

计算地球物理丛书之二

# 小波变换和 反演数学基础

李世雄 刘家琦 编著

地质出版社

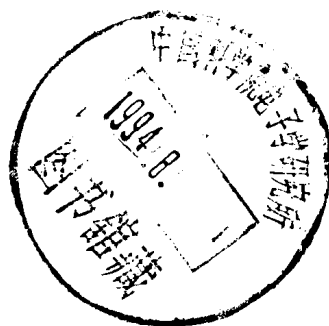


H-8  
251

计算地球物理丛书之二

# 小波变换和反演数学基础

李世雄 刘家琦 编著



地质出版社

9410152

(京)新登字 085 号

Handwritten scribbles and numbers, possibly a library or collection mark.

计算地球物理丛书之二  
**小波变换和反演数学基础**  
李世雄 刘家琦 编著

\*  
责任编辑：陈军中

地质出版社出版  
(北京和平里)

北京地质印刷厂印刷  
(北京海淀区学院路29号)  
新华书店总店科技发行所发行

\*  
开本：787×1092<sup>1</sup>/<sub>16</sub> 印张：11 字数：260000  
1994年5月北京第一版·1994年5月北京第一次印刷  
印数：1—2000册 定价：9.40元  
ISBN 7-116-01567-1/P·1265

# 目 录

## 第一篇 小波理论及其应用

前 言	( 3 )
第一章 预备知识	( 5 )
第二章 小波变换的定义与基本性质	( 10 )
§ 2.1 从 Fourier 变换到 Gabor 变换	( 10 )
§ 2.2 小波 (Wavelet) 变换的定义与基本性质	( 11 )
§ 2.3 窗口宽度与 Heisenberg 测不准原理	( 13 )
第三章 正交小波基	( 15 )
§ 3.1 引言	( 15 )
§ 3.2 Haar 小波基与 Shannon 小波基	( 15 )
§ 3.3 构造正交小波基的多尺度分析方法	( 18 )
§ 3.4 构造正交小波基的 A. W. W. 方法及其改进	( 27 )
§ 3.5 两维正交小波基	( 32 )
第四章 紧支集正交小波基	( 34 )
§ 4.1 有限长度双尺度方程	( 34 )
§ 4.2 紧支集正交小波基的构造方法	( 36 )
第五章 小波标架	( 44 )
§ 5.1 Hilbert 空间的标架理论 <sup>[12][26]</sup>	( 44 )
§ 5.2 小波标架	( 47 )
第六章 小波基与线性算子的近似对角化	( 50 )
§ 6.1 引言	( 50 )
§ 6.2 函数与算子按照 Haar 基展开的算法	( 51 )
§ 6.3 具有消失矩的小波基及其积分法	( 54 )
§ 6.4 快速小波变换 (FWT)	( 55 )
§ 6.5 线性积分算子的化简	( 56 )
§ 6.6 一种快速算法	( 58 )
§ 6.7 离散化的 Calderon-Zygmund 算子的一致估计	( 59 )
§ 6.8 算法描述	( 62 )
§ 6.9 微分算子、卷积算子在紧支集小波基下的矩阵元素的具体计算 <sup>[8]</sup>	( 62 )
第七章 小波基与取样定理 <sup>[2]</sup>	( 75 )
§ 7.1 引言	( 75 )
§ 7.2 小波基与取样定理	( 76 )
§ 7.3 利用小波基构造取样定理的例子	( 78 )
§ 7.4 Radon 变换的反演与小波取样定理	( 80 )

<b>第八章 小波变换与图像数据压缩</b> .....	(82)
§ 8.1 Mallat 的小波变换极大模算法 <sup>[19]</sup> .....	(82)
§ 8.2 正交变换、小波包 (Wavelet Packets) 与图像数据压缩.....	(91)
<b>第九章 奇性分析与小波</b> .....	(99)
§ 9.1 小波与函数的奇性 .....	(99)
§ 9.2 小波与微局部分析 .....	(104)
§ 9.3 小波与波动方程的奇性传播和反演 .....	(108)
参考文献.....	(119)

