金属的弹性与滞弹性

C. 甄纳

科学出版社

75
726

金属的弹性与滞弹性

C. 甄 納 著

孔庆平 周本濂 等譯

科 学 出 版 社

C. ZENER
ELASTICITY AND ANELASTICITY OF METALS
The University of Chicago Press, 1956

內 容 簡 介

本书是金属的滞弹性领域的经典著作. 內容包括金属的弹性与滞弹性两部分. 第一部分简略地介绍了金属弹性的基本知识，并讨论了弹性系数的物理本质. 第二部分是本书的主要內容，包括滞弹性的唯象理论，各种滞弹性现象(包括内耗、弹性蠕变、应力弛豫、动力弹性模量随频率或溫度的变化等)之间的相互关系，它们的测量方法，以及某些滞弹性现象的微观机制.

本书可供金属物理和金属学方面的科学研究人员、大专学校师生以及有关的工程技术人员参考.

本书由孔庆平、周本濂、钱知強、马应良四人合译.

金 属 的 弹 性 与 滞 弹 性

[美] C. 甄 纳 著

孔庆平 周本濂 等译

*

科 学 出 版 社 出 版

北京朝阳門內大街 117 号

北京市书刊出版业营业許可証出字第 061 号

中国科学院印刷厂印刷

新华书店北京发行所发行 各地新华书店经售

*

1965 年 6 月第 一 版 开本：850×1168 1/32

1965 年 6 月第一次印刷 印张：5 3/16

印数：0001—3,550 字数：134,000

统一书号：13031・2114

本社书号：3231・13—3

定价：[科七] 0.90 元

序　言

金属卽使在小应力下也会显示出与完全弹性的偏离，这个事实在一世紀以前人們就已經知道了．但是，用金属的微观結构来解释这种偏离，只是在过去的十年中才有了显著的进展．虽然在不多年以前，只有博学的金属学者才研究这种偏离，而冶金学家則觉得它們尽管是有趣的，却是无用的；但今天，它們正在被研究，以便回答关于微观結构变化动力学的一些很明确的問題．作者在写作本书时，企图以邏輯的方式表达出低应力下金属非弹性性質的科学，总結这个領域內所有有关的工作，并且指出对这种性質进行的研究在冶金科学未来的发展中将要起的作用．預計到希望从本书得益的人并不全都愿意跟随理論的正規推导，作者努力将本书写成这样的形式，以便使得理解力強的讀者可以略去正規推导而无損于对这一課題的物理理解．金属的弹性与非弹性是如此互相关联着，以致于在詳尽地討論后者时，如果不对前者作一扼要的介紹，似乎是不恰当的．

非弹性性質包含有在应力全部撤除后将殘留永久变形的意思．虽然金属在低应力下就表現出非弹性性質，但这是就应力与应变彼此不是单値函数的意义上来說的，例如在周期振动中应变可以落后于应力，在应力全部撤除后并不殘留永久变形．所以引用一个避免含有永久变形意思的新詞，看来是恰当的．滞弹性（Anelasticity）一詞就被选择来表示固体的这样一种性質，由于这种性質，应力与应变在低应力范围內彼此不是单値函数，但并不发生永久变形，并且应力与应变的关系仍然是綫性的．

目　录

导　論

弹性的近代理論可以追溯到胡克[1]在十七世紀建立的定律："Ut tensio sic vis（伸长多少就有多大的力）."根据这个定律，假如有一"力"施加到一个物体上，则产生的形变与这力成正比.

胡克定律中的"力"可以是一实际的力或者是任何有关的量，如轉矩、力偶等. 形变通常是这样定义的：当形变有一个小量的变化时，对物体所作的功等于力乘形变的增量. 因而，假如F是力，则形变D是按下式定义的：

$$\delta_{功} = F \cdot \delta D.$$

对于力、轉矩或力偶，D分别指的是位移、扭轉角和弯曲角.

