

高等学校教学用书



数学分析习题集

B. П. 吉米多维奇著
李 荣 凍 譯

人民教育出版社

本書系根据苏联国立科学技术理論書籍出版社(Гостехиздат)出版的吉米多維奇(Б. П. Демидович)著“数学分析習題集”(Сборник задач и упражнений по математическому анализу)初版譯出的,这次中文版是照原書第三版(1956年)修訂的。原書經苏联高等教育部审定为綜合性大学及师范学院数理系教学參考書。

数 学 分 析 习 題 集

Б. П. 吉米多維奇著

李荣冻譯

北京市书刊出版业营业許可証出字第2号

人民教育出版社出版(北京景山东街)

上海市印刷四厂印裝

新华书店上海发行所发行

各地新华书店經售

統一書号K13010·398 开本850×1168 1/32 印張18 1/16

字数433,000 印数51,001—61,000 定价(6)¥1.70

1953年8月商务初版(共印10,500册)

1958年6月新1版(修訂本) 1963年4月上海第9次印刷

第三版序言

在这第三版基本上没有什么改变，仅对个别问题的叙述更加确切并改正了答案中的一些错误。

我对于 И. А. 瓦因什金及 М. Л. 斯摩尔扬斯基两位副教授协助校正答案在此表示衷心的感谢。

Б. И. 吉米多维奇

莫斯科 1956 年

第二版序言

在这第二版中接受了許多教师的意见，增加很多有关数学分析各主要章节的计算性的习题。增加的习题和例题有一千以上，大部份是关于求极限、微分法、不定积分与定积分、级数与变量代换的问题。同时根据各种考虑，删去了一些题目。由于材料叙述的方便在第四与第五两章内改变了个别几节的先后次序。此外，在习题集中某些地方的标题也更明确了。与从前一样，在习题集中特别注意措辞的准确性，并详细地说明某些公式成立的条件。为了使用的方便，在习题集里采用了问题的统一编号。在书末添有附录，其中包含重要常数及最常用的函数表。

国立莫斯科(罗蒙洛索夫)大学数学分析教研室主任 Н. Л. 阿伊任什达特及 З. М. 克什克拉副教授预先校阅第二版的手稿，特此志谢。

Б. И. 吉米多维奇

1953 年于莫斯科

目 录

第三版序言

第二版序言

第一編 單变量函数

第一章 分析引論	1
§ 1. 实数	1
§ 2. 叙列的理論	6
§ 3. 函数的概念	20
§ 4. 函数的圖形表示法	29
§ 5. 函数的極限	41
§ 6. 函数無穷小和無穷大的阶	64
§ 7. 函数的連續性	69
§ 8. 反函数, 用参数表示的函数	79
§ 9. 函数的一致連續性	83
§ 10. 函数方程	86
第二章 單变量函数的微分学	89
§ 1. 显函数的导函数	89
§ 2. 反函数的导函数, 用参变数表示的函数的导函数, 隐函数的导函数 ..	106
§ 3. 导函数的几何意义	109
§ 4. 函数的微分	112
§ 5. 高阶的导函数和微分	116
§ 6. 洛尔、拉格郎日及哥西定理	126
§ 7. 函数的增大与减小, 不等式	132
§ 8. 凹凸性, 拐点	136
§ 9. 未定形的求值法	138
§ 10. 台劳公式	142
§ 11. 函数的極值, 函数的最大值和最小值	147
§ 12. 依据函数的特征点作函数的圖形	152
§ 13. 函数的極大值和極小值問題	155
§ 14. 曲綫的相切, 曲率圓, 漸展綫	159
§ 15. 方程的近似解法	161
第三章 不定积分	163
§ 1. 最簡單的不定积分	163
§ 2. 有理函数的积分法	174

§ 3. 無理函数的积分法	177
§ 4. 三角函数的积分法	182
§ 5. 各种超越函数的积分法	188
§ 6. 函数的积分法的各种例子	191
第四章 定积分	194
§ 1. 定积分作为和的極限	194
§ 2. 利用不定积分計算定积分的方法	198
§ 3. 中值定理	208
§ 4. 广义积分	211
§ 5. 面积的計算法	218
§ 6. 弧長的計算法	221
§ 7. 体积的計算法	223
§ 8. 旋轉曲面表面積的計算法	226
§ 9. 矩的計算法, 重心的坐标	227
§ 10. 力学和物理学中的問題	229
§ 11. 定积分的近似計算法	231
第五章 級数	234
§ 1. 数項級数, 同号級数收敛性的判別法	234
§ 2. 变号級数收敛性的判別法	245
§ 3. 級数的运算	250
§ 4. 函数項級数	252
§ 5. 幂級数	264
§ 6. 福里叶級数	275
§ 7. 級数求和法	281
§ 8. 利用級数求定积分之值	285
§ 9. 無穷乘积	286
§ 10. 斯特林格公式	293
§ 11. 用多項式逼近連續函数	293

