, 而把能表示  $B$  中任一元素的一个符号称为  $B$  上的一个布尔变量. 于是一个布尔代数的布尔函数定义如下:

设  $x_1, x_2, \dots, x_n$  是布尔代数  $B$  上的一组变量, 如果  $f$  能按下述规则建立, 即  $B$  向其自身映射的结果, 则该映射  $f$  是一个  $n$  个变量的布尔函数, 表示为  $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ .

1. 设  $a$  表示  $B$  上的一个常量,  $f(x_1, x_2, \dots, x_n) = a$ , 及  $f(x_1, x_2, \dots, x_n) = x_i$  是布尔函数, 前者称为常量函数, 后者称为投影函数.

2. 如果  $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$  是布尔函数, 则  $\overline{f(x_1, x_2, \dots, x_n)}$  也是布尔函数.

3. 如果  $f_1(x_1, x_2, \dots, x_n)$  及  $f_2(x_1, x_2, \dots, x_n)$  是布尔函数, 则  $f_1(x_1, x_2, \dots, x_n) + f_2(x_1, x_2, \dots, x_n)$  及  $f_1(x_1, x_2, \dots, x_n) \cdot f_2(x_1, x_2, \dots, x_n)$  也是布尔函数.

4. 通过有限次运用上述规则所构造出来的任一函数是布尔函数, 且仅仅这样的函数才是布尔函数.

因此, 任一布尔函数都是由常量函数和投影函数通过有限次使用“·”、“+”和“-”运算所构造出来的函数, 对于一个变量的函数, 其投影函数就是恒等函数  $f(x) = x$ .

当  $B = \{0, 1\}$  时的布尔函数又称为开关函数或逻辑函数.

如同书写普通代数一样, 我们在书写布尔函数时, 可以省略“·”号以及不必要的括号.

例如下列布尔函数:

$$f_1(x_1, x_2) = [x_1 + (\bar{x}_1 \cdot x_2)] \cdot \bar{x}_2$$

可简写成:

$$f_1(x_1, x_2) = (x_1 + \bar{x}_1 x_2) \bar{x}_2$$

该函数等同于:

$$f_1(x_1, x_2) = (x_1 + \bar{x}_1 x_2) \bar{x}_2 = x_1 \bar{x}_2 + \bar{x}_1 x_2 \bar{x}_2 = x_1 \bar{x}_2$$

### 四、布尔代数的基本定理

1. 布尔代数公理(亨廷顿公理)

在布尔代数中, 有几种不同的公理系统, 而美国数学家亨廷顿(Huntington T. V.: 1874 -