胡克定律的数学式是

$$MD = F, \tag{i}$$

式中的系数M称作"弹性模量"，它不随力F而变. 可是模量与外加力的类型有关. 譬如說，M可以是抗张模量，扭轉模量，或弯曲模量.

胡克定律，按它原始的公式，只适用于准静态力，即很緩慢施加的力. 假如認識到胡克定律中的形变D受整个物体各处的畸变的影响，这种限制就是很显然的了. 因此，在物体的每一部分都受到力的影响，而且所引起的畸变的信号都传回到施力区域以前，形变就不能达到它与施加的力相联系的数值. 显然，在时間短于弹性波由施力区域传播到物体的最远部分并再次返回的时間內，不能够建立起平衡的形变. 作为一个例子，施加到一个紧张的弹簧上的横向脉冲力产生一个矩形波，它很快扩展到支座. 在这种情况下，力与位移的关系就不是胡克定律，而是

$$\frac{dD}{dt} = 常数 \times F.$$

这个方程在波从支座端部反射回来以前是成立的. 即使在弹性波从試样的最远部分反射回来以后，胡克定律也可能不适用. 弹性波可以繼續来往传播. 換句話說，系統可以被力引起振动. 只有施加力所用的时間长到可以与最慢的振动方式的周期相比，才可以認为力是以准靜态的方式施加的，并且不产生伴随的振动. 为了使胡克定律的原始公式能够适用，物体愈大，則力必須施加得愈慢.

在十九世紀初期，胡克定律被推广了，取消了必須以准靜态方式施力的限制. 在这种推广中，物体被看成分隔为大量范围很小的基元区域. 于是，每一区域的畸变仅仅被邻近区域对它所施的力所决定，不管这些力变化得多么快. 实际上，人們把基元区域取成这样小，以致于在时間等于它們的最慢振动方式的周期內，所有的力只改变了一个可以忽略的量. 基元区域形状的变化可以用某种被称作"应变分量"的物理量完全描述出来. 于是推广的胡克定律将应变分量与作用到基元区域上的力分量联系起来，或者更恰当些說，与力分量的表面密度联系起来，后者被称作"应力分量". 物体各处应力的变化由这个推广的胡克定律以及每一基元区域的运动方程来确定.

作为上述推广的一个例子，我們来討論一力施加到悬綫的一端而另一端固定的簡单情况. 当一力施加到綫的一端时，只有当力以准靜态方式施加时，綫的长度变化才正比于 F. 按照上面概述的方法，人們集中注意于原始长度为 δX 的綫元上. 既然 δX 是任意的小，因而只有当作用在它两端的力大小相等并且方向相反时，基元区域的加速度才是有限的. 这些力用 f 来表示. 綫元的应变 e 用原始的和最終的坐标 X 和 U 来定义:

$$e = \frac{dU}{dX} - 1. \tag{ii}$$

于是，适合于这种特殊情况的推广了的胡克定律是

$$f = 常数 \times e. \tag{iii}$$

力 f 沿試样的变化由下式給出:

$$\frac{md^2U}{dt^2}=\frac{df}{dX},\tag{iv}$$

式中m是每单位原始长度的质量．方程式(ii)—(iv)加上适当的边界条件，就完全确定了在以任意方式施加到綫端部的力作用下綫的反应．

經典的弹性理論实质上是胡克定律应用到基元区域上所导致的所有結論的发展． 已有很多卓越的著作闡述弹性理論[2,3]1) 以及它的发展的广泛历史[4]．在本书中討論弹性时，我們仅仅涉及关联应力和应变的系数，以及这些系数与各种物理参量之間的关系．

經典弹性理論的作者們对他們的基本假定不能严格应用于实际固体并不存有幻想．經典理論的价值并不在于它对外力作用下固体性质的准确描述，而在于对大多数实际用途而言，它对这种性质的描述具有足够的准确性2)．