第二編 多变量函数

第六章 多变量函数的微分法	297
§ 1. 多变量函数的極限, 連續性	297
§ 2. 偏导函数, 多变量函数的微分	303
§ 3. 隐函数的微分法	318
§ 4. 变量代換	328
§ 5. 几何上的应用	342
§ 6. 台劳公式	348

§ 7. 多变量函数的极值	351
第七章 带参数的积分	360
§ 1. 带参数的常义积分	360
§ 2. 带参数的广义积分, 积分的一致收敛性	365
§ 3. 广义积分中的变量代换, 广义积分号下微分法及积分法	370
§ 4. 尤拉积分	376
§ 5. 福里叶积分公式	379
第八章 重积分和曲线积分	382
§ 1. 二重积分	382
§ 2. 面积的算法	391
§ 3. 体积的算法	393
§ 4. 曲面面积算法	396
§ 5. 二重积分在力学上的应用	398
§ 6. 三重积分	401
§ 7. 利用三重积分计算体积法	405
§ 8. 三重积分在力学上的应用	409
§ 9. 二重和三重广义积分	413
§ 10. 多重积分	418
§ 11. 曲线积分	421
§ 12. 格林公式	429
§ 13. 曲线积分的物理应用	434
§ 14. 曲面积分	437
§ 15. 斯托克斯公式	442
§ 16. 奥斯特洛格拉德斯基公式	444
§ 17. 场论初步	449
答案	459
附 录	
I. 重要常数	568
II. 表	568
1. 倒数, 平方根及立方根, 指数函数	568
2. 常用对数的尾数	569
3. 自然对数	569
4. 三角函数	570
5. 双曲函数	571
6. 阶乘及与其有关的函数	571
7. 加瑞函数	571

第一編 單变量函数

第一章 分析引論

§ 1. 实数

1° 数学归纳法 为了证明某定理对任意的自然数 n 为真, 只須证明下面兩点就够了: (1) 这定理对 $n=1$ 为真, (2) 設这定理对任何的一个自然数 n 为真, 則它对其次的一自然数 $n+1$ 也为真。

2° 分割 假設分有理数为 A 和 B 兩类, 使其滿足于下列条件: (1) 兩类均非空集, (2) 每一个有理数必属于一类, 且仅属于一类, (3) 属于 A 类 (下类) 的任一数小于属于 B 类 (上类) 的任何数, 这样的—个分类法称为分割。 (a) 若或是下类 A 有最大的数, 或是上类 B 有最小的数, 則分割 A/B 确定一个有理数。 (b) 若 A 类無最大数, 而 B 类亦無最小数。則分割 A/B 确定一个無理数。有理数和無理数統称为实数①。

3° 绝对值 假若 x 为实数, 則用下列条件所确定的非負数 $|x|$, 称为 x 的绝对值:

$$|x| = \begin{cases} x, & \text{若 } x \geq 0, \\ -x, & \text{若 } x < 0. \end{cases}$$

对于任何的实数 x 和 y , 有以下的不等式成立:

$$|x| - |y| \leq |x+y| \leq |x| + |y|.$$

4° 上确界和下确界 設 $X = \{x\}$ 为实数的有界集合。若:

(1) 每一个 $x \in X$ ② 滿足不等式

$$x \geq m;$$

① 以后若沒有相反的附帶說明, 数这个字我們將理解为实数。

② 符号 $x \in X$ 表示 x 属于集合 X 。

(2) 对于任何的 $\varepsilon > 0$, 存在有 $x' \in X$, 使

$$x' < m + \varepsilon,$$

則数 $m = \inf \{x\}$ 称为集合 X 的下确界。

同样, 若:

