组合数学引论

许胤龙
孙淑玲
编著

中国科学技术大学出版社

组合数学引论

孙淑玲　许胤龙　编著

中国科学技术大学出版社
1999·合肥

图书在版编目(CIP)数据

组合数学引论/孙淑玲，许胤龙编著. 一合肥：中国科学技术大学出版社，1999.2
ISBN 7-312-01035-0

Ⅰ. 组…
Ⅱ. ①孙… ②许…
Ⅲ. 组合数学
Ⅳ. O157

中国版本图书馆 CIP 数据核字(98)第 33405 号

中国科学技术大学出版社出版发行
(安徽省合肥市金寨路 96 号，230026)
安徽省金寨县印刷厂印刷
全国新华书店经销

开本：850×1168/32　印张：10.625　字数：276 千
1999 年 2 月第 1 版　1999 年 2 月第 1 次印刷
印数：1—3000 册
定价：11.00 元

前　　言

组合数学主要研究一组离散对象满足一定条件的安排的存在性，以及这种安排的构造、枚举计数及优化等问题，它是整个离散数学的一个重要组成部分.

人们对组合数学的兴趣可以追溯到很早的年代，例如四千多年前我国古代的《河图》、《洛书》中就已给出了 3 阶幻方问题的解答. 历史上，组合数学的发展与数论及概率计算有着密切的联系，有些问题最初是以数学游戏的形式出现的，后来在实际背景的刺激下获得了新的生命力和发展. 近几十年来，计算机科学、数字通信理论、规划论和实验设计等理论和应用学科的发展，特别是 50 年代末以来计算机科学的飞速发展，一方面对离散数据结构的设计与研究提出了迫切的要求，另一方面又对大型数据结构的研究和求解提供了现实的可能性，因此，为许多离散对象的安排问题提供数学模型和研究方法的组合数学也获得了极大的发展. 目前，组合数学不仅已成为数学中的一个重要分支，而且还是计算机科学、管理科学及其他许多学科中一些分支的数学基础.

组合数学与计算机科学有着十分密切的关系，用计算机求解一个问题时，总要涉及到设计离散数据结构并对其进行运算，算法所需的运算次数及存储单元量是评价一个算法的两个基本标准，即所谓的时间复杂度和空间复杂度，组合数学为其提供了实用的分析方法和技巧. 因此，国内外许多高等学校都把组合数学作为计算机系的一门基础理论课.

本书以组合计数问题为重点，介绍了组合数学的基本原理和思想方法. 全书共分 8 章：鸽巢原理，排列与组合，容斥原理，递推关系，生成函数，Pólya 计数理论，相异代表系，组合设计. 取材的

侧重点在于体现组合数学在计算机科学特别是在算法分析领域中的应用. 每章后面都附有一定数量的习题，供读者练习和进一步思考. 本书可作为计算机专业、应用数学专业研究生和高年级本科生的教材或教学参考书，也可供从事这方面工作的教学、科研和技术人员参考.

本书是作者总结对计算机系高年级本科生和研究生教学的实践经验，在原有讲义的基础上修改整理而成的. 孙淑玲编写第 5～8 章，许胤龙编写绪论及第 1～4 章.

在本书编写过程中，得到了中国科学技术大学计算机系领导和老师们的支持与帮助，在此谨致谢意.

由于作者水平有限，书中难免存在缺点和错误，恳请读者批评指正.

作　者

1998 年 4 月于中国科大

内 容 简 介

本书以组合计数问题为重点，介绍了组合数学的基本原理和思想方法，全书共分 8 章：鸽巢原理，排列与组合，容斥原理，递推关系，生成函数，Pólya 计数理论，相异代表系，组合设计. 取材的侧重点在于体现组合数学在计算机科学特别是在算法分析领域中的应用. 每章后面都附有一定数量的习题，供读者练习和进一步思考.

本书可作为计算机专业、应用数学专业研究生和高年级本科生的教材或教学参考书，也可供从事这方面工作的教学、科研和技术人员参考.

目　次

绪　论

许多组合问题经常出现在我们的日常工作、生活及娱乐中，相信本书的读者在此之前一定接触过组合问题，例如：

（1）n 个队之间的循环赛总共有多少场比赛？

（2）如何设计一个学校的课程表，使得同一间教室、同一个班级以及同一位教员在同一时间内没有安排两门课程？

（3）一位旅客要去 n 个城市旅游，如何安排其行程，使得总的行程最短、花费最少？

组合数学也称为组合学或组合分析，它是一门既古老又年青的数学分支．说其古老，是因为它所研究的有些问题可以追溯到很久很久以前，组合学在 17～18 世纪与数论、概率计算交叉地发展，特别是在数学游戏中有着较深的根源，以往只是它的娱乐性及高雅性吸引人们去研究它．近几十年来，计算机科学、数字通信理论、规划论和试验设计等理论和应用学科的发展促进了组合学的飞速发展，特别是本世纪 50 年代末以来计算机科学的飞速发展，又使这门古老的数学分支焕发了新的生机．计算机惊人的计算速度，使得其可以解决以前难以想像的大规模计算问题，但计算机是不能独立工作的，它所执行的只是人编写的程序，这些程序中经常包含了许多组合问题的求解算法．现在，组合学不仅在理论科学，而且在应用科学中也产生了很大的作用，它的“思想”和“技巧”在物理学、生物学乃至社会科学中都有应用．