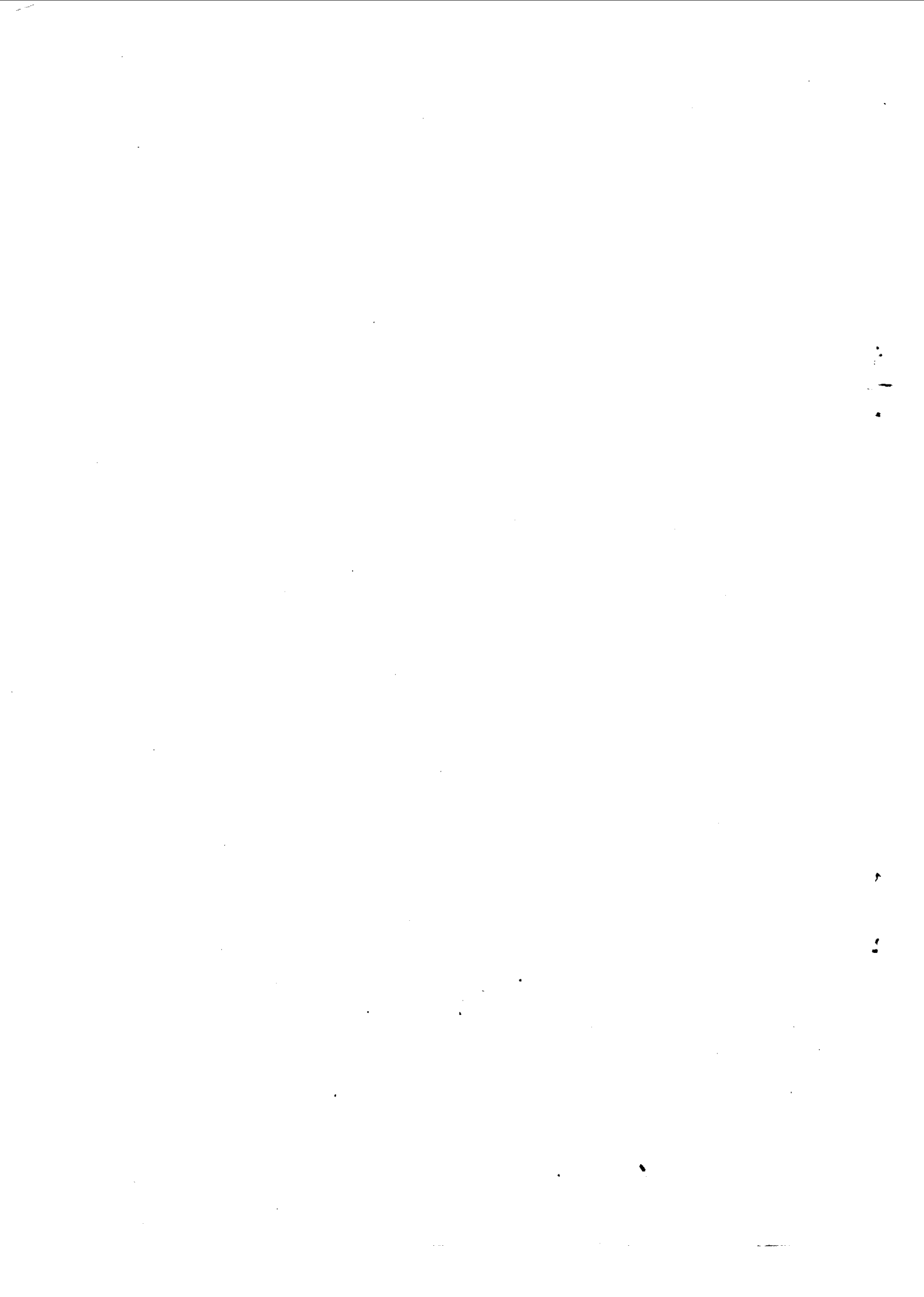
## 第二篇 微分方程反演的数学原理与方法

<b>第一章 反演(反问题)的几个基本概念</b> .....	(123)
§ 1.1 什么是微分方程反问题 .....	(123)
§ 1.2 反问题的数学结构及其分类 .....	(131)
§ 1.3 反问题与不适定性 .....	(132)
§ 1.4 反问题与非线性性 .....	(136)
<b>第二章 不适定数学问题的求解方法</b> .....	(138)
§ 2.1 正则算子、正则参数 .....	(138)
§ 2.2 构造正则算子的变分方法 .....	(140)
§ 2.3 正则参数的选择 .....	(145)
§ 2.4 求解第一类 Fredholm 积分方程的正则化方法 .....	(148)
§ 2.5 奇异与病态线性代数方程组求解 .....	(150)
<b>第三章 求解反问题的脉冲谱方法 (PST)</b> .....	(152)
§ 3.1 方法的描述 .....	(152)
§ 3.2 传热反问题的求解 .....	(154)
§ 3.3 关于 PST 方法的几点说明.....	(156)
§ 3.4 数值模拟 .....	(156)
§ 3.5 变形的 PST 方法.....	(157)
<b>第四章 求解反问题的扰动方法</b> .....	(163)
§ 4.1 问题的提出 .....	(163)
§ 4.2 伴随方程及其所对应的线性泛函 .....	(163)
§ 4.3 小扰动理论 .....	(164)
§ 4.4 应用扰动方法识别算子参数 .....	(165)
§ 4.5 一个反演的实例 .....	(168)
主要参考文献.....	(171)