(1) 每一个 $x \in X$ 满足不等式

$$x \leq M,$$

(2) 对于任何的 $\varepsilon > 0$, 存在有 $x'' \in X$, 使

$$x'' > M - \varepsilon,$$

則数 $M = \sup \{x\}$ 称为集合 X 的上确界。

若集合 X 下方無界, 則通常說

$$\inf \{x\} = -\infty;$$

若集合 X 上方無界, 則認為

$$\sup \{x\} = +\infty.$$

5°. 絕對誤差和相對誤差 設 $a (a \neq 0)$ 是被測的量的准确数值, 而 x 是这个量的近似值, 則

$$\Delta = |x - a|$$

称为絕對誤差, 而

$$\delta = \frac{\Delta}{|a|}$$

称为被測的量的相對誤差。

假若 x 的絕對誤差不超过它的第 n 个有效数字的單位的一半, 則說 x 有 n 位准确的数字。

利用数学归纳法求証下列等式对任何自然数 n 皆成立:

$$1. 1 + 2 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}.$$

$$2. 1^2 + 2^2 + \cdots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

$$3. 1^3 + 2^3 + \cdots + n^3 = (1 + 2 + \cdots + n)^2.$$

$$4. 1 + 2 + 2^2 + \cdots + 2^{n-1} = 2^n - 1.$$

$$5. 設 a^{[n]} = a(a-h) \cdots [a - (n-1)h] 及 a^{[0]} = 1. 求証$$

$$(a+b)^{[n]} = \sum_{m=0}^n C_n^m a^{[n-m]} b^{[m]},$$

其中 C_n^m 是由 n 个元素中选取 m 个的组合数, 由此推出牛顿的二项式公式。

6. 证明贝努里不等式:

$$(1+x_1)(1+x_2)\cdots(1+x_n) \geq 1+x_1+x_2+\cdots+x_n,$$

式中 $x_1, x_2, \dots, x_n$ 是符号相同且大于 -1 的数。

7. 证明若 $x > -1$, 则不等式

$$(1+x)^n \geq 1+nx \quad (n > 1)$$

为真, 且仅当 $x=0$ 时, 等号成立。

8. 证明不等式

$$n! < \left(\frac{n+1}{2}\right)^n \quad \text{当 } n > 1.$$

提示 利用不等式

$$\left(\frac{n+2}{n+1}\right)^{n+1} = \left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^{n+1} > 2 \quad (n=1, 2, \dots).$$

9. 证明不等式

$$2! \cdot 4! \cdots (2n)! > [(n+1)!]^n \quad \text{当 } n > 1.$$

10. 证明不等式

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdots \frac{2n-1}{2n} < \frac{1}{\sqrt{2n+1}}.$$

11. 设 c 为正整数, 而不为整数的平方, 且 A/B 为确定实数 $\sqrt{c}$ 的分割, 其中 B 类包含所有合于 $b^2 > c$ 的正有理数 b , 而 A 类包含所有其余的有理数。求证在 A 类中无最大数, 而在 B 类中也无最小数。

12. 确定数 $\sqrt[3]{2}$ 的分割 A/B 用下面的方法来作成: A 类包含所有的有理数 a , 而 $a^3 < 2$; B 类包含所有其余的有理数。证明在 A 类中无最大数, 而在 B 类中亦无最小数。

13. 作出适当的分割, 然后证明等式:

$$(a) \sqrt{2} + \sqrt{8} = \sqrt{18}.$$

$$(6) \sqrt{2} \sqrt{3} = \sqrt{6}.$$

14. 建立确定数 $2^{\sqrt{2}}$ 的分割。

15. 求証任何非空且下方有界的数集有下确界, 而任何非空且上方有界的数集有上确界。

16. 証明一切有理真分式 $\frac{m}{n}$ (式中 m 及 n 为自然数, 且 $0 < m < n$) 的集合無最小及最大的元素。并求集合的上确界及下确界。

17. 有理数 r 满足不等式

$$r^2 < 2$$

求这些有理数 r 所成集合的下确界和上确界。

18. 設 $\{-x\}$ 为数的集合, 这些数是与 $x \in \{x\}$ 符号相反の数, 証明

$$(a) \inf\{-x\} = -\sup\{x\}; \quad (6) \sup\{-x\} = -\inf\{x\}.$$

19. 設 $\{x+y\}$ 为所有 $x+y$ 这些和的集合, 其中 $x \in \{x\}$ 及 $y \in \{y\}$, 証明等式:

$$(a) \inf\{x+y\} = \inf\{x\} + \inf\{y\};$$

$$(6) \sup\{x+y\} = \sup\{x\} + \sup\{y\}.$$

20. 設 $\{xy\}$ 为所有 xy 乘积的集合, 其中 $x \in \{x\}$ 及 $y \in \{y\}$, 且 $x \geq 0$ 及 $y \geq 0$. 証明等式:

$$(a) \inf\{xy\} = \inf\{x\} \inf\{y\}; \quad (6) \sup\{xy\} = \sup\{x\} \sup\{y\}.$$