组合学所研究的中心问题是“按照一定的规则（模式）来安排有限多个对象”，它提出的问题有如下 4 类：

1. 安排的存在性(存在性问题)

如果人们想把有限多个对象按照它们所应满足的条件来进行安排,当符合要求的安排并非显然存在或显然不存在时,首要的问题就是要证明或否定它的存在.

例如,外语教研室有 4 位教员 A,B,C,D,下学期要开设英语、日语、德语、法语 4 门外语课. 设 A 与 B 都能教英语、日语,C 能教英语、德语、法语,D 能教德语. 问能否设计一种工作安排方案,使得每位教员在下学期教且仅教一门外语课?

在平面上将每位教员和每门外语课分别用一个点来表示,若教员 x 能教外语课 y,则在相应的两点间连一条边. 如此构造出图 1,将原问题变为在图 1 中找出 4 条边,使这 4 条边两两之间无公共端点.

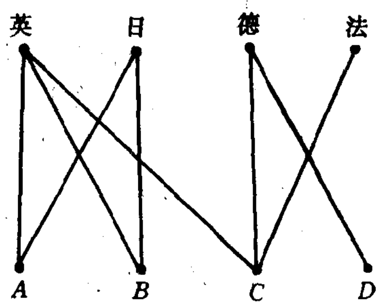

图 1

从图 1 可以看出,有两种不同的工作安排方案:A 教英语、B 教日语、C 教法语、D 教德语,或者 A 教日语、B 教英语、C 教法语、D 教德语. 但如果 A,B,C,D 能教的语种分别为英语与日语、德语与法语、英语、日语,就不存在一种每位教员教且仅教一门外语课的工作安排.

从上例可以看出,满足一定条件的安排并不总是存在的,这就给我们提出了这样一个问题:在什么样的条件下这种安排是存在

的？这也是安排的存在性所研究的中心问题.

2. 安排的枚举和分类(计数问题)

如果所要求的安排存在，则可能有多种不同的安排. 这又经常给人们提出这样的问题：有多少种可能的安排方案？如何对安排的方案进行分类？

例如，对正三角形的 3 个顶点进行红、蓝两色着色，共有图 2 所示的 $2^3=8$ 种方案.

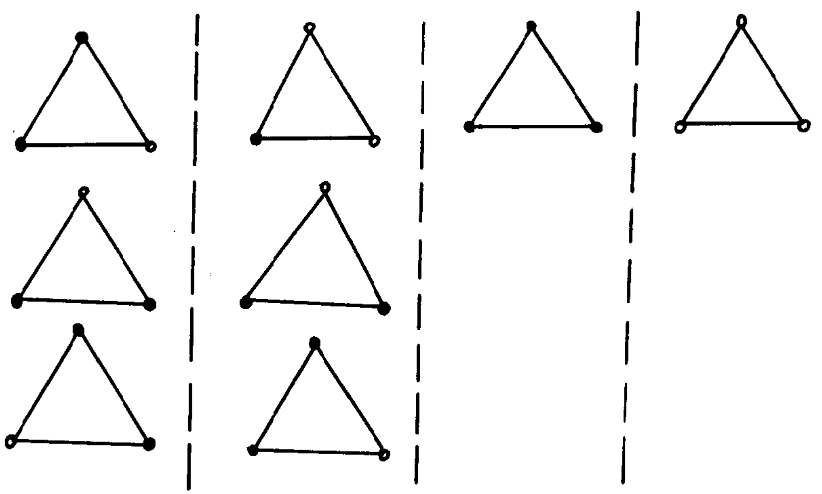

图 2

在图 2 中，如果我们将经旋转后互相重合的两种方案看成是同类的，则图中的每一列就是一类着色方案，共有 4 类着色方案.

虽然任何组合问题中都包含存在性问题和计数问题，但通常来说，若一组合问题的存在性问题需作大量研究的话，则其计数问题的难度是难以想像的. 然而，若一组合问题已有一特定解，则还是有可能计算出其解的个数或对其进行分类的.

3. 构造性问题

若一组合问题有解，则往往需要给出求其某一特定解的算法，这就是所谓的构造性问题.