根据經典的弹性理論，应力和应变是单值关联的．只要力是以准静态方式施加的，即假若力改变得相当慢而不致产生振动，则外力和形变也是单值关联的． Weber[5,6] 早在 1825 年研究电流計悬綫时就曾經发現与完全弹性有少許的偏离．在撤除力偶后，悬綫并不立即回到它的零点，而是逐漸地回到零点．这种性质他称为“弹性后效”，Auerbach[7] 曾对这种現象作过一个初期的总結．在实际固体中存在着的与弹性理論不符的其他效应，是內耗、应力弛豫以及模量随測量頻率的变化．所有这些效应都是应力与应变不是单值关系的不同表現．在范性形变以前的区域內，固体的应力与应变不是单值关系的性质称为“滞弹性”．在本书討論滞弹性时，我們将主要地关心各种滞弹性效应的物理原因．

---

1) 也应该提到苏联学者的著作[8*—10*]．——俄译者注

2) 经典弹性理论是忽略实际固体的原子结构的宏观理论，所以它的结论有一定的局限性，但是可以满意地解释那些在可以忽略它们的原子结构时的材料的规律．——俄译者注

参 考 文 献

[1] Hooke R., *De potenia restitutiva*, (London, 1678).
[2] Love A. E. H., *Mathematical Theory of Elasticity* (4th ed., Cambridge, 1927).
[3] Southwell R. V., *Theory of Elasticity* (London, 1936).
[4] Todhunter I., Pearson K., *History of the Theory of Elasticity* (Cambridge, 1886).
[5] Weber W., *Poggendorff's Ann.* **35**, 247 (1834).
[6] Weber W., *Poggendorff's Ann.*, **24**, 1 (1841).
[7] Auerbach F., *Winklmann's Handbuch der Physik*, **1**, 769—831 (Breslau, 1891).
[8*] Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М., *Механика сплошных сред* (М., 1944).
[9*] Филоненко-Бородиц М. М., *Теория упругости* (М.—Л., 1947).
[10*] Лейбензон А. С., *Курс Теории упругости* (М.—Л., 1947).

第一部分　金屬的弹性

第一章　应力与应变的形式关系

自从 Voigt 的卓越著作[1]发表以来，对于晶体弹性的形式理論到現在并沒有实質上的补充. 我們只是把这种形式理論作一个簡略的回顾，而不企图全面叙述.

§1. 应　　变

引入应变分量的概念的目的，是为了能够单値地确定一个物体的小量的形变. 为了給定义应变分量作准备，我們首先来定义位移矢量. 由于形变的結果，原来处于 x, y, z 的質点的位置变为 $x+U, y+V, z+W$. 矢量 (U, V, W) 称作“位移矢量”，并且它的分量是 x, y 和 z 的函数. 現在我們把注意力限制到一个小的体积元上，如图 1 所示，并且假定坐标的原点在形变前坐落在这个单元內.

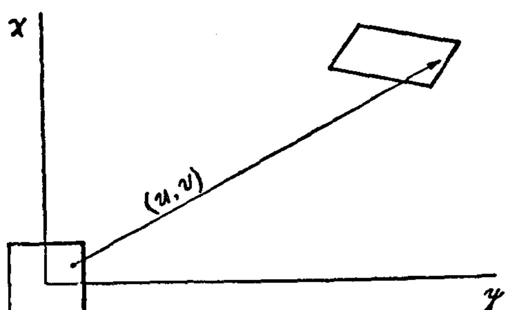

图 1　二维空间內位移矢量的图解

于是，这个小单元每一部分的位移可以用十二个常数来表示，即表示为

$$U = U_0 + \frac{\partial U}{\partial x}x + \frac{\partial U}{\partial y}y + \frac{\partial U}{\partial z}z, \text{等等},$$

式中的导数是在原点取的. 矢量(U_0, V_0, W_0)表示坐标原点的位移. 于是物体每一部分相对于原点的位移(U', V', W')就由九个常数,即九个偏导数来确定.