21. 求証不等式:

$$(a) |x-y| \geq \left| |x| - |y| \right|;$$

$$(6) |x+x_1+\cdots+x_n| \geq |x| - (|x_1|+\cdots+|x_n|).$$

解不等式:

$$22. |x+1| < 0.01.$$

$$23. |x-2| \geq 10.$$

$$24. |x| > |x+1|.$$

$$25. |2x-1| < |x-1|.$$

$$26. |x+2| + |x-2| \leq 12.$$

$$27. |x+2| - |x| > 1.$$

28. $\left| |x+1| - |x-1| \right| < 1$. 29. $|x(1-x)| < 0.05$.

30. 证明恒等式

$$\left(\frac{x+|x|}{2} \right)^2 + \left(\frac{x-|x|}{2} \right)^2 = x^2.$$

31. 当测量长度 10 厘米时, 绝对误差为 0.5 毫米; 当测量距离 500 千米时, 绝对误差等于 200 米。那种测量较为精确?

32. 设数

$$x = 2.3752$$

的相对误差为 1%, 试求此数包含若干位准确数字?

33. 数

$$x = 12.125$$

包含 3 位准确数字。试求此数的相对误差?

34. 矩形的边等于:

$$x = 2.50 \text{ 厘米} \pm 0.01 \text{ 厘米},$$

$$y = 4.00 \text{ 厘米} \pm 0.02 \text{ 厘米}.$$

这个矩形的面积 S 界于甚么范围内? 设其边长取平均值时, 矩形面积的绝对误差 Δ 和相对误差 δ 为何?

35. 物体的重量 $P = 12.59 \text{ 克} \pm 0.01 \text{ 克}$, 其体积 $v = 3.2 \text{ 厘米}^3 \pm 0.2 \text{ 厘米}^3$ 。若对物体的重量和体积都取其平均值, 试求物体的比重, 并估计比重的绝对误差和相对误差。

36. 圆半径

$$r = 7.2 \text{ 米} \pm 0.1 \text{ 米}.$$

若取 $\pi = 3.14$, 则求出的圆面积的最小相对误差为何?

37. 对直角平行六面体测得

$$x = 24.7 \text{ 米} \pm 0.2 \text{ 米};$$

$$y = 6.5 \text{ 米} \pm 0.1 \text{ 米};$$

$$z = 1.2 \text{ 米} \pm 0.1 \text{ 米}.$$

这个平行六面体的体积 v 界于甚么範圍內？若測量的各結果都取其平均值，則所求出平行六面体的体积可能有的絕對誤差和相對誤差為何？

38. 測量正方形的边 x ，此处 $2 \text{ 米} < x < 3 \text{ 米}$ ，应有多小的絕對誤差，才能使此正方形面积有可能精确到 0.001 米^2 ？

39. 假定矩形每边的長皆不超过 10 米 ，为了使根据測量所計算出来的面积与原面积之差不超过 0.01 平方厘米 ，問測量矩形的边 x 与 y 时，許可的絕對誤差 Δ 的值多大？

40. 設 $\delta(x)$ 及 $\delta(y)$ 为数 x 和 y 的相對誤差， $\delta(xy)$ 为数 xy 的相對誤差。求証

$$\delta(xy) \leq \delta(x) + \delta(y) + \delta(x)\delta(y).$$

§ 2. 叙列的理論

1°. 叙列的極限的概念 假設对于任何的 $\varepsilon > 0$ ，有数 $N = N(\varepsilon)$ ，使

$$\text{当 } n > N \text{ 时, } |x_n - a| < \varepsilon,$$

則称叙列 $x_1, x_2, \dots, x_n, \dots$ 有極限 a (或者說, 收斂于 a)，亦即

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a,$$

其中，

$$\text{若 } \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 0,$$

則称 x_n 为無穷小。

沒有極限的叙列，称为發散的。

2°. 極限存在的准則

(1) 設

$$y_n \leq x_n \leq z_n$$

及

$$\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = \lim_{n \rightarrow \infty} z_n = c,$$