国家自然科学基金及地震科学联合基金资助项目

# 第一篇 小波理论及其应用

李世雄 编著





# 前 言

小波变换的理论是近年来发展起来的新的数学分支，目前已成为国际上极为活跃的研究领域，它已被广泛地应用于图像处理、语音人工合成、地震勘探、大气湍流等方面。

长期以来，在各种信号数据的处理方面，特别在频谱分析和各种滤波方法中最基本的数学工具就是 Fourier 分析。在数学上，我们常用函数来刻画信号，通常总是把时间或空间作为自变量，而把反映某一信号的物理量作为函数。信号的一个重要特征就是它的频率特性（或频谱），在数学上也就是信号所表示的函数的 Fourier 变换。所谓频谱分析、滤波等信号数据处理的方法，从数学的角度看来就是对一个函数的 Fourier 变换进行分析、加工处理的种种技巧。这方面已有非常丰富的内容与许多行之有效的办法。但是，Fourier 变换反映的是信号或函数的整体特征，在不少实际问题中我们所关心的却是信号在局部范围中的特征。例如，在音乐和语言信号中人们关心的是何时演奏什么音符，发出什么样的音节；对地震波的记录来说，人们关心的是何位置出现什么样的反射波；图形识别中的边缘检测，关心的是信号突变部分的位置。为了弥补 Fourier 变换这方面的不足，1946 年 Gabor, D. 引进了窗口 Fourier 变换的概念。他用一个在有限区间（称为窗口）外恒等于零的光滑函数（这个有限区间的位置随一个参数而变）去乘所要研究的函数，然后对它作 Fourier 变换。这种变换确实能反映函数在窗口内部分的频谱特性，因而确能在一些需要研究信号的局部性质的问题中起一定作用。但是，由 Gabor 引进的这种 Fourier 变换的窗口位置虽然能随参数变化而任意移动，但是其窗口的大小和形状却与频率无关而是固定不变的。这与高频信号的分辨率应比低频信号为高，因而频率愈高窗口应愈小这一要求不符。加上 Gabor 变换其它的一些缺点，它未能得到广泛的应用与发展。

小波变换继承和发展了 Gabor 的窗口 Fourier 变换的局部化思想，但它的窗口随频率增高而缩小。它符合高频信号的分辨率较高的要求，而且小波变换适当离散化后能构成标准正交系，这是在理论或应用中都非常重要有用的性质。小波的原始概念最早是法国地质学家 J. Morlet 和 A. Grossmann<sup>[15][21]</sup> 在 70 年代分析处理地质数据时引进的（当然，许多数学家从纯数学的角度出发也对小波概念的建立与方法的发展作出过不少重要的贡献，关于这方面情况的简单介绍可参看[1]），以后又经 Meyer, Y.<sup>[20]</sup>、Mallat, S.<sup>[18]</sup> 与 Daubechies, I.<sup>[11]</sup> 等数学家的一系列工作，小波变换已经有了比较系统的理论与计算方法，并已在许多领域中发挥作用。

本篇前五章介绍有关准备知识、小波的基本理论与构作方法。第一章简要地介绍本书中一些通用的记号、函数论及 Fourier 分析中的一些基本概念与定理，供读者查考；第二章是有关小波的定义与基本性质；第三章介绍构作正交小波基的理论与方法；第四章介绍紧支集正交小波基的构作方法；第五章介绍小波标架的理论。本篇后四章是小波在算子拟对角化、取样定理及图像数据压缩与奇性分析等方面的应用。小波分析可以应用的领域非常宽广，而且正在迅速发展。目前要对这方面作比较全面的介绍是作者能力所不及的，因此本书只能就作者较熟悉的三方面作了一个简要的介绍，希望能引起大家的兴趣，并进



一步发展这方面的研究与应用。

最后，我们在这里简单阐述一下小波变换与奇性分析、反演的关系。所谓函数在某处有奇性，简单地说就是函数在该处有间断或其某阶导数不连续。反演地下物性参数奇性的位置与性质，即奇性反演是地球物理学家非常感兴趣的一类问题。70年代数学中偏微分方程理论的一个巨大进步就是认识到要研究解的奇性必须对解进行局部的 Fourier 分析，也称为微局部分析。微局部分析中的一个重要概念就是波前集，波前集这一名词源自 Huygens 研究波动传播现象时构造波前的方法。波前是波动方程的间断面，也就是一种奇性，它沿一定的方向传播，由此得到新的间断（奇性）。一个函数的 Fourier 变换  $\hat{f}(\omega)$  当  $|\omega| \rightarrow \infty$  时的性态（是否急减的）反映了  $f$  的奇性状况，但它反映的是整体情况。为了反映在一点  $x_0$  附近的奇性情况，可以用一个支集（支集的定义可参看本书第一章公式 (1.1)）在  $x_0$  附近的光滑函数  $\alpha(x)$  去乘  $f$ ，这样  $\alpha f$  的 Fourier 变换  $\hat{\alpha f}(\omega)$  当  $|\omega| \rightarrow \infty$  时的性态就可以反映  $f$  在点  $x_0$  附近的奇性情况，而当  $\alpha(x)$  的支集直径趋于零时，就可以反映出  $f$  在点  $x_0$  处的奇性情况，这就是波前集概念的实质。利用波前集的概念就可以对偏微分方程解的奇性状况的分布与变化规律进行深入的分析研究。波前集的概念虽然在奇性分析中起着重要作用，但它却难以进行具体数值计算，因而无法在实际问题中应用。小波变换恰好对波前集在数值计算方面提供了一个恰当的工具，它的两组参数之一反映了窗口的位置，而另一组则反映了窗口的大小与频谱的范围。改变参数使窗口不断缩小的做法等价于波前集的概念中令  $\alpha(x)$  的支集直径趋于零的过程，在此过程中依小波基展开的系数趋于零的速度就与  $|\omega| \rightarrow \infty$  时  $\hat{\alpha f}(\omega)$  趋于零的快慢相对应。在实际问题中最重要的是具有间断线（或面）的光滑函数，它按正交小波基展开，可以看成是用少数几个低频小波（相应于伸缩参数取较小的值）来逼近光滑部分，再加上位于间断线（或面）附近的高频小波（相应于伸缩参数取较大的值）来反映其奇性。此外，波前集这一概念虽然反映了函数在各点沿各方向有无奇性，但却不反映奇性的强弱，这一点在地球物理奇性反演问题中却是很重要的。将函数用小波基展开后，我们就可以利用它来研究在线性算子作用下波前集的变化。当然，与此同时我们要将所要研究的线性算子按适当的小波基展开。由于许多重要类型的线性算子（如 Calderon-Zygmund 算子、拟微分算子等）在适当的小波基下可近似对角化（见本书第六章），这就使这类算子作用下波前集变化的规律比较简单。利用这些结果结合利用拟微分算子与 Fourier 积分算子得到的反演公式，我们就可以得到一些可具体进行数值计算的奇性反演公式。这是小波变换可以充分发挥其作用的领域。

利用小波变换结合拟微分算子、Fourier 积分算子等工具，虽然可以得到不少有关变系数线性偏微分方程解的奇性传播、反射、折射、绕射的规律，并由此得到一些奇性反演的算法，但是由于拟微分算子、Fourier 积分算子等工具基本上只能处理系数及边界都是光滑的偏微分方程问题，因此在应用中带来不少局限性。80年代初发展起来的仿微分算子、仿 Fourier 积分算子的理论是一种保留奇性较高项的线性化手续，利用它可以处理一些非线性及光滑性较差的偏微分方程问题，而这正是地球物理学中非常感兴趣而且有实际意义的问题。因此，这类算子对小波基的作用以及这方面的结果在奇性反演中的应用正是我们下一步需深入研究的问题。

李世雄

1992.9

# 第一章 预备知识

在这一章中我们简单扼要地介绍本书中通用的符号及函数论、Fourier 分析中的一些基本概念、定理，供读者查阅。有关的性质和定理的证明都略去了，若有需要可查阅参考文献〔16〕、〔21〕、〔22〕。

## 符号的意义、一些定义及定理

我们用  $N^*$  表示自然数全体，即  $N^* = \{1, 2, 3, \dots\}$ ;

$Z$  表示整数全体，即  $Z = \{\dots, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots\}$ ;

$R$  表示实数全体，即  $R = (-\infty, \infty)$ ;

$C$  表示复数全体，即  $C = \{a + bi \mid a \in R, b \in R\}$ ;

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 0, & i \neq j \\ 1, & i = j \end{cases} \quad i, j \in Z.$$

若  $A$  为一点集，则以  $\bar{A}$  记其闭包，即  $A$  与其极限点之并。

设  $f$  是在  $R$  上定义的函数（可以取复数值），我们称集合  $\text{supp} f = \overline{\{x \mid f(x) \neq 0\}}$  为  $f$  的**支集**。

(1.1)

若  $\text{supp} f$  是紧集（即有界闭集），则称函数  $f$  为**支集紧**或具有**紧支集**。显然，一函数具有紧支集的充要条件是它在一有界区域外恒等于零。

下面讨论定义在  $R$  上的各种函数所构成的空间：

$C(R)$  ——  $R$  上连续函数所构成的空间；

$C_0(R)$  ——  $R$  上连续且具有紧支集的函数所构成的空间；

$C^k(R)$  ——  $R$  上有  $k$  阶连续导数的函数所构成的空间；

$C_0^k(R)$  ——  $R$  上有  $k$  阶连续导数且具有紧支集的函数所构成的空间；

$C^\infty(R)$  ——  $R$  上无限次可导的函数（即光滑函数）所构成的空间；

$C_0^\infty(R)$  ——  $R$  上无限次可导且具有紧支集的函数所构成的空间；

$L^p(R)$  ( $1 \leq p < \infty$ ) —— 满足  $\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|^p dx < \infty$  的全体函数所构成的空间。

(1.2)

在  $L^p(R)$  中定义范数：

$$\|f\|_p = \left( \int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} \quad (1.3)$$

对此范数  $L^p(R)$  是一个 Banach 空间。

特别重要的是  $p=1$  和  $2$  的情况，在空间  $L^2(R)$  中对  $f, g \in L^2(R)$ ，我们定义内积：

$$\langle f, g \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \overline{g(x)} dx \quad (1.4)$$

则范数  $\|f\|_2 = \langle f, f \rangle^{\frac{1}{2}}$ ，这样  $L^2(R)$  就成为一个 Hilbert 空间（今后在不致引起混淆的地方，常将括号中的  $R$  略去，而简记为  $C, C_0, \dots, L^2, L^1$  等）。

在  $L^1(R)$  中定义 **Fourier 变换** 如下：

$$F: f(x) \longmapsto (Ff)(\omega) = \hat{f}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-i\omega x} dx \quad (1.5)$$

容易证明  $\hat{f}(\omega)$  有界且在  $\mathbb{R}$  上一致连续。

若  $\hat{f}(\omega)$  亦属于  $L^1(\mathbb{R})$ , 则可定义 **Fourier 逆变换** 如下:

$$F^{-1}: \hat{f}(\omega) \longmapsto (F^{-1}\hat{f})(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(\omega) e^{i\omega x} d\omega \quad (1.6)$$

可以证明, 在  $f(x)$  的连续点有:

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(\omega) e^{i\omega x} d\omega = f(x) \quad (1.7)$$

若  $F: f(x) \longmapsto \hat{f}(\omega)$

$g(x) \longmapsto \hat{g}(\omega)$

则  $\alpha f + \beta g \longmapsto \alpha \hat{f} + \beta \hat{g}$  (1.8)

这里  $\alpha, \beta$  为常数。

令  $f^a(x) = f(ax)$  ( $a$  为实数)

则  $\hat{f}^a(\omega) = \frac{1}{|a|} \hat{f}\left(\frac{\omega}{a}\right)$  (1.9)

令  $f_{x_0}(x) = f(x - x_0)$

则  $\hat{f}_{x_0}(\omega) = e^{-i\omega x_0} \hat{f}(\omega)$  (1.10)

若  $f$  的导函数  $f'$  亦属于  $L^1(\mathbb{R})$ , 则其 Fourier 变换

$$\hat{f}'(\omega) = i\omega \hat{f}(\omega)$$

一般有  $\hat{f}^{(m)}(\omega) = (i\omega)^m \hat{f}(\omega)$  (1.11)

若  $f, g \in L^1(\mathbb{R})$ , 定义  $f$  与  $g$  的卷积为:

$$h(x) = (f * g)(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x-y) g(y) dy \quad (1.12)$$

易证,  $h \in L^1(\mathbb{R})$ , 且  $\|h\|_1 \leq \|f\|_1 \|g\|_1$  (1.13)

$$f * g = g * f \quad (1.14)$$

$$(\widehat{f * g})(\omega) = \hat{f}(\omega) \hat{g}(\omega) \quad (1.15)$$

令  $f(x)g(x) = m(x)$

则  $\hat{m}(\omega) = \frac{1}{2\pi} (\hat{f} * \hat{g})(\omega)$  (1.16)

若  $k \in L^1(\mathbb{R})$ ,

则  $(f * g) * k = f * (g * k)$  (1.17)

对于  $L^2(\mathbb{R})$  中的函数  $f(x)$ , 因为积分  $\int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-i\omega x} dx$  不一定存在, 所以其 Fourier

变换不能用 (1.5) 来定义。设  $f(x) \in L^2(\mathbb{R})$ , 令  $f_N(x) = \begin{cases} f(x) & |x| \leq N \\ 0 & |x| > N \end{cases}$ , 则

$f_N(x) \in L^1(\mathbb{R})$ ,

$$\hat{f}_N(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f_N(x) e^{-i\omega x} dx$$

我们定义  $f$  的 Fourier 变换  $\hat{f}(\omega) = \lim_{N \rightarrow \infty} \hat{f}_N(\omega)$ , 亦即

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \|\hat{f}(\omega) - \hat{f}_N(\omega)\|_2 = 0 \quad (1.18)$$

设  $f, g \in L^2(\mathbb{R})$ , 则成立 Parseval 恒等式:

$$\langle f, g \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \overline{g(x)} dx = \frac{1}{2\pi} \langle \hat{f}, \hat{g} \rangle \quad (1.19)$$

取  $f = g$ , 即得:

$$\|f\|_2^2 = \langle f, f \rangle = \frac{1}{2\pi} \langle \hat{f}, \hat{f} \rangle = \frac{1}{2\pi} \|\hat{f}\|_2^2 \quad (1.20)$$

这里不准备系统地介绍广义函数的理论, 只引进一个最简单重要的广义函数—— $\delta(x)$  (Dirac delta 函数):

$$\delta(x) = 0, \text{ 当 } x \neq 0; \int_{-\infty}^{\infty} \delta(x) dx = 1 \quad (1.21)$$

若  $f(x) \in C_0^\infty(\mathbb{R})$ , 则:

$$\left. \begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \delta(x) dx &= f(0) \\ \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \delta^{(k)}(x) dx &= (-1)^k f^{(k)}(0) \\ \int_{-\infty}^{\infty} f(x_0 - x) \delta(x) dx &= \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \delta(x_0 - x) dx = f(x_0) \\ \int_{-\infty}^{\infty} f(x_0 - x) \delta^{(k)}(x) dx &= \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \delta^{(k)}(x_0 - x) dx = (-1)^k f^{(k)}(x_0) \end{aligned} \right\} \quad (1.22)$$

$$\widehat{\delta}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(x) e^{-i\omega x} dx = 1 \quad (1.23)$$

$$\delta(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega x} d\omega \quad (1.24)$$

令  $\delta_{x_0}(x) = \delta(x - x_0)$ , 则

$$\widehat{\delta}_{x_0}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(x_0 - x) e^{-i\omega x} dx = e^{-i\omega x_0} \quad (1.25)$$

利用  $\delta$  函数, 我们可将线性常系数微分算子写成卷积的形式:

$$\begin{aligned} P(D) f(x) &= \sum_{k=0}^n a_k \frac{d^k}{dx^k} f(x) \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \sum_{k=0}^n a_k (-1)^k \delta^{(k)}(x-u) f(u) du \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} h(x-u) f(u) du \end{aligned} \quad (1.26)$$

这里  $h(x) = \sum_{k=0}^n (-1)^k a_k \delta^{(k)}(x)$  是广义函数。

### 周期函数与 Fourier 级数

现在讨论周期为  $2\pi$  的函数, 即满足  $f(x+2\pi)=f(x)$ 、 $x \in \mathbb{R}$  的函数, 令

$$\|f\|_{L^p(0,2\pi)} = \left( \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} \quad (1 \leq p < \infty) \quad (1.27)$$

则满足  $\|f\|_{L^p(0,2\pi)} < \infty$  的周期为  $2\pi$  的函数全体构成 Banach 空间  $L^p(0,2\pi)$ 。 (1.28)

特别重要的是  $L^2(0,2\pi)$ , 对  $f, g \in L^2(0,2\pi)$  可引进内积:

$$(f, g)_{L^2(0,2\pi)} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \overline{g(x)} dx \quad (1.29)$$

于是  $\|f\|_{L^2(0,2\pi)} = \sqrt{(f, f)_{L^2(0,2\pi)}}$ , 所以  $L^2(0,2\pi)$  是 Hilbert 空间。

与  $L^p(\mathbb{R})$  不同,  $L^p(0,2\pi)$  有下列包含关系:

$$L^p(0,2\pi) \subseteq L^q(0,2\pi) \subseteq L^1(0,2\pi), \quad p \geq q \geq 1 \quad (1.30)$$

对  $f \in L^1(0,2\pi)$ , 其 Fourier 系数与 Fourier 级数分别为:

$$C_n = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(x) e^{-inx} dx, \quad n \in \mathbb{Z} \quad (1.31)$$

$$f(x) \sim \sum_{n \in \mathbb{Z}} C_n e^{inx}$$

令  $S_N(x) = \sum_{n=-N}^N C_n e^{inx}$  记  $f$  的 Fourier 级数的部分和。若  $f(x)$  逐段单调, 则在  $f$  的连续点  $x_0$  有:

$$\left. \begin{aligned} f(x_0) &= \lim_{N \rightarrow \infty} S_N(x_0) \\ \text{在 } f \text{ 的间断点 } x_0 \text{ 有} \\ \frac{f(x_0-0) + f(x_0+0)}{2} &= \lim_{N \rightarrow \infty} S_N(x_0) \end{aligned} \right\} \quad (1.32)$$

若  $f \in L^2(0,2\pi)$ , 则成立下面的 Parseval 等式:

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(x)|^2 dx = \sum_{n \in \mathbb{Z}} |C_n|^2 \quad (1.33)$$

### Poisson 求和公式

设  $f \in L^1(\mathbb{R})$ , 且  $f(x) = O\left(\frac{1}{1+|x|^\alpha}\right)$

$$\hat{f}(\omega) = O\left(\frac{1}{1+|\omega|^\alpha}\right) \quad \alpha > 1$$

(我们用记号  $f(x) = O(g(x))$  表示存在常数  $K$ , 使  $|f(x)| \leq K|g(x)|$ ), 则级数

$\sum_{k \in \mathbb{Z}} f(x+2\pi k)$ 、 $\sum_{k \in \mathbb{Z}} \hat{f}(k) e^{ikx}$  对一切  $x \in \mathbb{R}$  收敛, 且成立下面的 Poisson 求和公式:

$$\sum_{k \in \mathbb{Z}} f(x+2\pi k) = \frac{1}{2\pi} \sum_{k \in \mathbb{Z}} \hat{f}(k) e^{ikx}, \quad x \in \mathbb{R} \quad (1.34)$$

特别, 取  $x=0$ , 即得:

$$\sum_{k \in \mathbb{Z}} f(2\pi k) = \frac{1}{2\pi} \sum_{k \in \mathbb{Z}} \hat{f}(k) \quad (1.35)$$

以上我们介绍了定义在  $\mathbb{R}$  上的各种函数空间及 Fourier 分析的基本概念、性质与定理。这一切都很容易推广到  $n$  维欧氏空间  $\mathbb{R}^n$  的情况。我们用：

$x = (x_1, \dots, x_n)$ ,  $y = (y_1, \dots, y_n)$  记  $\mathbb{R}^n$  中的点；

$x$  与  $y$  的内积为  $x \cdot y = \sum_{i=1}^n x_i y_i$ ；

数  $|x| = \sqrt{x \cdot x}$  称为  $x$  的范数；

以  $dx = dx_1 \cdots dx_n$  记  $\mathbb{R}^n$  中的积分微元。

$L^p(\mathbb{R}^n)$  为满足  $\int_{\mathbb{R}^n} |f(x)|^p dx < \infty$  的全体函数所构成的空间。

对  $f(x) \in L^1(\mathbb{R}^n)$  定义其 Fourier 变换与逆变换；

$$F: f(x) \longmapsto \hat{f}(\omega) = \int_{\mathbb{R}^n} f(x) e^{-i\omega \cdot x} dx \quad (1.36)$$

$$F^{-1}: \hat{f}(\omega) \longmapsto \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{\mathbb{R}^n} \hat{f}(\omega) e^{i\omega \cdot x} d\omega \quad (1.37)$$