在若干重要的情况下，可以由上述九个常数的綫性組合形成九个另外的常数,后者具有更直接的物理意义,它們是:

$$\left.\begin{aligned}
e_{xx} &= \frac{\partial U}{\partial x}, \quad e_{yy} = \frac{\partial V}{\partial y}, \quad e_{zz} = \frac{\partial W}{\partial z};\\
e_{yz} &= \frac{\partial W}{\partial y} + \frac{\partial V}{\partial z}, \quad e_{zx} = \frac{\partial U}{\partial z} + \frac{\partial W}{\partial x},\\
e_{xy} &= \frac{\partial V}{\partial x} + \frac{\partial U}{\partial y}, \quad \omega_x = \frac{\partial W}{\partial y} - \frac{\partial V}{\partial z},\\
\omega_y &= \frac{\partial U}{\partial z} - \frac{\partial W}{\partial x}, \quad \omega_z = \frac{\partial V}{\partial x} - \frac{\partial U}{\partial y}.
\end{aligned}\right\} \tag{1}$$

这九个常数当它們是很小的量,即远比一为小时,可以具有直接的物理意义. 在这种情况下，相对于原点的形变可以看成分两步进行. 第一步形变由下列的位移矢量表示:

$$\left.\begin{aligned}
U_S &= e_{xx}x + \frac{1}{2}e_{xy}y + \frac{1}{2}e_{zx}z,\\
V_S &= \frac{1}{2}e_{xy}x + e_{yy}y + \frac{1}{2}e_{yz}z,\\
W_S &= \frac{1}{2}e_{zx}x + \frac{1}{2}e_{yz}y + e_{zz}z,
\end{aligned}\right\} \tag{2}$$

式中的系数組成一个对称矩陣. 第二步形变由下列的位移矢量表示:

$$\left.\begin{aligned}
U_A &= \qquad\qquad - \frac{1}{2}\omega_z y + \frac{1}{2}\omega_y z,\\
V_A &= \frac{1}{2}\omega_z x \qquad\qquad - \frac{1}{2}\omega_x z,\\
W_A &= -\frac{1}{2}\omega_y x + \frac{1}{2}\omega_x y,
\end{aligned}\right\} \tag{3}$$

式中的系数組成一个反对称矩陣.

可以很容易看出,位移矢量(U_S, V_S, W_S)表示一种畸变,对于这种畸变，附着于物体上的一組特定的坐标軸在形变过程中并不改变方向. 这些軸被称作畸变的"主軸". e_{xx}, e_{yy}, e_{zz}, e_{yz}, e_{zx} 和 e_{xy} 六个量称作"应变分量". 第一个应变分量可以看成是原来平行于 x 軸的一根綫在长度上的相对变化；第二和第三个应变分量也有类似的解释. 应变分量 e_{yz} 可以看成是 y 軸和 z 軸間的夹角在形变过程中的变化（假定这些軸在畸变过程中固定在物体上）; e_{zx} 和 e_{xy} 也有类似的解释.

应变分量的数值依賴于它們所参照的坐标軸的取向. 人們时常希望把参照于一組軸的应变分量用参照于第二組軸的应变分量表示出来. 假定两組軸之間的方向余弦由下列图式表明:

$$\begin{array}{c|ccc} & x & y & z \\ \hline x' & l_1 & m_1 & n_1 \\ y' & l_2 & m_2 & n_2 \\ z' & l_3 & m_3 & n_3 \end{array} \tag{4}$$