則

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = c.$$

(2) 單調而且有界的叙列有極限。

(3) 哥西判別法 叙列 $\{x_n\}$ 的極限存在的必要而且充足的条件是：对于

任何的 $\varepsilon > 0$, 有数 $N = N(\varepsilon)$ 使当 $n > N$ 和 $P > 0$ 时 $|x_n - x_{n+p}| < \varepsilon$ 。

3°. 关于叙列的極限的基本定理 設

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n \quad \text{和} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} y_n$$

存在, 則有:

$$(1) \text{ 若 } x_n \leq y_n, \text{ 則 } \lim_{n \rightarrow \infty} x_n \leq \lim_{n \rightarrow \infty} y_n;$$

$$(2) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} (x_n \pm y_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n \pm \lim_{n \rightarrow \infty} y_n;$$

$$(3) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} (x_n y_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n \lim_{n \rightarrow \infty} y_n;$$

$$(4) \text{ 若 } \lim_{n \rightarrow \infty} y_n \neq 0, \text{ 則 } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_n}{y_n} = \frac{\lim_{n \rightarrow \infty} x_n}{\lim_{n \rightarrow \infty} y_n}.$$

4°. 数 e 叙列

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \quad (n=1, 2, \dots)$$

有确定的極限

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e = 2.7182818284\dots$$

5°. 無窮極限 符号

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \infty$$

表示对于任何的 $E > 0$, 有数 $N = N(E)$, 使

$$\text{当 } n > N \text{ 时, } |x_n| > E.$$

6°. 聚点 設已知叙列 $x_n (n=1, 2, \dots)$ 有子叙列

$$x_{p_1}, x_{p_2}, \dots, x_{p_n}, \dots$$

适合

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_{p_n} = \xi,$$

則称数 ξ (或符号 ∞) 为已知叙列 $x_n (n=1, 2, \dots)$ 的聚点。

一切有界的叙列至少有一个有穷的聚点 (波尔查諾-外尔斯特拉斯原理)。若这个聚点是唯一的, 則它即为已知叙列的有穷極限。

叙列 x_n 的最小聚点 (有穷的或無穷的)

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$$

称为下極限，而它的最大聚点

$$\overline{\lim_{n \rightarrow \infty} x_n}$$

称为此叙列的上極限。

等式

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \overline{\lim_{n \rightarrow \infty} x_n}$$

为叙列 x_n 的(有穷或无穷)極限存在的必要而且充分的条件。

41. 設

$$x_n = \frac{n}{n+1} \quad (n=1, 2, \dots)$$

証明

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 1,$$

即: 对于任一个給定的 $\varepsilon > 0$, 求数 $N = N(\varepsilon)$ 使得

$$\text{在 } n > N \text{ 时, } |x_n - 1| < \varepsilon.$$

填下表:

ε	0.1	0.01	0.001	0.0001	
N					

42. 假若:

$$(a) x_n = \frac{(-1)^{n+1}}{n}; \quad (b) x_n = \frac{2n}{n^3 + 1};$$

$$(B) x_n = \frac{1}{n!}; \quad (r) x_n = (-1)^n \cdot 0.999^n,$$

对于任何的 $\varepsilon > 0$, 求出数 $N = N(\varepsilon)$, 使

$$\text{当 } n > N \text{ 时, } |x_n| < \varepsilon;$$

而証明 $x_n (n=1, 2, \dots)$ 为无穷小(就是說, 有極限值 0)。

对应着上面四种情形, 填下表:

ε	0.1	0.01	0.001	
N				

43. 証明叙列

$$(a) x_n = (-1)^n n, (b) x_n = 2^{\sqrt{n}}, (B) x_n = \lg(\lg n) \quad (n \geq 2)$$

当 $n \rightarrow \infty$ 时, 有無穷極限 (即成为無穷大), 即: 对任意的 $E > 0$, 求数 $N = N(E)$, 使

$$\text{当 } n > N \text{ 时, } |x_n| > E.$$

对应着上面的每一种情形填下表:

