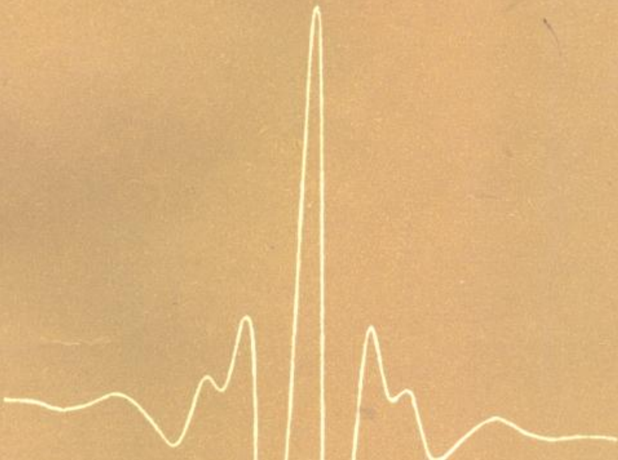
小波与算子

第一卷

〔法〕Y·迈耶著

尤众 译

邓东皋、龙瑞麟校



世界图书出版公司

小波与算子

第1卷

《小波》

〔法〕Y. 迈耶 著
尤众 译
邓东皋、龙瑞麟 校

世界图书出版公司
北京・广州・上海・西安
1992

内 容 简 介

本书是 Y. Meyer 和 R. Coifman 著《小波与算子》("Ondelettes et Opérateurs", Hermann 出版社, 1990) 的第一卷. 这套书是小波分析方面的第一部系统性著作, 其理论新颖, 思想深刻. 本书介绍了多分辨率分析、小波正交基的构造、斜交小波、小波与函数空间的关系等内容.

本书是为一切愿意学习小波的读者而写的, 适用于从事数值分析、数字图象处理、通讯理论、数据处理、函数论、偏微分方程、非线性分析、量子场论等领域的数学、物理工作者和科技工程人员参考, 并可作为有关专业研究生的教材.

Yves Meyer

Ondelettes

Hermann, Editeurs des Sciences et des Arts, 1990

小波与算子 第1卷

《小波》

〔法〕Y. 迈耶 著

尤众 译

邓东皋、龙瑞麟 校

世界图书出版公司北京分公司出版

北京朝阳门内大街 137 号

北京昌平百善印刷厂印刷

新华书店北京发行所发行 各地新华书店经售

*

1992年 6 月第 一 版 开本: 850×1168 1/32

1992年 6 月第一次印刷 印张: 9.625

印数: 0001-2000册 字数: 23.10万字

ISBN: 7-5062-1495-4/O·66

定价: 11.90元

中译本前言

“小波分析”是近年出现的一种新的数学方法．它被纯粹数学家与研究石油勘探数据处理、量子场论、声学等领域的应用数学家独立地发现，也是多元调和分析 40 年来发展的一个突破性的进展，它是纯粹数学与应用数学殊途同归的又一个光辉例子．

历史已经证明，传统的 Fourier 分析是纯粹数学与应用数学的一个重要工具．它几乎渗透到了数学的各个分支．传统的 Fourier 分析，从函数 e^{ix} 出发，成功地构造了 L^2 空间的一种正交展开．但因为 e^{ix} 不是局部化的，所以传统的 Fourier 分析不能作局部分析，而且它甚至不能提供 L^p 空间（$p\neq 2$）的无条件基，因此把它应用到 L^2 以外的空间，需要加上繁冗的演算与推导．小波分析既保留了 Fourier 分析的优点，又弥补了它上述的不足之处．它从有限个具有正则性、局部性与振动性的小波函数出发，通过平移与展缩，为 L^2 空间提供了一类新的正交基——小波正交基．这类正交基使得调和分析中最常见的一类算子（Calderon－Zygmund 算子），在其上的表现是几乎对角化了的矩阵，因而使得它们构成了已知绝大多数常用的 Banach 空间的无条件基．故小波分析为各个空间的分析提供了较传统 Fourier 分析更有力的工具．另外，小波函数的局部性，保证了用小波正交基可以进行局部分析．加上刚刚发展起来的一套快速算法，便使得小波分析在函数论、算子论、偏微分方程、非线性分析、数值分析以及图象处理、信号传输、数据压缩、边缘探测等方面，都获得了重要的应用，并且它的理论与应用范围，正在迅速深入与扩大．