則有

$$x' = l_1x + m_1y + n_1z,$$

并且,反过来,

$$x = l_1x' + l_2y' + l_3z'.$$

于是,将方程組(2)变换成包含 U'_S, V'_S, W'_S 和 x', y', z' 的一个方程組，就可以得到两組应变分量之間的变换式. 为此，将方程組(2)的三个方程分别乘以 l_1, l_2 和 l_3, 然后对它們求和，就得到由 x, y, z 表示的 U'_S. 再将 x, y, z 轉换成 x', y', z', 結果得到

$$e_{x'x'} = e_{xx}l_1^2 + e_{yy}m_1^2 + e_{zz}n_1^2 + e_{yz}m_1n_1 + \\ + e_{zx}n_1l_1 + e_{xy}l_1m_1, \text{ 等等;} \tag{5}$$

$$e_{y'z'} = 2e_{xx}l_2l_3 + 2e_{yy}m_2m_3 + 2e_{zz}n_2n_3 + \\ + e_{yz}(m_2n_3 + m_3n_2) + e_{zx}(n_2l_3 + n_3l_2) + \\ + e_{xy}(l_2m_3 + l_3m_2), \text{ 等等.} \tag{6}$$

可以很容易看出，位移矢量(U_A, V_A, W_A)表示一种形变，发生这种形变时，物体作为一个刚体繞着它的原点发生轉动．物理量 ω_x, ω_y 和 ω_z 是轉动矢量的三个分量，因而在坐标軸旋轉时按照图式(4)进行变换．

§2. 应　　力

引入应力概念的目的，在于使我們可以完全确定在通过固体內一給定点的所有平面作用的曳引力(traction)．为了給定义应力分量作准备，我們将要討論在物体內一面积元上作用的力．特別是，我們将要討論在一內部面积元 dA 一边的材料作用到另一边材料上的力．这个力比例于 dA，所以可写成 $\boldsymbol{T}d\boldsymbol{A}$，如图 2 所示．既然 $\boldsymbol{T}$ 的符号依賴于我們認为哪一边是施力的，因而为了明确起見，我們給 $\boldsymbol{T}$ 加以脚注 $\boldsymbol{n}$，$\boldsymbol{n}$ 表示垂直于 dA 并指向施力区域的单位矢量．也用同样的符号来标注面积元 dA 的取向．

对图 3 的四面体，运用一物体在平衡时所受合力必須为零的条件，就会发現力密度 $\boldsymbol{T}_n$ 可以用作用在 xy, yz 和 zx 平面上的力密度来表示．假如 l, m 和 n 表示 $\boldsymbol{n}$ 的方向余弦，我們就可得到 $\boldsymbol{T}_n$ 的分量如下：

$$\left.\begin{aligned} X_n &= lX_x + mX_y + nX_z, \\ Y_n &= lY_x + mY_y + nY_z, \\ Z_n &= lZ_x + mZ_y + nZ_z. \end{aligned}\right\} \qquad (7)$$

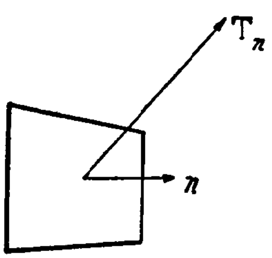

图 2　曳引力的图解

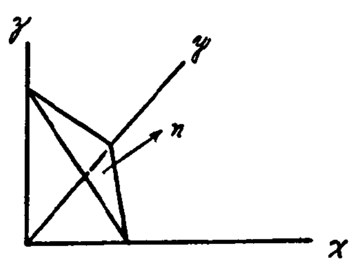

图 3　通过任意平面的曳引力分解的方法

力密度的分量 X_x,…… 等称为“应力分量”. 对一个基元立方体运用合力矩等于零的条件,则独立的应力分量数目就减少到六个. 这时我們得到

$$Y_z = Z_y,\ Z_x = X_z,\ X_y = Y_x. \tag{8}$$

所以, 独立的应力分量可以取作 X_x, Y_y, Z_z, Y_z, Z_x 和 X_y. 在任意平面上的曳引力可以通过 (7) 式和 (8) 式用这六个分量表示出来.

