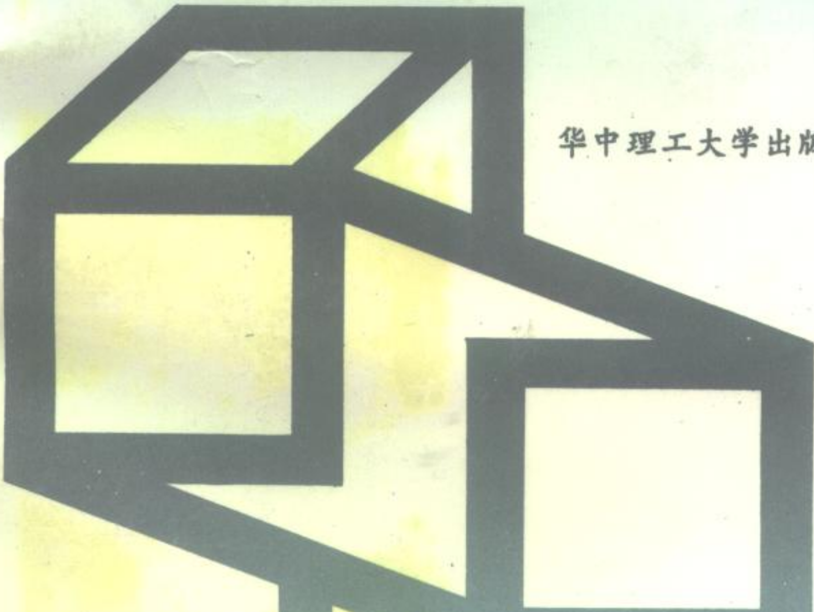
常微分方程专题研究

CHANGWEIFEN FANGCHENG ZHUANTI YANJIU

汤光宋 著



华中理工大学出版社

常微分方程专题研究

汤光宋 著

华中理工大学出版社

内容简介

本书以大学常微分方程课程为基础，对常微分方程中的重要概念、定理、典型的解题方法和技巧，作了全面深入的研究与拓宽．书中内容多数是作者近年来的研究成果．全书共分九章，内容包括各种类型的常微分方程（组）的求解；可积类型的推广；解题方法的改进与移植；稳定性理论中若干问题研究等．此书既有启发性、趣味性、科学性和实用性，又有整体的连贯性、严格的逻辑性．读者看后定会豁然开朗，从中受到启示，获得收益．

本书可供高等院校数学专业、计算机专业的本科生和研究生阅读，也可供数学教师和有关科研人员参考．

常微分方程专题研究
汤光宋 著
责任编辑 李立鹏
华中理工大学出版社出版发行
（喻家山 邮编 430074）
新华书店湖北发行所经销
湖北省石首市人民印刷厂印制
*
开本：850×1168 1/32 印张：7.375 字数：179000
1994年5月第1版 1995年2月第2次印刷
印数：1 001—3 000
ISBN 7-5609-0936-1/O·120
定价：6.00元
（鄂）新登字第10号

序　言

常微分方程是现代数学的一门重要学科．它历史悠久，而且正在不断发展．它既有理论研究意义，又有实际应用价值，因而吸引着不少数学工作者，广大数学教师对它的研究和关注，引发了广大学生对它的学习兴趣．

我是从 1978 年科学的春天到来以后，开始系统地学习和研究常微分方程的．衷心感谢很多专家、同行朋友给予我长期的教益和帮助；也感谢江汉大学的领导，让我有幸在这个方向稳定地工作十余年了，多次讲授数学师范本科班的常微分方程课、常微分方程稳定性理论的选修课、以及数学文章的写作课，并指导学生撰写毕业论文．从而有机会了解这个领域的动态和进展，获得有益的信息，经过多年辛勤的耕耘、潜心的研究取得了一系列成果，特别是常微分方程中一些值得深入追究的疑问与难题，及一些“常微分方程”书籍中提到，但没有展开讨论的问题，均作了较全面而系统的探讨．本书就是在此基础上经过精心构思，巧妙安排撰写而成的，它是作者近年来教学、科研成果的结晶．

全书共分九章，对常微分方程的重要概念、定理、法则、公式，典型的解题方法和技巧，都作了全面深入的研究与拓广．概括起来本书有如下四个特点：

第一，插缝与补充．应该说，教科书及百科全书中包含的常微分方程内容是很全的了，但仍然有一些缝应插进更新的内容．本书在这方面试图作些工作．第二，拓宽与加深．本书的结论大都是推广了前人或当代一些学者的成果，在层次与范围上都进了一步，这些内容正是微分方程教学改革的重要组成部分，对教师，可提高业务素质，对学生，可培养数学创造性思维．第三，更新与

创新．本书介绍的定理、法则、公式有一定的突破，思考技巧上有创新，提出了新的见解．第四，启迪与发现．阅读此书后，不仅增长知识，还能对如何发现数学问题、研究数学问题、撰写数学论文从中获得启示，并能从中发现许多值得进一步深入研究的新课题．在综合大学、理工科大学、师范院校、教育学院等师生中有众多的“知音”与读者，都能从书中得到收益．那作者将会感到无限的欣慰．

本书出版之际，我衷心感谢武汉大学齐民友教授、北京师范大学严士健教授、武汉数学物理研究所范文涛研究员、华中师范大学廖晓昕教授的鼓励和支持，还非常感谢武汉教育学院郑隆炘教授，在百忙中抽空审阅、修改了书稿．最后，我还要感谢华中理工大学出版社的有关人员、以及江汉大学的领导、同事们、朋友们的大力支持和关心．

限于作者知识水平和能力，加之时间仓促，对本书中必然存在的缺点和错误，衷心地希望和欢迎同志们批评指正．

汤光宋

1993年11月28日于汉口

目　录

第一章　几类一阶微分方程的推广

在这一章,我们借助分部积分公式、求导法则、变量代换法,对几类重要的一阶微分方程及可化为一阶微分方程的积分方程,作了广泛的推广,并提供了推广后的微分方程解的表达式.从而扩充了一阶微分方程在实际中的应用.

§1.1　分部积分公式在解线性方程中的应用

我们利用分部积分公式给出了几类线性微分方程通解的表达式,比常规方法的计算量要少.另外还提供了自由项为分段函数的线性微分方程初值问题解的表达式.

定理 1.1　一阶非齐次线性微分方程

$$y'+P(x)y=Q(x), \tag{1.1}$$

其中 $P(x)$、$Q(x)\in C$,当积分 $\int e^{\int P(x)dx}d\left(\frac{Q(x)}{P(x)}\right)$ 较易计算时,方程(1.1)的通解为

$$y=ce^{-\int P(x)dx}+\frac{Q(x)}{P(x)}-e^{-\int P(x)dx}\int e^{\int P(x)dx}d\left(\frac{Q(x)}{P(x)}\right), \tag{1.2}$$

其中 c 为任意常数.

证　由常数变易法,可知方程(1.1)的通解为

$$y=e^{-\int P(x)dx}\left[\int Q(x)e^{\int P(x)dx}dx+c\right].$$

当积分 $\int Q(x)e^{\int P(x)dx}dx$ 不易计算,而 $\int e^{\int P(x)dx}d\left(\frac{Q(x)}{P(x)}\right)$ 较易计算时,应用分部积分公式 $\int u dv=uv-\int v du$,并令 $u=\frac{Q(x)}{P(x)}$,$dv=P(x)e^{\int P(x)dx}dx=de^{\int P(x)dx}$,立即可得方程(1.1)的通解为(1.2)式.

我们很容易将定理1.1推广为

定理1.2 微分方程

$$f'(y)\frac{dy}{dx}+P(x)f(y)=Q(x),$$

其中 $f(x)\in C^1, P(x), Q(x)\in C$. 当积分 $\int e^{\int P(x)dx}d\left(\frac{Q(x)}{P(x)}\right)$，较易计算时，原方程的通积分为

$$f(y)=ce^{-\int P(x)dx}+\frac{Q(x)}{P(x)}-e^{-\int P(x)dx}\int e^{\int P(x)dx}d\left(\frac{Q(x)}{P(x)}\right).$$

例1 求解方程

(1) $\frac{dx}{dt}+x\frac{d\varphi(t)}{dt}=\varphi(t)\frac{d\varphi(t)}{dt}$，其中 $\varphi(t)$ 为已知函数；

(2) $x\sin\theta d\theta+(x^3-2x^2\cos\theta+\cos\theta)dx=0$.

解 (1) 直接应用定理1.1，知原方程的通解为

$$x(t)=ce^{-\int\frac{d\varphi(t)}{dt}dt}+\frac{\varphi(t)\frac{d\varphi(t)}{dt}}{\frac{d\varphi(t)}{dt}}-e^{-\int\frac{d\varphi(t)}{dt}dt}\int e^{\int\frac{d\varphi(t)}{dt}dt}d\left(\frac{\varphi(t)\varphi'(t)}{\varphi'(t)}\right)$$

$$=ce^{-\varphi(t)}+\varphi(t)-1.$$

(2) 将原方程变形为

$$\left(\frac{\cos\theta}{x}\right)'\frac{d\theta}{dx}+2x\left(\frac{\cos\theta}{x}\right)=x,$$

再应用定理1.2，可直接写出原方程的通积分为

$$\frac{\cos\theta}{x}=ce^{-\int 2xdx}+\frac{x}{2x}-e^{-\int 2xdx}\int e^{\int 2xdx}d\left(\frac{x}{2x}\right)=ce^{-x^2}+\frac{1}{2},$$

即 $\cos\theta=cxe^{-x^2}+\frac{1}{2}x.$

我们再用推广的分部积分公式：

$$\int uv^{(n+1)}dx=\sum_{k=0}^{n}(-1)^k u^{(k)}v^{(n-k)}+(-1)^{n+1}\int u^{(n+1)}vdx$$

解一阶非齐次线性方程可得到一系列结论，比如：

定理1.3 一阶非齐次线性方程

$$y'+ay=Q(x)$$

(其中 $Q(x)$ 为 n 次多项式,a 为常数),其通解为

$$y=ce^{-ax}+\frac{1}{a}\left[Q(x)-\frac{1}{a}Q'(x)+\frac{1}{a^2}Q''(x)+\cdots+(-1)^n\frac{1}{a^n}Q^{(n)}(x)\right].$$

定理 1.4 一阶非齐次线性方程

$$y'+ay=A\sin bx$$

(其中 a,b,A 为非零常数),其通解为

$$y=ce^{-ax}+\frac{A}{a^2+b^2}(a\sin bx-b\cos bx).$$

定理 1.5 一阶非齐次线性方程

$$y'+ay=A\cos bx$$

(其中 a,b,A 为非零常数),其通解为

$$y=ce^{-ax}+\frac{A}{a^2+b^2}(b\sin bx+a\cos bx).$$

例 2 解方程

(1) $y'+ay=x^4$; (2) $\dfrac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}+\dfrac{R}{L}i=\dfrac{E_0}{L}\sin wt$.

(其中 R、L、E_0、w 为常数).

解 (1) 直接应用定理 1.3,原方程的通解为

$$y=ce^{-x}+x^4-4x^3+12x^2-24x+24.$$

(2) 直接应用定理 1.4,原方程的通解为

$$i=ce^{-\frac{R}{L}t}+\frac{E_0}{R^2+w^2L^2}(R\sin wt-wL\cos wt).$$

我们再给出自由项为分段函数的一类线性微分方程初值问题解的表达式.

定理 1.6 初值问题

$$\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+ay=Q(x);\\ y(x_0)=y_0,\end{cases}\qquad Q(x)=\begin{cases}Q_1(x), & x_0\leqslant x<x_1;\\ Q_2(x), & x\geqslant x_1.\end{cases}\tag{1.3}$$

(其中 $Q_1(x)$、$Q_2(x)\in C^1$,a 为非零常数,x_0、x_1、y_0 为任意常数),当

$\int e^{ax}\mathrm{d}Q_1(x)$及$\int e^{ax}\mathrm{d}Q_2(x)$较易计算时，初值问题(1.3)的解为

$$y=\begin{cases} y_0e^{a(x_0-x)}-\dfrac{Q_1(x_0)}{a}e^{a(x_0-x)}+\dfrac{1}{a}Q_1(x) \\ \qquad -\dfrac{1}{a}e^{-ax}\displaystyle\int_{x_0}^{x}e^{at}\mathrm{d}Q_1(t), \quad x_0\leqslant x<x_1, \\ y_0e^{a(x_0-x)}-\dfrac{Q_1(x_0)}{a}e^{a(x_0-x)}+\dfrac{Q_1(x_1)-Q_2(x_1)}{a}e^{a(x_1-x)} \\ \qquad +\dfrac{1}{a}e^{-ax}\left\{\left[\displaystyle\int e^{ax}\mathrm{d}Q_2(x)\right]\Big|_{x=x_1}-\displaystyle\int_{x_0}^{x_1}e^{at}\mathrm{d}Q_1(t)\right\} \\ \qquad +\dfrac{1}{a}Q_2(x)-\dfrac{1}{a}e^{-ax}\displaystyle\int e^{ax}\mathrm{d}Q_2(x), \quad x\geqslant x_1. \end{cases} \tag{1.4}$$

证 (1) 当$x_0\leqslant x<x_1$，且积分$\int e^{ax}\mathrm{d}Q_1(x)$较易计算时，依据定理1.1，方程$y'+ay=Q_1(x)$的通解为

$$y=ce^{-ax}+\frac{1}{a}Q_1(x)-\frac{1}{a}e^{-ax}\int e^{ax}\mathrm{d}Q_1(x).$$

由初始条件$y(x_0)=y_0$ 得

$$c=y_0e^{ax}-\frac{1}{a}e^{ax_0}Q_1(x_0)+\frac{1}{a}\left[\int e^{ax}\mathrm{d}Q_1(x)\right]\Big|_{x=x_0},$$

于是 $$y=y_0e^{a(x_0-x)}-\frac{Q_1(x_0)}{a}e^{a(x_0-x)},$$

$$+\frac{1}{a}Q_1(x)-\frac{1}{a}e^{-ax}\int_{x_0}^{x}e^{at}\mathrm{d}Q_1(t).$$

(2) 当$x\geqslant x_1$，且积分$\int e^{ax}\mathrm{d}Q_2(x)$较易计算时，依据定理1.1，方程$y'+ay=Q_2(x)$的通解为

$$y=de^{-ax}+\frac{1}{a}Q_2(x)-\frac{1}{a}e^{-ax}\int e^{ax}\mathrm{d}Q_2(x).$$

为使

$$y=\begin{cases} y_0e^{a(x_0-x)}-\dfrac{Q_1(x_0)}{a}e^{a(x_0-x)}+\dfrac{1}{a}Q_1(x) \\ \qquad -\dfrac{1}{a}e^{-ax}\displaystyle\int_{x_0}^{x}e^{at}dQ_1(t), \qquad x_0\leqslant x<x_1, \\ de^{-ax}+\dfrac{1}{a}Q_2(x)-\dfrac{1}{a}e^{-ax}\displaystyle\int e^{ax}dQ_2(x), \qquad x\geqslant x_1. \end{cases}$$

在 $x=x_1$ 处连续，令

$$\lim_{x\to x_1^-}\left[y_0e^{a(x_0-x)}-\frac{Q_1(x_0)}{a}e^{a(x_0-x)}+\frac{1}{a}Q_1(x)-\frac{1}{a}e^{-ax}\int_{x_0}^{x}e^{at}\mathrm{d}Q_1(t)\right]$$

$$=\mathrm{d}e^{-ax_1}+\frac{1}{a}Q_2(x_1)-\frac{1}{a}e^{-ax_1}\left[\int e^{ax}\mathrm{d}Q_2(x)\right]\Big|_{x=x_1},$$

即

$$y_0e^{a(x_0-x_1)}-\frac{Q_1(x_0)}{a}e^{a(x_0-x_1)}+\frac{1}{a}Q_1(x_1)-\frac{1}{a}e^{-ax_1}\int_{x_0}^{x_1}e^{at}\mathrm{d}Q_1(t)$$

$$=de^{-ax_1}+\frac{1}{a}Q_2(x_1)-\frac{1}{a}e^{-ax_1}\left[\int e^{ax}\mathrm{d}Q_2(x)\right]\Big|_{x=x_1},$$

得

$$d=y_0e^{ax_0}-\frac{Q_1(x_0)}{a}e^{ax_0}+\frac{Q_1(x_1)-Q_2(x_1)}{a}e^{ax_1}$$

$$+\frac{1}{a}\left\{\left[\int e^{ax}\mathrm{d}Q_2(x)\right]\Big|_{x=x_1}-\int_{x_0}^{x}e^{at}\mathrm{d}Q_1(t)\right\},$$

因而原初值问题的解为(1.4).

例 3 求解下列初值问题

(1) $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+y=f(x), f(x)=\begin{cases}2, & 0\leqslant x<1, \\ 0, & x\geqslant 1.\end{cases} \quad y(0)=0;$

(2) $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+y=f(x), f(x)=\begin{cases}e^{-x}, & 0\leqslant x<2, \\ e^{-2}, & x\geqslant 2.\end{cases} \quad y(0)=1.$

解 (1) 依据定理 1.6，令 $a=1, Q_1(x)\equiv 2, Q_2(x)\equiv 0$ $x_0=0, x_1=1, y_0=0$，于是原初值问题的解为

$$y=\begin{cases}0-2e^{-x}+2-e^{-x}\displaystyle\int_0^x e^t\mathrm{d}(2), & 0\leqslant x<1, \\ 0-2e^{-x}+2e^{1-x}+e^{-x}\left\{\left[\displaystyle\int e^x\mathrm{d}(0)\right]\Big|_{x=1}-\displaystyle\int_0^1 e^t\mathrm{d}(2)\right\} \\ \qquad +0-e^{-x}\displaystyle\int e^{-x}\mathrm{d}(0), & x\geqslant 1.\end{cases}$$

即

$$y=\begin{cases}2(1-e^{-x}), & 0\leqslant x<1,\\ 2(e-1)e^{-x}, & x\geqslant 1.\end{cases}$$

(2) 依据定理 1.6，令 $a=1, Q_1(x)=e^{-x}, Q_2(x)\equiv e^{-2}, x_0=0, x_1=2, y_0=1$，于是原初值问题的解为

$$y=\begin{cases}e^{-x}-e^{-x}+e^{-x}-e^{-x}\int_0^x e^t\mathrm{d}(e^{-t}), & 0\leqslant x<2,\\ e^{-x}-e^{-x}+(e^{-2}-e^{-2})e^{2-x}+e^{-x}\left\{\left[\int e^x\mathrm{d}(e^{-2})\right]\Big|_{x=2}\right.\\ \left.\quad-\int_0^2 e^{-t}d(e^{-t})\right\}+e^{-2}-e^{-x}\int e^{-x}\mathrm{d}(e^{-2}), & x\geqslant 2.\end{cases}$$

即

$$y=\begin{cases}e^{-x}(x+1), & 0\leqslant x<2,\\ 2e^{-x}+e^{-2}, & x\geqslant 2.\end{cases}$$

§1.2 可化为分离变量微分方程的类型

我们提出了若干可化为分离变量微分方程的类型，目的在于补充和推广文献(文[4])中的某些结论，使其更加完善，直接运用所得结论求解，其解题过程较为简捷.

定理 1.7 设 $h、\varphi\in C^1, f、g\in C, g\neq 0, \varphi\neq 0, \alpha、\beta$ 为非零常数，则一阶方程

$$h'(y)y'=[\ln\varphi(x)]'\frac{h(y)f[\varphi^\alpha(x)h^\beta(y)]}{g[\varphi^\alpha(x)h^\beta(y)]} \tag{1.5}$$

可化为分离变量的方程，其通积分为

$$c\varphi(x)=\exp\int\frac{g(u)\mathrm{d}u}{u[\alpha g(u)+\beta f(u)]},$$

其中 $u=\varphi^\alpha(x)h^\beta(y)$，$c$ 为任意常数.

证 令 $u=\varphi^\alpha(x)h^\beta(y)$，于是

$u'=\alpha\varphi^{\alpha-1}(x)\varphi'(x)h^\beta(y)+\beta\varphi^\alpha(x)h^{\beta-1}(y)$

$$\cdot [\ln\varphi(x)]' \frac{h(y)f[\varphi^{\alpha}(x)h^{\beta}(y)]}{g[\varphi^{\alpha}(x)h^{\beta}(y)]} = \frac{\varphi'(x)}{\varphi(x)}\left[\alpha u + \beta u \frac{f(u)}{g(u)}\right],$$

这是可分离变量的方程,其通积分为(1.6).

定理 1.8 设 $h,\varphi\in C^1, f、g\in C, \varphi\neq 0. \alpha$ 为非零常数,则一阶方程

$$h'(y)y' = \alpha[\ln\varphi(x)]'h(y) + \alpha\varphi^{\alpha-1}(x)g(x)f\left(\frac{h(y)}{\varphi^{\alpha}(x)}\right) \tag{1.7}$$

可化为分离变量的方程,其通积分为

$$\alpha\int\frac{g(x)}{\varphi(x)}\mathrm{d}x = \int\frac{\mathrm{d}u}{f(u)}, \tag{1.8}$$

其中 $u=h(y)/\varphi^{\alpha}(x)$.

证 令 $u=h(y)/\varphi^{\alpha}(x)$,于是

$$u' = \frac{-\alpha\varphi^{\alpha-1}(x)\varphi'(x)}{\varphi^{2\alpha}(x)}h(y) + \frac{\alpha}{\varphi^{\alpha}(x)}\cdot\frac{\varphi'(x)}{\varphi(x)}h(y)$$
$$+\alpha\frac{\varphi^{\alpha-1}(x)}{\varphi^{\alpha}(x)}g(x)f\left(\frac{h(y)}{\varphi^{\alpha}(x)}\right) = \alpha\frac{g(x)}{\varphi(x)}f(u).$$

这已是可分离变量的方程,其通积分为(1.8).

类似于定理 1.7,1.8 的证明方法,可得

定理 1.9 设 $h,\varphi\in C^1, f\in C, \varphi\neq 0, \alpha$ 为非零常数,则一阶方程

$$h'(y)y' = \varphi^{\alpha-1}(x)\varphi'(x)f\left(\frac{h(y)}{\varphi^{\alpha}(x)}\right)$$

可化为分离变量的方程,其通积分为

$$c\varphi(x) = \exp\int\frac{du}{f(u)-cu},$$

其中 $u=h(y)/\varphi^{\alpha}(x)$,$c$ 为任意常数.

定理 1.10 设 $h、v\in C^1, f、g\in C, f\neq 0, k$ 为常数,则一阶方程

$$h^{k-1}(y)h'(y)\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} + f[h^k(y)\pm v^k(x)]g(x) \pm v^{k-1}(x)v'(x) = 0$$

可化为分离变量的方程,其通积分为

$$\int\frac{\mathrm{d}u}{f(u)} = -k\int g(x)\mathrm{d}x,$$

其中 $u=h^k(y)\pm v^k(x)$.

定理 1.11 设 $h、v\in C^1, f\in C$, 且 $f(u)\neq\pm\frac{m}{n}$, $a、b$ 为非零常数, $m、n$ 为常数, 则一阶方程

$$h'(y)\frac{dy}{dx}=v^{a-1}(x)v'(x)h^{1-b}(y)f\left[\frac{mv^a(x)}{a}\pm\frac{nh^b(y)}{b}\right]$$

可化为分离变量方程, 其通积分为

$$\int\frac{du}{m\pm nf(u)}=\frac{1}{a}v^a(x)+c,$$

其中 $u=\frac{mv^a(x)}{a}\pm\frac{nh^b(y)}{b}$, c 为任意常数.

定理 1.12 设 $h、v\in C^1, f\in C, f(u)\neq-k$, k 为常数, 则一阶方程

$$[f(v^k(x)+h^k(y))+k]h'(y)\frac{dy}{dx}+v^{k-1}(x)v'(x)h^{1-k}(y)f(v^k(x)+h^k(y))=0$$

可化为分离变量的方程, 其通积分为

$$\int f(u)du=c-kh^k(y),$$

其中 $u=v^k(x)+h^k(y)$, c 为任意常数.

定理 1.13 设 $h、v\in C^1, f\in C, w^2+a\neq0$, $a、b$ 为非零常数. 则一阶方程

$$f[v^b(x)+ah^b(y)][ah^{b-1}(y)h'(y)y'+v^{b-1}(x)v'(x)]$$
$$=\frac{b}{2}v^{\frac{b}{2}-1}(x)h^{\frac{b}{2}-1}(y)[h(y)-v(x)h'(y)y'] \tag{1.9}$$

可化为分离变量的方程, 其通积分为

$$\int\frac{dw}{w^2+a}=\int\frac{f(u)}{bu}du, \tag{1.10}$$

其中 $u=v^b(x)+ah^b(y)$, $w=[v(x)]^{\frac{b}{2}}/[h(y)]^{\frac{b}{2}}$.

证 令 $u=v^b(x)+ah^b(y)$, $w=[v(x)]^{\frac{b}{2}}/[h(y)]^{\frac{b}{2}}$, 有

$$u'(x)=bv^{b-1}(x)v'(x)+abh^{b-1}(y)h'(y)y',$$

$$u'(x)=\frac{\frac{b}{2}v^{\frac{b}{2}-1}(x)v'(x)h^{\frac{b}{2}}(y)-\frac{b}{2}v^{\frac{b}{2}}(x)h^{\frac{b}{2}-1}(y)h'(y)y'}{h^{b}(y)}$$

于是原方程变形为

$$f(u)\frac{u'}{b}=\frac{u}{u^2+a}u'.$$

这已是可分离变量的方程，其通积分为(1.10).

§1.3 伯努利方程与克雷洛方程的推广

1.3.1 Bernoulli(伯努利)方程的推广

我们给出了广义的 Bernoulli 方程可积的充分条件，即定理 1.14，它是 Bernoulli 方程的推广.

形如

$$\varphi(x)f_1'(y)\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+[P(x)\varphi(x)+\varphi'(x)]f_2(y)=Q(x)f_3(y) \tag{1.11}$$

(其中 $P(x),Q(x)\in C,\varphi(x),f_1(y),\ f_2(y),\ f_3(y)$具有一阶导数，且 $\varphi(x)\neq 0,f_1'(y)\neq 0$)的一阶非线性微分方程可写为

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+\left[P(x)+\frac{\varphi'(x)}{\varphi(x)}\right]\frac{f_2(y)}{f_1'(y)}=\frac{Q(x)}{\varphi(x)}\frac{f_3(y)}{f_1'(y)}. \tag{1.12}$$