本书是 Y. Meyer 与 R. Coifman 合作撰写的《小波与算子》的三卷本著作（第Ⅰ、Ⅱ卷是 Y. Meyer 写的）之一卷．这是小波分析方面的第一套系统性著作．它详细地研究了各种小波基

的构造，小波基与函数空间的关系，Calderon－Zygmund 算子在小波基上的表现，以及小波分析在复分析、算子论、偏微分方程与非线性分析等方面的应用．其中特别是本书的第Ⅰ卷——《小波》，是为一切愿意学习小波的读者写的，并不要求有基础数学的特殊训练．本书第Ⅱ、Ⅲ卷的理论性较强，适用于学习与研究基础数学的学生和专家．本书的出版，可以说是小波理论形成的标志．

本书著者Y. Meyer是现在形式小波正交基存在性的证明者．正是他和R. Coifman以及他们的学生，长期从事Calderon计划的实现（以关于Lipschitz曲线上Cauchy积分算子L^2有界的Calderon猜测的解决为转折点），建立了小波理论的主要框架，为小波理论的建立做出了最重要的贡献．由他们撰写的这套书，其思想的新颖与理论的深刻是不言而喻的．

本人于1988年春访问美国Yale大学期间，承蒙R. Coifman教授向我介绍了小波分析并赠我这套书的大部分打印稿与全部手稿．回国后，我即邀请尤众与王耀东副教授把它们翻译出来，并由北京大学数学研究所印成油印讲义，于1990年初开始在国内交流．这套讲义在我国传播小波理论方面起了一定的作用．在此，我们向R. Coifman教授和Y. Meyer教授对中国人民的友好情谊与对发展中国科学事业的热心支持表示衷心的感谢．本书于1990年由法国Hermann出版社陆续出版后，译者根据正式出版的文本对译文作了全面的修改，我们还邀请了中国科学院数学研究所龙瑞麟教授，一起对全书进行校订，最后由世界图书出版公司出版．本书中译本的出版，还得到了数学天元基金会的大力支持，其中特别是得到了程民德教授的热情关心与指导．在此，我们一并对上述单位与个人，表示衷心的感谢．

邓东皋

1991. 10. 7. 于中山大学

"有人成功地发现了他人一直未能发现的事物；在上一世纪尚混沌一片的东西，在这一世纪却豁然开朗了；科学和艺术是在反反复复的加工提炼中逐渐成型的. 我没有放弃用各种方法去探索、去尝试我的力量还不足以发现的东西，我为后人创造方便，提供更灵活便利的方法. 我的后继者也会作出同样的努力. 这就是困难不能使我们失望，也不能让我们无所作为的原因."

蒙田 (Montaigne)

——《随笔》卷二

第XII章

目　录

导　论

长期以来，分析中的基函数是余弦函数、正弦函数和虚指数函数．函数 $(2\pi)^{-\frac{1}{2}}e^{ikx}$ $(k\in\mathbb{Z})$ 构成了空间 $L^2[0,2\pi]$ 的一组正交基（指规范正交，下同）．Fourier 级数是它们的线性组合 $\sum\alpha_k e^{ikx}$．对它们的研究一直是并且仍然是数学分析中问题和发现的用之不尽的源泉．之所以问题多，这主要是因为缺乏一本好的字典，用它可以把函数的性质翻译到它的 Fourier 系数上．这里有一个例子说明这个困难．J. P. Kahane, Y. Katznelson 和 K. de Leeuw 已经证明了（〔150〕）：从任一个平方可和函数 $f(x)$ 出发，为了得到一个连续函数 $g(x)$，只需或者增大 $f(x)$ 的 Fourier 系数的模，或者保持它不变并适当地改变系数的位相．因此不可能仅根据 Fourier 系数大小的阶就预知函数的性质（大小，正则性）．更清楚地认识这些仍然是困难的，许多问题还有待解决．