应力分量的数值依賴于所选定的参考系的笛卡儿坐标軸. 参照于不同坐标軸的应力分量之間的关系可以用(7)式求得. 下面我們来考虑由图式(4)关联的两組坐标軸. 将方程組(7)的第一式乘以 l_1, 第二式乘以 m_1, 第三式乘以 n_1, 然后对它們求和, 并令 $\boldsymbol{n}$ 沿着 x' 軸的方向,就得到 $X'_{x'}$. 結果是

$$\begin{aligned} X'_{x'} = {} & l_1^2X_x + m_1^2Y_y + n_1^2Z_z + 2m_1n_1Y_z + \\ & + 2n_1l_1Z_x + 2l_1m_1X_y, \end{aligned} \tag{9}$$

对于 $Y'_{y'}$ 和 $Z'_{z'}$ 有两个类似的方程式;仿此也可以得到

$$\begin{aligned} X'_{y'} = {} & l_1l_2X_x + m_1m_2Y_y + n_1n_2Z_z + (m_1n_2 + m_2n_1)Y_z + \\ & + (n_1l_2 + n_2l_1)Z_x + (l_1m_2 + l_2m_1)X_y, \end{aligned} \tag{9a}$$

对于 $Y'_{z'}$ 和 $Z'_{x'}$ 也有两个类似的方程.

§ 3. 应力与应变的关系

我們已經知道, 任一基元区域的形变可以由六个应变分量 e_{xx}, e_{yy}, e_{zz}, e_{yz}, e_{zx} 和 e_{xy} 完全确定. 我們也已經知道, 通过基元区域的任一平面的曳引力可以由六个应力分量 X_x, Y_y, Z_z, Y_z, Z_x 和 X_y 完全确定. 胡克定律的普遍形式說明, 应变分量是应力分量的綫性函数,并且反过来, 应力分量是应变分量的綫性函数. 于是,从一方面,我們有

$$\left.\begin{aligned} e_{xx} &= s_{11}X_x + s_{12}Y_y + s_{13}Z_z + s_{14}Y_z + s_{15}Z_x + s_{16}X_y, \\ e_{yy} &= s_{21}X_x + s_{22}Y_y + s_{23}Z_z + s_{24}Y_z + s_{25}Z_x + s_{26}X_y, \\ & \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots, \\ e_{xy} &= s_{61}X_x + s_{62}Y_y + s_{63}Z_z + s_{64}Y_z + s_{65}Z_x + s_{66}X_y; \end{aligned}\right\} \tag{10}$$

同时，从另一方面，

$$\left.\begin{aligned}
X_x &= c_{11}e_{xx} + c_{12}e_{yy} + c_{13}e_{zz} + c_{14}e_{yz} + c_{15}e_{zx} + c_{16}e_{xy},\\
Y_y &= c_{21}e_{xx} + c_{22}e_{yy} + c_{23}e_{zz} + c_{24}e_{yz} + c_{25}e_{zx} + c_{26}e_{xy},\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots,\\
X_y &= c_{61}e_{xx} + c_{62}e_{yy} + c_{63}e_{zz} + c_{64}e_{yz} + c_{65}e_{zx} + c_{66}e_{xy}.
\end{aligned}\right\} \quad (11)$$

物理量 s_{11}, s_{12}, $\cdots$, 称作“弹性常数”(elastic constants), 物理量 c_{12}, c_{22}, $\cdots\cdots$, 称作“弹性系数”(elastic coefficients). 很容易験証，弹性常数的矩陣$\|s\|$与弹性系数的矩陣$\|c\|$可看成互成倒矩陣，即

$$\|s\| \cdot \|c\| = \|1\|, \quad (12)$$

式中$\|1\|$是单位矩陣；因而

$$\sum_{k=1}^{6} s_{jk}c_{kj'} = \left\{\begin{matrix} 1, & j' = j, \\ 0, & j' \neq j, \end{matrix}\right\} \quad (13)$$