作变量代换

$$z=\frac{f_2(y)}{f_1'(y)}\Big/\frac{f_3(y)}{f_1'(y)}=\frac{f_2(y)}{f_3(y)}, \tag{1.13}$$

于是

$$\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}=\left[\frac{f_2(y)}{f_3(y)}\right]'\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}. \tag{1.14}$$

将(1.12)代入(1.14)得

$$\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}=-\left[P(x)+\frac{\varphi'(x)}{\varphi(x)}\right]\left[\frac{f_2(y)}{f_3(y)}\right]'\frac{f_3(y)}{f_1'(y)}\frac{f_2(y)}{f_1'(y)}\Big/\frac{f_3(y)}{f_1'(y)}$$
$$+\frac{Q(x)}{\varphi(x)}\frac{f_3(y)}{f_1'(y)}\left[\frac{f_2(y)}{f_3(y)}\right]'. \tag{1.15}$$

若令

$$\frac{f_3(y)}{f_1'(y)}\left[\frac{f_2(y)}{f_3(y)}\right]'=\alpha \quad (\alpha\neq 0 \text{ 为常数}), \tag{1.16}$$

则(1.15)可写为一阶线性方程

$$\frac{dz}{dx}+\alpha\left[P(x)+\frac{\varphi'(x)}{\varphi(x)}\right]z=\alpha\frac{Q(x)}{\varphi(x)}.$$

因此，可用常数变易法求得其通解为

$$z=e^{-\alpha\int\left[P(x)+\frac{\varphi'(x)}{\varphi(x)}\right]dx}\left[\alpha\int\frac{Q(x)}{\varphi(x)}e^{\alpha\int\left[P(x)+\frac{\varphi'(x)}{\varphi(x)}\right]dx}dx+c\right]$$

$$=\frac{1}{\varphi^{\alpha}(x)}e^{-\alpha\int P(x)dx}\left[\alpha\int Q(x)\varphi^{\alpha-1}(x)e^{\alpha\int P(x)dx}dx+c\right],$$

代回原来的变量得

$$\frac{f_2(y)}{f_3(y)}=\frac{1}{\varphi^{\alpha}(x)}e^{-\alpha\int P(x)dx}\left[\alpha\int Q(x)\varphi^{\alpha-1}(x)e^{\alpha\int P(x)dx}dx+c\right], \tag{1.17}$$

从而得：

定理 1.14 如果 $f_1'(y)$、$f_2(y)$、$f_3(y)$满足条件

$$\frac{f_3(y)}{f_1'(y)}\left[\frac{f_2(y)}{f_3(y)}\right]'=\alpha \quad (\alpha\neq 0 \text{ 为常数}),$$

则广义 Bernoulli 方程

$$\varphi(x)f_1'(y)\frac{dy}{dx}+[P(x)\varphi(x)+\varphi'(x)]f_2(y)=Q(x)f_3(y)$$

(其中 $P(x)$、$Q(x)\in C$，$\varphi(x)$、$f_1(y)$、$f_2(y)$、$f_3(y)$具有一阶导数，且 $\varphi(x)\neq 0$，$f_1'(y)\neq 0$)可积，其通积分为

$$\frac{f_2(y)}{f_3(y)}=\frac{1}{\varphi^{\alpha}(x)}e^{-\alpha\int P(x)dx}\left[\alpha\int Q(x)\varphi^{\alpha-1}(x)e^{\alpha\int P(x)dx}dx+c\right],$$

其中 c 为任意常数.

推论 1.1 形如

$$\varphi(x)f'(y)\frac{dy}{dx}+[P(x)\varphi(x)+\varphi'(x)]f(y)=Q(x)$$

的方程的通积分为

$$f(y)=\frac{1}{\varphi(x)}e^{-\int P(x)dx}\left[\int Q(x)e^{\int P(x)dx}dx+c\right].$$