在 80 年代初，一些科学家就使用了“小波”作为传统 Fourier 分析的一个替代物．用这个替代物可以期待把数值分析做得更简单，并把某些瞬时现象的综合做得更有力．J. S. Lienard 和 X. Rodet(〔167〕，〔206〕）涉及到声学信号（语言和音乐）的数值处理，J. Morlet 的小波（〔124〕）则是用来贮存和表示在石油勘测中收集到的地震信号．从数学方面来说，探索也在积极地进行．为说明问题，我们只要提到 R. Coifman 和 G. Weiss 创立的“原子”和“分子”学说就够了．这些“原子”和“分子”构成了不同函数空间的基的组成部分．它们是很明确地被确定的，对使用者来说，又是很简单的．某些原子分解可以通过对A. Calderon 的一个著名恒等式的离散化来得到．而在这个恒等式中，

"小波"已经是被隐蔽地勾划出来了. 这个恒等式后来又被 Morlet 和他的合作者们重新发现……. 最后, L. Carleson 使用了非常像"小波"的函数构造了 Stein 和 Weiss 的空间 H^1 的无条件基.

这些不同的工作显示了某种"和谐性"; 由此可以看出, 应该而且可以用数学上有根据的、又是普遍适用的、有内在联系的理论把它们统一起来. 本书将要研究的**小波正交基**就取代了 Lienard, Morlet 和 Rodet 的经验"小波".

正是这些小波正交基给出了 Coifman 和 Weiss 所发现的"原子分解"的一个直接方法, 小波正交基也首次构造出了通常函数空间的**无条件基**. 小波基是普遍适用的; 一切准备就绪, "伸手可得", 这就是说: 函数或分布是小波级数的和, 与用 Fourier 级数来做这件事的情形不同, 这些级数的系数以简单的方式精确并忠实地表达了这些函数或分布的性质.

这样, 人们就有了一个新的工具, 用它可以得到以前只有用缺项的或随机的 Fourier 级数才能办到的微妙的结构. 这些特殊级数的例外好的性质现在变成了一般小波级数的平凡性质.

正交小波级数的分析或综合方法将在科学和技术的不同领域中起着重要作用. 本书第 I 卷 (第 I 章到第 VI 章) 是为所有想了解小波的读者——数学家、物理学家和工程师们而写的.

本书的第 II 卷和第 III 卷是特意为数学家们写的, 它们讨论与小波有关的算子. G. Weiss 曾指出: 当一个空间可以作"原子分解"时, 对作用到这个空间上的算子的研究就变得很简单了. 他写道: "分析中的许多问题可自然地表述为定义在函数或分布空间上的线性算子的连续性问题. 如果这个问题可以首先化为研究算子作用到适当的一类简单的元上, 而这些元又以某种方便的形式生成整个空间的话, 那么这些问题就可以用很直接而容易的技术来解决". 当这些"简单的元"是三角函数 e^{ikx} 时, 在 L^2 上有界的, 并且在这个三角函数系下是对角线化的算子, 一般地说,

除了由定义所保证的平移不变性外，没有任何令人感兴趣的性质．因此重要的是对算子 T 的特征值施加足够精确的条件，以保证可以延拓这个算子到其它函数空间上去．这个方向上的第一个结果是由 Marcinkiewicz 得到的．

但是，在小波基上精确对角线形的算子或近似对角线化的算子构成了 L^2 上有界算子的一个代数 A，用著名的 **Calderon 和 Zygmund 的实变方法**可以把 A 中的算子延拓到其它函数空间上去．这个代数 A 在很自然的意义上延拓了伪微分算子，并且它是严格地包含在 A. Calderon 已研究过的算子集合 C 中．A. Calderon 的研究工作导致了复分析和偏微分方程中若干问题的解决．

这里对集合 C 作一点更精细的说明．它的微妙结构寓于我们称之为"Calderon 计划"之中．在与 Zygmund 合作发现了那些可以归之于经典伪微分算子演算的东西之后，A. Calderon 自己打算尽可能减弱为有效地使用这个算法所必要的正则性条件，以系统地扩展应用领域．

在最少正则性条件的研究中，Calderon 奠基性的并且是令人出乎意料的发现是：存在着一个界限．存在一个人们不能超越的"自然边界"．在这个范围之内，算子的延拓不过是某个 Banach 空间上全纯函数的解析延拓．我们将在第Ⅷ章证明它．

本书第Ⅶ章到第Ⅺ章研究 Calderon 计划中算子集合 C 的构造．我们把它叫做 **Calderon－Zygmund 算子**，虽然它很不同于 Calderon 和 Zygmund 在 50－60 年代曾研究过的"历史上的算子"．

完全同这些"历史上的算子"一样，我们将要讨论的算子在某种新的意义上可以借助于奇异积分来定义．我们将在第Ⅶ章仔细讨论它．为了不仅限于考虑卷积算子的情形，必须给出 L^2 连续性的判别准则．缺了它，这个理论就会象沙滩上的城堡一样倒塌下来．这个判别准则之一就是 David 和 Journé 的重要的

$T(1)$ 定理．我们将在第Ⅷ章证明它．$T(1)$ 定理代替了 Fourier 变换，而使用 Fourier 变换本质上只限于卷积算子．

尽管 $T(1)$ 定理是充分必要条件，然而不幸的是它还不能直接用到最令人感兴趣的 Calderon 计划里的集合 C 中的算子上去．我们不知道这是为什么．然而这些算子具有很特殊的非线性结构，正确地了解非线性，我们就可以从借助于 David 和 Journé 的 $T(1)$ 定理而得到的"局部性"结果过渡到有效地执行 Calderon 计划所要求的"整体性"定理．

在本书的第Ⅲ卷及第Ⅱ卷的第Ⅸ章，我们将介绍 Calderon 计划的最优美的应用．首先是 Calderon 的著名的精确伪微分演算，它现在对非线性偏微分方程有着很有意义的应用．

然后我们回到复平面上与 Lipschitz 域有关的 Hardy 空间和复分析的讨论．第Ⅶ章的课题是研究可求长曲线上的 Cauchy 算子．接下来讨论 Kato 问题，即确定增殖的二阶微分算子的平方根算子的定义域．

往后我们介绍 B. Dahlberg, D. Jerison, C. Kenig 和 G. Verchota 关于 Lipschitz 域上 Dirichlet 问题和 Neumann 问题．

最后，本书以简短介绍 J. M. Bony 的仿微分算子而结束．仿微分算子可用于分析非线性偏微分方程．

小波以突然的方式作为某个伪微分算子的特征值再次出现．经过正确地改写，它又出现在 Lipschitz 曲线上 Hardy 空间和 Cauchy 算子的研究中．这个算子在为这种曲线上的复分析而构造的一组特殊的小波基下是"几乎对角线化的"（第Ⅺ章）．为适应各种几何情形而构造小波基是足够灵活的．实际上，不存在一种可以用来分析所有 Calderon 的 C 集合的算子的普遍适用的基．

J. O. Strömberg 是对任意整数 m 构造出 $L^2(\mathbb{R})$ 的形如 $2^{j/2}\psi(2^jx-k)$ $(j\in\mathbb{Z},\ k\in\mathbb{Z})$ 的一组正交基的第一个人．这里函数 $\psi(x)$ 属于 C^m，并且它在无穷远处是指数下降的．

以后的关于小波正交基的工作没有走 Strömberg 的路，它本质上属于 I. Daubechies, P. G. Lemarié, S. Mallat 和作者本人这些工作已仔细地给出了完整的证明.

至于算子，Calderon, Zygmund 和 Cotlar 的重要结果将在第 Ⅶ 章中用由集合 C 所构造的一种新的方式来讲述.

读者在阅读本书后半部分时，经常遇到的是下列各位的名字：J. M. Bony, G. David, P. Jones, J. L. Journé, C. Kenig, T. Murai 和 S. Semmes.

本书分为三卷是为使它适应各类读者．如我已经指出的，人们可以仅读第Ⅰ卷，它是关于小波实际知识的要点．然而读者亦可直接进入第Ⅱ卷（Calderon－Zygmund 算子）而仅仅从前六章各章的引言中去认识小波．最后，读者可以毫不犹豫地进入第Ⅲ卷的第 XII 章、第 XIII 章、第 XIV 章和第 XV 章，因为它们中的每一章都是独立的、结构紧密的课题（复分析、Banach 空间上全纯泛函、Kato 理论、Lipschitz 域上椭圆偏微分方程、以及非线性偏微分方程）．而联系这些不同课题的线索则显然是小波在 Calderon 计划中的算子理论的运用.

本书的水平适用于法国攻读第三阶段博士第一年的学生．我们已在法国和美国各类工程师和数学家中试用过它．本书作为讲义不要求预先学过 E. M. Stein 的〔217〕以及 E. M. Stein 和 G. Weiss 合著的〔221〕这些名著，也不要求学过 Carcia Cuerva 和 Rubio de Francia 的书〔115〕，但请不要忘记 Zygmund 写的基本参考书〔239〕.

R. Coifman 曾帮助我认识到 Calderon 计划的重要性．自从 1974 夏，我们一直合作致力于实现这个计划．本书是我们计划的一部分．如果说本著作与它一开始的样子相比变化颇多的话，这完全要归功于我们的真诚与热忱的相互交流，归功于年轻的探索者们对问题给出了比我们的预想漂亮得多的解答.

第 I 章　Fourier 级数与 Fourier 积分，滤波与取样

1. 引　言

现在可以用小波级数更有效地、更简单地分析函数或分布，这以前是用 Fourier 积分或 Fourier 级数来进行研究的．然而，小波分析不能完全取代 Fourier 分析．事实上，Fourier 分析对构造小波分析中不可缺少的小波正交基起了很大的作用．为构造小波基，人们应用了许多 Fourier 分析中的有效手法，比如它的代数形式．一旦小波被构造出来，就可以很好地用于那些领域，其中，如果用 Fourier 级数或积分来解决问题就要求很高的技巧，或是很繁琐的数值计算．

这两种分析看来更多是互相补充而不是互相排斥的．具备 Fourier 分析基本知识的读者阅读本书是不会失望的．

在第 I 章中，我们收集了 Fourier 分析的经典的公式和定理．同样，本章也是本书论题（《小波和算子》）的开始，本书标题大家已知道了．

2. Fourier 级数

Fourier 级数用于分析 2π 为周期的函数或分布．我们首先考虑一个实变量的情况并假设周期是 2π．

我们从表现最好的函数开始．设 H 表示 Hilbert 空间 $L^2(0, 2\pi)$，它带有共轭双线性形式 $(f, g) = \int_0^{2\pi} f(x)\,\overline{g(x)}\,dx$．那么函

数 $\frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{ikx}$ ($k\in\mathbb{Z}$)就构成了 H 的一组 Hilbert 基．把模稍微改变一下，我们定义 $f\in H$ 的系数是

$$c_k=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\, e^{-ikx}\,dx. \tag{2.1}$$

这样在 H 的收敛意义上，有

$$f(x)=\sum_{-\infty}^{\infty} c_k\, e^{ikx}. \tag{2.2}$$

等式 (2.2) 自动地给出了 $f\in L^2(0,2\pi)$ 到整个实直线的一个延拓．这个延拓在 $[0,2\pi]$ 上的限制恰恰就是函数 $f(x)$，并且它具有周期 2π．区间 $[0,2\pi)$ 对离散子群 $2\pi\mathbb{Z}\subset\mathbb{R}$ 是基本的定义域．周期是 2π 的（局部）平方可和函数等同于 $L^2(0,2\pi)$ 的函数．同样的说明适用于稍后将要谈到的空间 $L^p(0,2\pi)$．这个说明不适用于周期为 2π 的分布空间 $F\subset\mathscr{D}'(\mathbb{R})$．$\mathscr{D}(\mathbb{R})$ 是无穷次可微并且具有紧支集的函数空间，而 $\mathscr{D}'(\mathbb{R})$ 是 $\mathscr{D}(\mathbb{R})$ 上连续线性泛函构成的空间．如果对任何 $u, v\in\mathscr{D}(\mathbb{R})$ 且 $v(x)=u(x-2\pi)$ 都有 $\langle S,u\rangle=\langle S,v\rangle$，则称 $S\in\mathscr{D}'(\mathbb{R})$ 是周期为 2π 的．我们用 $\langle\cdot,\cdot\rangle$ 表示试验函数与分布之间配对的双线性形式．2π 为周期的分布不是用它在开区间 $(0,2\pi)$ 上的限制来刻划的，因为那样我们就失去了一些信息．一个例子是如下定义的"Dirac 梳子"：

$$S=\sum_{-\infty}^{\infty}\delta_{2k\pi} \tag{2.3}$$

其中 δ_a 表示在 a 点有 Dirac 质量．S 在开区间 $(0,2\pi)$ 的限制是 0．同样地，我们不限制 S 于闭区间 $[0,2\pi]$．显然，不能用 Fourier 公式来定义一个周期为 2π 的分布的 Fourier 系数．我们用下面的方法绕过这个困难．设 E 是无穷次可微并且以 2π 为周期的函数组成的向量空间．如果对任意 $S\in F$, $f\in E$, $\varphi\in\mathscr{D}(\mathbb{R})$,

有

$$\langle S, f\rangle = \langle S, \varphi f\rangle, \tag{2.4}$$

其中

$$\sum_{-\infty}^{\infty} \varphi\ (x+2k\pi) = 1 \tag{2.5}$$

成立，则称 E 与 F 是共轭的．在某种意义上，这样的函数 φ 就象 $[0, 2\pi)$ 上的特征函数一样．(2.4) 右边的项由于 $\varphi f\in \mathscr{D}(\mathbb{R})$ 而有定义．这样也就定义了 (2.4) 的左边．

验证 (2.4) 式不因 φ 的选择而改变是一个练习．作减法后，我们运用等价类，模掉的是 $g\in\mathscr{D}(\mathbb{R})$，它满足

$$\sum_{-\infty}^{\infty} g\ (x+2k\pi)=0 \tag{2.6}$$

和存在 $h\in\mathscr{D}(\mathbb{R})$，使得

$$g(x)=h(x+2\pi)-h(x). \tag{2.7}$$

作为 (2.4) 的一种特殊情况，我们来定义任一个周期为 2π 的分布 S 的 Fourier 系数 c_k ($k\in\mathbb{Z}$)．设 $e_k(x)=e^{ikx}$, $\overline{e_k}(x)=e^{-ikx}$，定义

$$c_k=\frac{1}{2\pi}\langle S, \overline{e_k}\rangle. \tag{2.8}$$

这时对某个整数 $m\in\mathbb{N}$ 和某个常数 c，有 $|c_k|\leqslant c\ (1+|k|)^m$．这个性质刻划了周期是 2π 的分布的 Fourier 系数．最后，

$$S=\sum_{-\infty}^{\infty} c_k e_k. \tag{2.9}$$

(2.9) 式右边的级数是在分布意义下收敛的．这表明：如果 $u\in\mathscr{D}(\mathbb{R})$ 是一个试验函数，则

$$\langle S, \overline{u}\rangle=\sum_{-\infty}^{\infty} c_k\overline{d_k}, \quad d_k=\int_{-\infty}^{\infty} u\ (x)\ e^{-ikx}dx. \tag{2.10}$$

(2.10) 式右边的级数是绝对收敛的，这是因为 d_k 在无穷远是速