例 幻方问题.

将 $1,2,\cdots,n^2$ 共 n^2 个整数填入 $n\times n$ 的棋盘中，使每行、每列及两条对角线上的元素之和均相等. 满足上述条件的一个安排称为一个 n 阶幻方. 图 3 中的(a)和(b)分别是一个 3 阶幻方和一个 4 阶幻方.

8	1	6
3	5	7
4	9	2

(a)

16	3	2	13
5	10	11	8
9	6	7	12
4	15	14	1

(b)

图 3

一个 n 阶幻方中，所有整数的和为

$$1+2+\cdots+n^2=\frac{n^2(n^2+1)}{2},$$

因为每行、每列的和相等，共有 n 行和 n 列，所以每行或每列的和均为 $\frac{n(n^2+1)}{2}$. 组合学所研究的是 n 取何值时 n 阶幻方存在，并且要找出构造 n 阶幻方的一般方法. 容易证明 2 阶幻方是不存在的，但对其余所有的正整数 n，n 阶幻方都可以构造出来. 有许多构造 n 阶幻方的方法，这里我们给大家介绍 de la Loubére 构造奇数阶幻方的方法：首先将 1 放入第一行的中间位置上；若 i 已填入，则除了以下几种特殊情况外，将 $i+1$ 填入 i 所在位置的右边一列的上一行：

(1) 若 i 在第一行，则将 $i+1$ 填入 i 所在位置的右边一列的

底行；

（2）若 i 在最后一列，则将 $i+1$ 填入 i 的上一行的第一列；

（3）若 i 在第一行的最后一列或 $i+1$ 该填的位置已被填上，则 $i+1$ 直接填入 i 所在位置的正下方.

利用 de la Loubére 方法构造的 5 阶幻方如图 4 所示.

17	24	1	8	15
23	5	7	14	16
4	6	13	20	22
10	12	19	21	3
11	18	25	2	9

图 4

4. 优化问题

此类问题是在一定的条件下找出一个(或几个)最优或近乎最优的安排方案.

例如，产地 $A_1, A_2, \cdots, A_m$ 生产某种产品的产量分别为 $a_1, a_2, \cdots, a_m$，销地 $B_1, B_2, \cdots, B_n$ 对该种产品的需求量分别为 $b_1, b_2, \cdots, b_n$. 假设从产地 A_i 到销地 B_j 的单位运费为 c_{ij}，产和销是平衡的，即

$$\sum_{i=1}^{m} a_i = \sum_{j=1}^{n} b_j.$$

现问应怎样合理安排该种产品的运输方案，使其总运费最少?

设从 A_i 到 B_j 的运量为 x_{ij}，则原问题即求解方程

$$\min Z = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} c_{ij} x_{ij},$$

并满足约束条件

(i) $\sum_{j=1}^{n} x_{ij} \leqslant a_i$, $\sum_{i=1}^{m} x_{ij} \leqslant b_j$, $x_{ij} \geqslant 0$ $(1 \leqslant i \leqslant m, 1 \leqslant j \leqslant n)$;

(ii) $\sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} x_{ij} = \sum_{i=1}^{m} a_i = \sum_{j=1}^{n} b_j$.

本书作为组合学的一本基础教材,只涉及前 3 类问题,并且以计数问题为重点来介绍组合学的基本理论和方法.

第1章 鸽巢原理

鸽巢原理(又叫抽屉原理)指的是一件简单明了的事实:为数众多的一群鸽子飞进不多的巢穴里,则至少有一个巢穴飞进了两只或更多的鸽子.

这个原理并无深奥之处,其正确性也是显而易见的,但利用它可以解决许多有趣的组合问题,得到一些很重要的结论,它在数学的历史上起了很重要的作用.

1.1 鸽巢原理的简单形式

鸽巢原理的简单形式可以描述为:

定理 1.1.1 如果把 $n+1$ 个物品放入 n 个盒子中,那么至少有一个盒子中有两个或更多的物品.

证明 如果每个盒子中至多有一个物品,那么 n 个盒子中至多有 n 个物品,而我们共有 $n+1$ 个物品,矛盾.故定理成立.

鸽巢原理只断言存在一个盒子,该盒中有两个或两个以上的物品,但它并没有指出是哪个盒子,要想知道是哪一个盒子,则只能逐个检查这些盒子.所以,这个原理只能用来证明某种安排的存在性,而对于找出这种安排却毫无帮助.

例 1 共有 12 个属相,今有 13 个人,则必有两人的属相相同.

例 2 在边长为 1 的正方形内任取 5 点,则其中至少有两点,它们之间的距离不超过$\frac{\sqrt{2}}{2}$.

证明 把边长为 1 的正方形分成 4 个边长为$\frac{1}{2}$的小正方形,