E	10	100	1000	10000	
N					

44. 求証

$$x_n = n^{(-1)^n} \quad (n = 1, 2, \dots)$$

無界, 但当 $n \rightarrow \infty$ 时, 它并不成为無穷大。

45. 用不等式表示下列各式:

$$(a) \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \infty; (b) \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = -\infty; (B) \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = +\infty.$$

設 n 跑过自然数列, 求下列各式之值:

$$46. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{10000n}{n^2 + 1}.$$

$$47. \lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{n+1} - \sqrt{n}).$$

$$48. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[3]{n^2} \sin n!}{n+1}.$$

$$49. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(-2)^n + 3^n}{(-2)^{n+1} + 3^{n+1}}.$$

$$50. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1+a+a^2+\dots+a^n}{1+b+b^2+\dots+b^n} \quad (|a| < 1, |b| < 1).$$

$$51. \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{n^2} + \frac{2}{n^2} + \dots + \frac{n-1}{n^2} \right).$$

$$52. \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{1}{n} - \frac{2}{n} + \frac{3}{n} - \dots + \frac{(-1)^{n-1}n}{n} \right|.$$

$$53. \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\frac{1^2}{n^3} + \frac{2^2}{n^3} + \dots + \frac{(n-1)^2}{n^3} \right].$$

$$54. \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\frac{1^2}{n^3} + \frac{3^2}{n^3} + \dots + \frac{(2n-1)^2}{n^3} \right].$$

$$55. \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{2} + \frac{3}{2^2} + \frac{5}{2^3} + \dots + \frac{2n-1}{2^n} \right).$$

$$56. \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \cdots + \frac{1}{n(n+1)} \right].$$

$$57. \lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{2} \sqrt[4]{2} \sqrt[8]{2} \cdots \sqrt[2^n]{2}).$$

証明下列等式：

$$58. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{2^n} = 0.$$

$$59. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2^n}{n!} = 0.$$

$$60. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^k}{a^n} = 0 \quad (a > 1).$$

$$61. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a^n}{n!} = 0.$$

$$62. \lim_{n \rightarrow \infty} nq^n = 0, \text{ 若 } |q| < 1.$$

$$63. \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a} = 1 \quad (a > 0).$$

$$64. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\log_a n}{n} = 0 \quad (a > 1).$$

$$65. \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n} = 1.$$

$$66. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt[n]{n!}} = 0.$$

67. 当 n 充分大时, 下面的式子那个大些:

(a) $100n + 200$ 或 $0.01n^2$?; (b) 2^n 或 n^{1000} ?

(B) 1000^n 或 $n!$?

68. 証明

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdots \frac{2n-1}{2n} \right) = 0.$$

提示 参閱題 10.

69. 証明叙列

$$x_n = \left(1 + \frac{1}{n} \right)^n \quad (n = 1, 2, \dots)$$

是單調增的, 且上方有界。而叙列

$$y_n = \left(1 + \frac{1}{n} \right)^{n+1} \quad (n = 1, 2, \dots)$$

是單調減的, 且下方有界。由此推出这些叙列有公共的極限:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n} \right)^n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n} \right)^{n+1} = e.$$

提示 先作出比 $\frac{x_{n+1}}{x_n}$, $\frac{y_n}{y_{n-1}}$ 并利用题 7 的不等式。

70. 証明

$$0 < e - \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n < \frac{3}{n} \quad (n=1, 2, \dots).$$

当指数 n 是甚么样的数值时, 表示式 $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ 与数 e 之差小于 0.001?

71. 設 p_n ($n=1, 2, \dots$) 为趋于 $+\infty$ 的任意数列, 而 q_n ($n=1, 2, \dots$) 为趋于 $-\infty$ 的任意数列。求証

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{p_n}\right)^{p_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{q_n}\right)^{q_n} = e.$$

72. 已知

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e,$$

求証
$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \dots + \frac{1}{n!}\right) = e.$$

由此推出公式

$$e = 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \dots + \frac{1}{n!} + \frac{\theta_n}{n!n},$$

其中 $0 < \theta_n < 1$, 并計算数 e 准确到 10^{-5} 。

73. 証明数 e 为無理数。

74. 証明不等式

$$\left(\frac{n}{e}\right)^n < n! < e \left(\frac{n}{2}\right)^n.$$

75. 証明不等式

$$(a) \frac{1}{n+1} < \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) < \frac{1}{n},$$

式中 n 为任意的自然数。

$$(b) 1 + a < e^a,$$

其中 a 为异于零的实数。