与  $\mathbb{R}$  中类似的一些定义、定理这里就不一一罗列，读者可参看[23]。

## 第二章 小波变换的定义与基本性质

### § 2.1 从 Fourier 变换到 Gabor 变换

长期以来,在各种信号数据的处理方面,特别是在频谱分析和各种滤波方法中,最基本的数学工具就是 Fourier 分析。在数学上我们常用函数来刻划信号,通常总是把时间或空间作为自变量,而把反映某一信号的物理量作为函数。对于以时间  $t$  为自变量的信号我们称之为时间信号,记为  $f(t)$ 。对于以空间为自变量的信号则称为空间信号,最常见的如平面(黑白)图像可以用两元函数  $f(x, y)$  来表示,这里  $(x, y)$  是平面上点的坐标,而  $f(x, y)$  则表示点  $(x, y)$  图像的灰度。当然,也可以考虑既依赖于时间又依赖于空间的信号  $f(x, y, t)$  (如电视图像等)。尽管时间信号与空间信号在物理意义上不同,但在数学上的刻划却是十分相似的,可以用函数的概念统一处理。今后我们对信号与函数这两个概念将不加区分,而且主要讨论时间信号。

信号  $f(t)$  的一个重要特征就是它的频率特性(或谱),在数学上也就是  $f(t)$  的 Fourier 变换  $\hat{f}(\omega)$ :

$$\hat{f}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-i\omega t} dt \quad (2.1)$$

由 Fourier 逆变换公式:

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(\omega) e^{i\omega t} d\omega \quad (2.2)$$

知道由一个信号的谱可以完全确定这个信号(我们在这里不详细讨论保证公式(2.2)成立的具体条件)。所谓频谱分析、滤波等信号数据处理的方法,简单的说来就是对  $\hat{f}(\omega)$  的分析、加工的种种技巧。长期以来,这方面已发展了一套内容非常丰富,并在许多实际问题中行之有效的办法。但是,由于 Fourier 变换  $\hat{f}(\omega)$  是将函数  $f(t)$  按照函数系  $\{e^{i\omega t}\}_{\omega \in \mathbb{R}}$  的展开,而  $|e^{i\omega t}| \equiv 1$ , 所以  $\hat{f}(\omega)$  只能刻划  $f(t)$  在整个时间域  $(-\infty, \infty)$  上的频谱特征,而不能反映出信号在时间的局部区域上的频率特征。在不少实际问题中,我们所关心的恰恰是信号在局部时间范围中的特征。例如在音乐和语言信号中,人们关心的是什么时候演奏什么音符,发出什么样的音节;对地震信号,人们关心的是在什么位置出现什么样的反射波,对这类问题用 Fourier 变换的方法往往不是很有效的。

为了研究信号在局部范围的频率特性, D. Gabor<sup>[14]</sup> 在 1946 年引进了“窗口”(Window) Fourier 变换的概念。他的做法是取定一个函数  $g(t)$  称为窗口函数,它在有限区间外恒等于零(即支集紧),或很快地趋于 0 (见图 2.1)。当然为了尽可能保持  $f(t)$  的局部特征,  $g(t)$  还必须满足一些其它要求,但现在我们暂时不讨论这方面的问题。用  $g(t-\tau)$  乘  $f(t)$  相当于在  $\tau$  附近开了一个“窗口”。



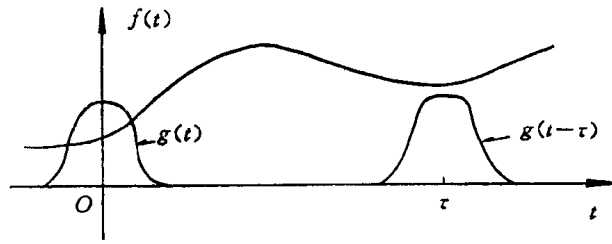


图 2.1

称 
$$G_f(\omega, \tau) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) g(t-\tau) e^{-i\omega t} dt \quad (2.3)$$

为信号  $f(t)$  关于窗口函数  $g(t)$  的“窗口 Fourier 变换”(Window Fourier Transform) 或 Gabor 变换。从上面的定义可见,  $G_f(\omega, \tau)$  反映了信号  $f(t)$  在  $t=\tau$  附近的频谱特征, Gabor 变换确实能反映出一个信号在任意局部范围的频率特性, 而且由于有反演公式:

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega t} g(t-\tau) G_f(\omega, \tau) d\tau \quad (2.4)$$

这里的窗口函数  $g(t)$  要求满足一定的标准化条件。可见  $G_f(\omega, \tau)$  ( $-\infty < \omega < \infty, -\infty < \tau < \infty$ ) 确实包含了  $f(t)$  的全部信息, 而且 Gabor 变换的窗口位置随参数  $\tau$  而变(平移), 符合研究信号不同位置局部性质的要求, 这是它比 Fourier 变换优越之处。但是, Gabor 变换窗口的形状与大小与频率无关, 保持不变。这不符合实际问题中高频信号的分辨率应比低频信号为高, 也就是说变换窗口大小应随频率而变, 频率愈高窗口应愈小的要求。此外, 在数值计算中, 必须将连续依赖于参数的变换进行离散化, 熟知将 Fourier 变换离散化后即得按正交的三角函数系展开的 Fourier 级数, 这不论在理论上或数值计算中都是非常重要的。但是, 对于 Gabor 变换, 可以证明不论如何离散化均不可能使它成为一组正交基。由于 Gabor 变换的种种缺点, 使它未能得到广泛应用与进一步发展。下面要介绍的小波 (Wavelet) 变换继承和发展了 Gabor 变换局部化的思想, 同时又克服了窗口大小不随频率变化、缺乏离散正交基等等缺点, 是比较理想的对信号进行局部频谱分析的数学工具。

## § 2.2 小波 (Wavelet) 变换的定义与基本性质

我们称满足条件: 
$$\int_{-\infty}^{\infty} |\hat{\psi}(\omega)|^2 |\omega|^{-1} d\omega < \infty \quad (2.5)$$

的平方可积函数  $\psi(t)$  (即  $\psi(t) \in L^2(\mathbb{R})$ ) 为一个基本小波或小波母函数。令:

$$\psi_{a,b}(t) = \frac{1}{\sqrt{|a|}} \psi\left(\frac{t-b}{a}\right), \quad a, b \in \mathbb{R}, a \neq 0 \quad (2.6)$$

称为由母函数  $\psi$  生成的依赖于参数  $a, b$  的连续小波。设  $f(t) \in L^2(\mathbb{R})$ , 定义其小波变换为:

$$W_f(a, b) = \langle f, \psi_{a,b} \rangle = \frac{1}{\sqrt{|a|}} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \overline{\psi\left(\frac{t-b}{a}\right)} dt \quad (2.7)$$

由上面的定义可见, 连续小波  $\psi_{a,b}(t)$  之作用与 Gabor 变换中的函数  $g(t-\tau) e^{-i\omega t}$  相类似, 参数  $b$  与参数  $\tau$  都起着平移的作用。本质不同的是参数  $a$  与  $\omega$ , 后者的变化不改变“窗口”  $g(t)$  的大小与形状, 而前者的变化不仅改变连续小波的频谱结构, 而且也改变其窗口的大小与形状。这是因为由 Fourier 变换的基本关系式: 若  $f^a(t) = f(at)$ , 则

$\hat{f}^a(\omega) = \frac{1}{|a|} \hat{f}\left(\frac{\omega}{a}\right)$ , 可见随着  $|a|$  的减小,  $\psi_{a,b}(t)$  的频谱就愈集中于高频部分, 而其支集  $\text{supp } \psi_{a,b}$  则随  $|a|$  的减小而愈狭小 (这里仅考虑小波母函数  $\psi$  具有紧支集的特殊情况, 下面我们将对一般情况进行讨论)。这就满足了信号频率愈高相应的窗口就小, 因而它在时间 (或空间) 域上的分辨率亦愈高的要求。

与 Fourier 变换、Gabor 变换类似, 小波变换也有反演公式及“Parseval 等式”:

$$\text{令 } c_\psi = \int_{-\infty}^{\infty} |\hat{\psi}(\omega)|^2 |\omega|^{-1} d\omega, \quad f, g \in L^2(\mathbb{R})$$

则在  $f$  的连续点有反演公式:

$$f(t) = \frac{1}{c_\psi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} W_f(a, b) \psi_{a,b}(t) \frac{da db}{a^2} \quad (2.8)$$

小波变换的“Parseval”等式:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} W_f(a, b) \overline{W_g(a, b)} \frac{da db}{a^2} = c_\psi \langle f, g \rangle \quad (2.9)$$

$$\frac{1}{c_\psi} \int_{-\infty}^{\infty} |W_f(a, b)|^2 \frac{da db}{a^2} = \int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|^2 dt \quad (2.10)$$

利用 Parseval 恒等式 (1.19) 及 Fourier 变换的基本性质 (1.9)、(1.10) 可得:

$$W_f(a, b) = \langle f, \psi_{a,b} \rangle = \frac{1}{2\pi} \langle \hat{f}, \hat{\psi}_{a,b} \rangle = \frac{\sqrt{|a|}}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(\omega) e^{i\omega b} \overline{\hat{\psi}(a\omega)} d\omega$$

因而

$$\begin{aligned} & \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} W_f(a, b) \overline{W_g(a, b)} \frac{da db}{a^2} \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{|a|}{4\pi^2} \hat{f}(\omega) \overline{\hat{g}(\omega')} e^{i\omega b} e^{-i\omega' b} \overline{\hat{\psi}(a\omega)} \hat{\psi}(a\omega') d\omega d\omega' \right\} \frac{da db}{a^2} \\ &= \frac{1}{4\pi^2} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega \int_{-\infty}^{\infty} \overline{\hat{\psi}(a\omega)} \hat{f}(\omega) \frac{da}{|a|} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega b} db \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega' b} \hat{\psi}(a\omega') \overline{\hat{g}(\omega')} d\omega' \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega \int_{-\infty}^{\infty} \overline{\hat{\psi}(a\omega)} \hat{f}(\omega) \hat{\psi}(a\omega) \overline{\hat{g}(\omega)} \frac{da}{|a|} \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega \int_{-\infty}^{\infty} |\hat{\psi}(a\omega)|^2 \hat{f}(\omega) \overline{\hat{g}(\omega)} \frac{da}{|a|} \\ &= c_\psi \cdot \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(\omega) \overline{\hat{g}(\omega)} d\omega \\ &= c_\psi \langle f, g \rangle \end{aligned}$$

这就得到公式 (2.9)。令  $f=g$ , 即得公式 (2.10)。在 (2.9) 中取

$$g(t) = \frac{1}{2\sqrt{\pi\alpha}} e^{-\frac{(t-t_0)^2}{4\alpha}}, \text{ 然后令 } \alpha \rightarrow +0, \text{ 即得公式 (2.8)。}$$