以及

$$\sum_{k=1}^{6} c_{jk}s_{kj'} = \left\{\begin{matrix} 1, & j' = j, \\ 0, & j' \neq j. \end{matrix}\right\} \quad (14)$$

这三十六个弹性系数并不全是独立的. 为了导出它們之間对于所有晶体都成立的关系式，我們注意到，应变能密度U的增量由下式給出：

$$dU = X_x de_{xx} + Y_y de_{yy} + Z_z de_{zz} + Y_z de_{yz} + \\ + Z_x de_{zx} + X_y de_{xy}. \quad (15)$$

既然应变能密度可以看成是应变的单值函数，于是

$$\frac{\partial X_x}{\partial e_{yy}} = \frac{\partial Y_y}{\partial e_{xx}};$$

因而，由(11)式可得

$$c_{12} = c_{21}.$$

同样地，在一般情况下可得

$$c_{jk} = c_{kj}. \quad (16)$$

求 $U - (X_x e_{xx} + Y_y e_{yy} + \cdots)$的微分以代替$U$的微分，可得

$$s_{jk} = s_{kj}. \quad (17)$$

因而矩陣$\|s\|$和$\|c\|$都是对称的. 这些对称关系使得独立常数的数目由三十六个减少到二十一个.

弹性常数或弹性系数的数值依賴于它們所参照的笛卡儿坐标軸. 有时候,人們希望把参照于一个笛卡儿系統的弹性模量(elastic moduli)用参照于另一个笛卡儿系統的弹性模量表示出来. 这种关系式很容易借助方程(5),(6)和(10),以及类似于(9)式的、用应力分量$X'_{x'}, \cdots$ 来表示应力分量$X_x, \cdots$的方程得到. 后面的这种方程式可用与推导(9)式同样的方式推导出来,它們是

$$\left.\begin{aligned} X_x &= l_1^2X'_{x'} + l_2^2Y'_{y'} + l_3^2Z'_{z'} + 2l_2l_3Y'_{z'} + \\ &\quad + 2l_3l_1Z'_{x'} + 2l_1l_2X'_{y'},\ \text{等等}, \\ \text{和} \\ X_y &= l_1m_1X'_{x'} + l_2m_2Y'_{y'} + l_3m_3Z'_{z'} + \\ &\quad + (l_2m_3 + l_3m_2)Y'_{z'} + (l_3m_1 + \\ &\quad + l_1m_3)Z'_{x'} + (l_1m_2 + l_2m_1)X'_{y'}. \end{aligned}\right\} \tag{18}$$

下面我們将对立方对称晶体举出几个例子,在这种晶体中,以后将会講到,弹性常数由下列矩陣来表示:

$$\begin{Vmatrix} s_{11} & s_{12} & s_{12} & 0 & 0 & 0 \\ s_{12} & s_{11} & s_{12} & 0 & 0 & 0 \\ s_{12} & s_{12} & s_{11} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & s_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & s_{44} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & s_{44} \end{Vmatrix}.$$

a) 作为第一个例子,我們用参照于x, y, z軸的弹性常数来表示参照于x', y', z'軸的弹性常数s_{11}'. 按照(5)式,我們将方程組(10)的第一式乘以l_1^2,第二式乘以m_1^2,等等,然后对它們求和,于是得到e'_{xx}. 然后按照(18)式变換右边的应力. 于是得到$X'_{x'}$的系数,它被定义为s_{11}':

$$s'_{11} = s_{11} - \{2(s_{11} - s_{12}) - s_{44}\}\cdot\{l_1^2m_1^2 + m_1^2n_1^2 + n_1^2l_1^2\}. \tag{19}$$

b) 作为第二个例子,我們来求立方晶体的沿(110)面[$\bar{1}$10]方向的切变弹性常数. 在这种情况下,方向余弦如下表: