TSINGHUA UNIVERSITY

运筹学

——规划论及网络

王永县 编著

清华大学出版社

运　筹　学

——规划论及网络

王永县　编著

清 华 大 学 出 版 社

内 容 简 介

本书是作者根据多年为研究生讲授运筹学的经验和参考许多国内外有关领域的资料编著而成。书中重点阐述了运筹学的最基本内容:规划论(包括线性规划、整数规划、动态规划和非线性规划)和网络(包括图论基本知识和网络极值问题)。在叙述有关内容时,作者强调每种方法的思路和技巧,强调物理概念。既避免简单的方法罗列,又防止单纯的数学推导,而是结合大量例题,深入浅出地介绍每种运筹学寻优方法的产生背景、基本原理、求解过程及应用价值。使读者不仅学到方法本身,而且可以开阔思路和提高科研能力。

本书可作工科大学管理工程和自动化等专业研究生的教科书,亦可作本科生及进修班的参考书,对系统工程等有关人员也是有用的参考资料。

(京)新登字 158 号

运 筹 学

——规划论及网络

王永县　　编著

责任编辑　魏荣桥

☆

清华大学出版社出版

北京　清华园

清华大学印刷厂印刷

新华书店总店科技发行所发行

☆

开本:787×1092 1/16　印张:14　字数:331 千字

1993 年 8 月第 1 版　1993 年 8 月第 1 次印刷

印数:0001—6000

ISBN 7-302-01247-4/F・73

定价:6.90 元

前　言

运筹学是系统工程的最重要理论基础。随着时间的推移，它愈来愈显示出极其广泛的应用价值。运筹学是既富有深奥的理论基础，又具有很强的实用价值的一门学科。因此，在向读者阐述运筹学内容时，如何在有限篇幅内，从繁杂的运筹学内容中选出关键的基础部分，以及在介绍中既要坚持一定理论深度、又要避免枯燥的单纯数学引证，始终是作者追求的目标。

作者认真研究了许多国内外有关该领域的图书资料，并根据为清华大学研究生多年授课的经验，认为“规划论”(包括线性规划、整数规划、动态规划和非线性规划)和网络(图论的基本知识和网络极值问题)是运筹学最基本内容。同时，作者在介绍各类运筹学的寻优方法时，始终强调思路和方法，着重提高分析研究能力。对每种方法都论述其产生背景、必要性、基本原理、方法步骤和应用价值；对基本原理进行推导时，着重强调物理概念。这样，读者就不会感到运筹学内容繁琐枯燥，而是感到丰富有趣。

在本书的写作过程中，得到了清华大学郑维敏教授的帮助和支持；同时，作者从 Franklin Joel 和傅家良等许多国内外学者的著作中(详见书末参考文献)得到许多启发，在书中直接或间接地引用了他们的一些精辟见解和有趣习题，在此一并表示感谢。

由于作者水平有限，书中错误在所难免，恳请指教。

作者
于清华大学

绪　论

运筹学(Operations Research)是系统工程的最重要理论基础之一，在美国有人把运筹学称之为管理科学(Management Science)。运筹学所研究的问题，可简单地归结为一句话："依照给定条件和目标，从众多方案中选择最佳方案"，故有人称之为最优化技术。

对于任何一门学科，要探讨其朴素的思想起源，都可追朔到很远。有人发现，在我国的先秦时期的诸子著作中，就存在许多朴素的运筹思想，因为"运筹"就是动脑筋想办法，去选择最优方案。从这个意义讲，运筹思想很早就在人们的头脑中产生。但真正被人们公认的运筹学起源时间是 20 世纪初期，到 20 世纪 40 年代就出现了"运筹学"这个名字，1938 年英国最早出现了军事运筹学，命名为"Operational Research"，1942 年，美国从事这方面工作的科学家命其名为"Operations Research"，这个名字一直延用至今。

本世纪 30 年代后期，英国从事雷达研制，以便建立新的空防预警系统。当科学家们初步完成研制设计后，一个新的问题出现了，即如何使空防系统有效地加以运用，对这些问题的研究内容被命名为运筹学。从事这项工作的大多数是自然科学家，例如，英国第一个运筹学小组的领导人布莱开特(P. M. S. Blacket)就是一个著名的物理学家，他领导的小组首先研究了野外火炮控制设备的效能及其在实战中的应用。该小组有 11 名成员，其中有 2 名数学家，2 名普通物理学家，1 名理论物理学家，1 名天体物理学家，1 名测量员，3 名生理学家及 1 名军官。美国在 1942 年成立的运筹学小组成员也主要由数学家和物理学家组成。

美国运筹学的早期著名工作之一是研究深水炸弹起爆深度问题。第二次世界大战时，德国潜艇严重威胁盟军的运输船，于是研究如何用飞机投掷深水炸弹摧毁敌人潜艇就成为当务之急。其中，除了研究搜索技术之外，一个重要问题是，当飞机发现潜艇后，飞机何时投掷炸弹及炸弹的引爆深度是多少?运筹学工作者对大量统计数字进行认真分析后，提出如下决策：1. 仅当潜艇浮出水面或刚下沉时，方投掷深水炸弹。2. 炸弹的起爆深度为离水面 25 英尺(这是当时深水炸弹所容许的最浅起爆点)。空军采用上述决策后，所击沉潜艇成倍增加，从而为运筹学增添了荣誉。与此同时，运筹学在其它军事领域亦取得了显著成果，而这些问题仅应用了初等概率和统计，但却解决了许多实际问题。

第二次世界大战以后，许多科学家从事运筹学理论探讨，因此形成了运筹学的许多分支。也许有人怀疑，运筹学是研究从众多方案(甚至无限多个方案)中选佳的优化技术，那么在当代计算机技术迅速发展的今天，这种优化技术是否会丧失其重要性？事实正相反，实践证明，计算机科学的发展，新型计算机的出现，恰为运筹学的应用开辟了新天地。在一次巴黎国际学术会议上，有人专门阐述运筹学中的线性规划问题的单纯形求解方法的效率：假设有 70 艘油轮向 70 个港口运货，已知每艘油轮驶向每个港口的费用，油轮公司总经理需制订出最优运输方案。显然，采用全枚举法(穷举法)需计算方案数为 $70! \geqslant 10^{100}$；IBM 公司当时生产的大计算机 1 秒钟大约可算出 10^9(即 10 亿)个方案。若要逐个算出全部方案，则需调用占有空间为 10^{50}个地球一样大的 IBM 公司生产的众多大计算机同时计算几百亿年以上。而在这种大机器上用线性规划的单纯形法计算只需几秒钟(这是整数规

划问题)。可见,将运筹学与计算机科学及其它科学结合应用,将会产生更好的效果。

运筹学发展到今天,内容已相当丰富,分支也很多。对其内容的分类方法不尽相同,主要是根据解决的问题特点以及技术本身特点来分类。根据解决问题的主要特征可分两大类:确定型和概率型。其中,确定型中包含:线性规划,整数规划,动态规划,非线性规划,多目标决策及确定性存贮等;概率型中包含:回归分析,决策论,对策论,排队论,马尔可夫链,图论与网络,概率存贮及搜索技术等。

当然,上述所述仅是一种习惯分类法,每大类下面的专门技术并不意味着只解决这类问题,例如动态规划亦可处理概率型问题,决策论亦可处理确定型问题等等。本书将阐述运筹学中最基本的部分——规划论(即线性规划,整数规划,动态规划及非线性规划)及网络(即图论与网络)。

目　　录

第一章　线性规划

第一节　引　　论

一、概述

线性规划的广泛应用是计算机时代的产物，但理论阐述在1902年就已出现，其影响线性规划进程的典型事例为：

· 1902年，Julius Farkas发表论文，阐述有关线性规划问题，但他自己也未曾想到，这种见解以后会有如此大的价值。

· 1938年，英国人康德进行较详细研究。

· 1947年，美国学者George Dantzig（丹茨格）发明了求解线性规划的单纯形法（1951年发表），从而为线性规划的推广奠定了基础。有人认为，求解线性规划的单纯形算法可与求解线性方程组的高斯消元法相媲美。

然而，线性规划求解的问题比线性方程组更为广泛，线性方程组只求解等式方程，对不等式无能为力，而线性规划允许约束条件为等式或不等式（另外要附加优化条件），因此，线性规划的应用前景更为广阔。

线性规划的数学模型有三要素，从实际问题提炼成数学模型时，首先寻找需求解的未知量 $x_j(j=1,\cdots,n)$，然后列举三要素：

1. 列写与自变量（未知量）有关的若干个线性约束条件（等式或不等式）。

2. 列写自变量 x_j 的取值限制（$x_j\geqslant 0$，$x_j\leqslant 0$ 或不限）。

3. 列写关于自变量的线性目标函数值（极大值或极小值）。

其中，前两条称为可行条件，最后一条称为优化条件。符合这三个条件的数学模型通常称为线性规划的一般型（general）。任何问题一旦描述为线性规划的一般型，总可以变为单纯形法求解的标准型式，因此，对于一般用户来说，只要把实际问题提炼成线性规划模型，则就可调用已研制的单纯形法程序求解，这就是线性规划方法之所以应用极其广泛的主要原因。

二、从实际问题中提炼数学模型举例

［**例1-1**］　饮食问题

每人每天食用的食品中含有各种必需的营养素，家庭主妇面临着一种抉择：如何采购食品，才能在保证必需营养素最低需求量前提下花钱最少？这是典型的线性规划问题。

设有 n 种食品供选择，m 种营养素应保证一定量。令：

x_j——每天食用的 j 种食品数量；

c_j——单位 j 种食品的价格；

a_{ij}——单位 j 种食品含有 i 种营养素数量；

b_i——每天对营养素 i 的最低需求量。

针对问题特点，可列写线性规划数学模型如下：

$a_{i1}x_1+a_{i2}x_2+\cdots+a_{in}x_n\geqslant b_i$ （最低营养需求约束）

$x_j\geqslant 0$ （自变量约束，食品量不会为负）

$z=c_1x_1+c_2x_2+\cdots+c_nx_n=\min$ （目标函数，使购食品费用取最小值）

$$(i=1,2,\cdots,m;j=1,2,\cdots,n)$$

［**例 1-2**］ Chebyslev 近似

给出一组方程

$$a_{i1}x_1+a_{i2}x_2+\cdots+a_{in}x_n=b_i \quad (i=1,2,\cdots,m)$$

其中，$m\gg n$，希求一组近似解 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 使误差尽量小。即求一组解使之代入方程组中，造成不满足约束的方程的最大误差量尽量小。这是长期以来被认为必存在这样一个解而又很难找到解的问题，然而用线性规划求解却比较方便。下面就讨论如何建立该问题的线性规划数学模型。

设：
$$\varepsilon_i=b_i-(a_{i1}x_1+a_{i2}x_2+\cdots+a_{in}x_n) \quad (i=1,2,\cdots,m)$$
$$\mu=\max(|\varepsilon_1|,|\varepsilon_2|,\cdots,|\varepsilon_m|)$$

则问题变为求出一组 $x_j(j=1,2,\cdots,n)$ 使 μ 尽量小，于是变为

$$-\mu\leqslant\varepsilon_i\leqslant\mu \qquad (i=1,2,\cdots,m)$$

即 $$-\mu\leqslant b_i-a_{i1}x_1-\cdots-a_{in}x_n\leqslant\mu \qquad (i=1,2,\cdots,m)$$

且令 $\mu\rightarrow\min$

为统一标志，令 $x_0=\mu$，则上述问题变为下述线性规划问题

不等式约束：
$$\left.\begin{aligned}&x_0+a_{i1}x_1+\cdots+a_{in}x_n\geqslant b_i\\&x_0-a_{i1}x_1-\cdots-a_{in}x_n\geqslant -b_i\end{aligned}\right.\quad (i=1,2,\cdots,m)$$

自变量约束：$x_0\geqslant 0$，x_j 不限 $(j=1,2,\cdots,n)$

目标函数： $z=x_0=\min$

从上面例子中看出，列写线性规划数学模型的关键步骤为：

1. 根据问题性质，找出需求解的变量，即自变量。

2. 根据问题的限制因素或条件，列出自变量的取值限制及与自变量有关的线性约束条件（等式约束或不等式约束）。

3. 根据问题的目标要求，列出与自变量有关的线性目标函数（极大值或极小值）。

第二节　线性规划及其对偶

对偶特性是线性规划的最重要特征，有人称对偶是线性规划的心脏，本书将把对偶问题贯彻于线性规划之始终。

一、对偶问题的现实来源

设某工厂生产两种产品甲和乙，生产中需 4 种设备按 A,B,C,D 顺序加工，每件产品

加工所需的机时数、每件产品的利润值及每种设备的可利用机时数列于表 1-1。

表 1-1 产品数据表

设备 / 产品	A	B	C	D	产品利润(元/件)
甲	2	1	4	0	2
乙	2	2	0	4	3
设备可利用机时数(时)	12	8	16	12	

1. 问:充分利用设备机时,工厂应生产甲和乙型产品各多少件才能获得最大利润?试列出相应线性规划数学模型。

设,甲及乙型产品各生产 x_1 及 x_2 件,则数学模型为:

$$\left.\begin{aligned} 2x_1+2x_2&\leqslant 12\\ x_1+2x_2&\leqslant 8\\ 4x_1\qquad&\leqslant 16\\ 4x_2&\leqslant 12 \end{aligned}\right. \quad \text{(机时限制)}$$

$$x_j\geqslant 0 \quad j=1,2 \quad \text{(变量限制,产品量必为正)}$$

$$z=2x_1+3x_2=\max \quad \text{(目标函数,使利润最大)}$$

2. 反过来问:若厂长决定不生产甲和乙型产品,决定出租机器用于接受外加工,只收加工费,那末 4 种机器的机时如何定价才是最佳决策?

也许有人会马上回答:定价愈高,收益愈大,故必是最佳决策。然而这是错误的,因为定价太高,势必失去顾客,从而也必减少收益。在市场竞争时代,厂长的最佳决策显然应符合两条:

① 不吃亏原则。即机时定价所赚利润不能低于加工甲、乙型产品所获利润。由此原则,便构成了新规划的不等式约束条件。

② 竞争性原则。即在上述不吃亏原则下,尽量降低机时总收费,以便争取更多用户。

设 A、B、C、D 设备的机时价分别为 y_1、y_2、y_3、y_4,则新的线性规划数学模型为:

$$\left.\begin{aligned} 2y_1+y_2+4y_3+0y_4&\geqslant 2\\ 2y_1+2y_2+0y_3+4y_4&\geqslant 3 \end{aligned}\right\} \quad \text{(不吃亏原则)}$$

$$y_j\geqslant 0 \qquad j=1,2,3,4 \qquad \text{(定价必为正)}$$

$$\min w=12y_1+8y_2+16y_3+12y_4 \qquad \text{(目标函数,使收费最低)}$$

把同一种问题的两种提法所获得的数学模型用表 1-2 表示,将会发现一个有趣的现象。

表 1-2 原问题与对偶问题对比表

	$A_{(y_1)}$	$B_{(y_2)}$	$C_{(y_3)}$	$D_{(y_4)}$	
甲(x_1)	2	1	4	0	2
乙(x_2)	2	2	0	4	3
	12	8	16	12	min w max z

表 1-2,直接去看是原问题,将它转 90°看便是对偶问题。当然,对偶是相互的,若把表转 90°看成是原问题,则原表亦可看成是相应的对偶问题。

二、原问题与对偶问题的对应关系

1. 原问题表达式(结合实例)

例如,给定一线性规划为

$$\left.\begin{aligned} x_1 - 2x_2 + x_3 &= 4 \\ -x_1 + 3x_2 \quad\quad &= 5 \end{aligned}\right\} \qquad \text{(约束)}$$

$$x_1 \geqslant 0, \quad x_2 \geqslant 0, \quad x_3 \geqslant 0$$

$$x_1 + 2x_2 + 3x_3 = \min \qquad \text{(目标函数)}$$

写成矩阵形式为

$$AX = b$$
$$X \geqslant 0$$
$$C^{\mathrm{T}}X = \min$$

其中,

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \\ -1 & 3 & 0 \end{bmatrix} \qquad X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

$$b = \begin{bmatrix} 4 \\ 5 \end{bmatrix} \qquad C^{\mathrm{T}} = [1,2,3]$$

2. 相应的对偶问题表达式为:

$$\left.\begin{aligned} y_1 - \quad y_2 &\leqslant 1 \\ -2y_1 + 3y_2 &\leqslant 2 \\ y_1 \quad\quad\quad &\leqslant 3 \end{aligned}\right\} \qquad \text{(约束)}$$

$$y_1, y_2 \text{ 不限制}$$

$$4y_1 + 5y_2 = \max \qquad \text{(目标函数)}$$

写成矩阵形式

$$Y^{T}A \leqslant C^{T}$$
$$Y^{T}b = \max$$

其中，

$$Y = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix}$$

由此例看出，线性规划 $AX=b, X \geqslant 0, C^{T}X=\min$ 的对偶问题，即为 $Y^{T}A \leqslant C^{T}, Y^{T}b=\max$

3. 原问题与对偶问题的转换

若把上例原问题的约束条件由等式变为不等式，则对偶问题的自变量取值由无限制变为有限制，即

原问题变为

$$\left.\begin{aligned} x_1 - 2x_2 + x_3 &\geqslant 4 \\ -x_1 + 3x_2 \quad\quad &\geqslant 5 \end{aligned}\right\} \quad \text{(约束)}$$
$$x_1, x_2, x_3 \geqslant 0$$
$$x_1 + 2x_2 + 3x_3 = \min \quad \text{(目标函数)}$$

则对偶问题变为

$$\left.\begin{aligned} y_1 - \quad y_2 &\leqslant 1 \\ -2y_1 + 3y_2 &\leqslant 2 \\ y_1 \quad\quad &\leqslant 3 \end{aligned}\right\} \quad \text{(约束)}$$
$$y_1, y_2 \geqslant 0$$
$$4y_1 + 5y_2 = \max \quad \text{(目标函数)}$$

于是，作为一般形式，二者关系可归纳如下，对于原问题定义为：

约束条件

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j \geqslant b_i \qquad \text{当 } i \in \mathrm{I}_1$$
$$= b_i \qquad \text{当 } i \in \mathrm{I}_2$$

其中，$\mathrm{I}_1, \mathrm{I}_2$ 是整集 I 中的拆集，$\mathrm{I} = \mathrm{I}_1 \cup \mathrm{I}_2 = \{1,2,\cdots,m\}$。

自变量限制　　$x_j \geqslant 0$　当　　　　$j \in \mathrm{J}_1$

$\mathrm{J}_1 \in \mathrm{J} = \{1,2,\cdots,n\}$

若 J_1 为空集，则无符号约束(即自变量无限制)

若 $\mathrm{J}_1 = \mathrm{J}$，则所有 $x_j \geqslant 0$

目标函数

$$\sum_{j=1}^{n} c_j x_j = \min$$

则，相应的对偶问题定义为：

令对偶变量　　　　$Y = y_1, \cdots, y_m$

约束条件

$$\sum_{i=1}^{m} y_i a_{ij} \leqslant c_j \qquad 当\ j \in \mathrm{J}_1$$

$$= c_j \qquad 当\ j \in \mathrm{J}_2$$

自变量限制 $\quad y_i \geqslant 0 \qquad$ 当 $i \in \mathrm{I}_1$

$\qquad\qquad y_i$ 不限 $\qquad$ 当 $i \in \mathrm{I}_2$

目标函数

$$\sum_{i=1}^{m} y_i b_i = \max$$

三、线性规划的规范型

对偶是线性规划的心脏，但由原问题转化为相应的对偶问题需遵循一定规则，首先需将原问题化为约定形式。为了研究对偶问题而约定的线性规划形式，我们称之为规范型。用矩阵表示为：

$$AX \geqslant b$$
$$X \geqslant 0$$
$$C^{\mathrm{T}} X = \min$$

其相应的对偶问题必为：

$$Y^{\mathrm{T}} A \leqslant C^{\mathrm{T}}$$
$$Y \geqslant 0$$
$$Y^{\mathrm{T}} b = \max$$

如果原规划不符合规范型，则需加以变换，其方法为：

1. 若约束条件为"$\leqslant$"不等式，则两边同乘以负号；

 若约束条件为"$=$"等式，则变为两个不等式。例如 $\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = b_i$ 可变为：

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \geqslant b_i \\ \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \leqslant b_i \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \geqslant b_i \\ -\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \geqslant -b_i \end{cases}$$

2. 若自变量 x_j 无限制，可令 $x_j = u_j - v_j$，且 $u_j \geqslant 0, v_j \geqslant 0$；

 若自变量 $x_j \leqslant 0$，可令 $x_j' = -x_j$，且 $x_j' \geqslant 0$。

3. 若目标函数为 $z = C^{\mathrm{T}} X = \max$，可变为 $z' = -z = -C^{\mathrm{T}} X = \min$。

经过上述变换，原规划变为规范型，则对偶问题很易写出。然而，上述变换把原来等式约束变为两个不等式，把不限制的自变量变为两个自变量，从而增加了对偶问题的规模。为克服该缺点，特定义一个新的线性规划规范型如下：

约束

$$AX \geqq b$$

$$X \quad \geqslant 0 \quad 或不限$$

目标函数 $\qquad C^{\mathrm{T}} X = \min$

则，相应的对偶问题形式为

约束

$$Y^{T}A \lesseqqgtr C^{T}$$

$$Y \geqslant 0 \quad 或不限$$

$$Y^{T}b = \max$$

下面主要介绍新规范型之变换及如何写出对偶规则。本文不加说明，规范型是指新规范型。

举例，写出下述线性规划的规范型：

$$\begin{aligned} x_1 - 2x_2 + x_3 &\leqslant 4 \\ -x_1 + 3x_2 &\geqslant 5 \\ x_1 + x_3 &= 10 \\ x_1 \geqslant 0,\ x_3 &\leqslant 0 \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 &= \max \end{aligned}$$

变换为规范型如下：令 $x_3' = -x_3$ 把"$\leqslant$"变为"$\geqslant$"，把"max"变为"min"，则得

$$\begin{aligned} -x_1 + 2x_2 + x_3' &\geqslant -4 \\ -x_1 + 3x_2 &\geqslant 5 \\ x_1 - x_3' &= 10 \\ x_1 \geqslant 0,\ x_3' &\geqslant 0 \\ -x_1 - 2x_2 + 3x_3' &= \min \end{aligned}$$

按照前面定义，知 $I=\{1,2,3\}$，$J=\{1,2,3\}$，$I_1=\{1,2\}$，$I_2=\{3\}$，$J_1=\{1,3\}$，$J_2=\{2\}$

于是相应的对偶形式为

$$\begin{aligned} -y_1 - y_2 + y_3 &\leqslant -1 \\ 2y_1 + 3y_2 &= -2 \\ y_1 - y_3 &\leqslant 3 \\ y_1 \geqslant 0,\ y_2 &\geqslant 0. \\ -4y_1 + 5y_2 + 10y_3 &= \max \end{aligned}$$

四、对偶规划规范型及其变换

前面介绍了依据原规划问题找出对偶问题的一般方法，现进一步阐述全用规范型表达两类规划形式的方法。

原问题(规范型)

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j &\geqslant b_i \qquad i \in I_1 \\ &= b_i \qquad i \in I_2 \\ x_j &\geqslant 0 \qquad j \in J_1 \\ \sum_{j=1}^{n} c_j x_j &= \min \end{aligned}$$

对偶问题(规范型)

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{m} (-a_{ij})\, y_i &\geqslant -c_j \qquad j \in J_1 \\ &= -c_j \qquad j \in J_2 \\ y_i &\geqslant 0 \qquad i \in I_1 \\ \sum_{i=1}^{m} (-b_i) y_i &= \min \end{aligned}$$

从前面定义可推导出，对偶之对偶是原问题。因为线性规划规范型可由五元素构成，可表示为

$$P=(A;b,C;I_1,J_1)$$

则相应对偶问题可表示为

$$P=(-A^T;-C,-b;J_1,I_1)$$

可见对偶问题的形成，只需在原问题中用 $-A^T$ 代替 A，$-C$ 代替 b，$-b$ 代替 C，J_1 代替 I_1，I_1 代替 J_1。例如，设原问题为 $AX=b,X\geqslant 0,C^TX=\min$，即为 $P(A;b,C;\phi,J)$，其中，ϕ 表示 I_1 为空集，J 表示 J_1 为全集($J=1,2,\cdots,m$)。则根据定义，其对偶问题为 $P(-A^T;-C,-b;J,\phi)$，展开规范形式为

$$-A^TY\geqslant -C$$
$$-b^TY=\min$$

等效变为常规形式

$$Y^TA\leqslant C^T$$
$$Y^Tb=\max$$

这就是常见的原问题的对偶表示形式。

由此定义，很易证明原问题之对偶的对偶仍是原问题。

设 P 是原问题，DP 是对偶问题。则知

$$D\cdot DP(A;b,C;I_1,J_1)=DP(-A^T;-C,-b;J_1,I_1)$$
$$=P(A;b,C;I_1,J_1)$$

证毕。

五、线性规划的标准型及其转换

为适应单纯形法求解，必须把线性规划模型变为下述标准形式：

$$AX=b,X\geqslant 0,C^TX=\min \quad 或$$
$$AX=b,X\geqslant 0,C^TX=\max$$

不加说明，本文指前一种形式。

由线性规划一般型变为规范型(新规范型)方法前已阐明，现介绍如何把规范型变为标准型。规范型定义为 $AX\gtreqqless b,X\geqslant 0$ 或不限，$C^TX=\min$，与标准型之差别为 $AX\geqslant b$ 或 X 不限两种情况。

1. 若出现

$$\sum_{j=1}^{n}a_{ij}x_j\geqslant b_i \qquad (i\in I_1)$$

则增加剩余变量 z_i，使“$\geqslant$”变为“$=$”得

$$\sum_{j=1}^{n}a_{ij}x_j-z_i=b_i \qquad (i\in I_1)$$
$$x_j\geqslant 0,\quad z_i\geqslant 0$$

2. 若出现 x_j 不限，即 $-\infty<x_j<\infty$，$(j\in J_2)$

则令 $$x_j=u_j-v_j \quad (j\in J_2),u_j\geqslant 0,v_j\geqslant 0$$

这样，便使所有约束变为等式，且自变量全大于或等于 0。

例如，将下述线性规划规范型变为标准型。

$$x_1 + 2x_2 \geqslant 3$$
$$4x_1 + 5x_2 = 6$$
$$x_1 \geqslant 0, x_2\text{不限}$$
$$7x_1 + 8x_2 = \min$$

令 $x_2 = u_2 - v_2$，增加剩余变量 z_1 于第 1 式得

$$x_1 + 2u_2 - 2v_2 - z_1 = 3$$
$$4x_1 + 5u_2 - 5v_2 = 6$$
$$x_1, u_2, v_2, z_1 \quad \text{全} \geqslant 0$$
$$7x_1 + 8u_2 - 8v_2 = \min$$

综合上述，线性规划主要有三种表达形式：便于从实际问题中提炼数学模型的一般型(general)；便于转化为对偶问题的规范型(Standard)，以及用于单纯形法求解的标准型(Canonical)。只要知道了一般型，便很容易变换为规范型及标准型。

第三节 用对偶分析原问题的最优解

一、初步分析线性规划解的几种可能性

已知线性规划的标准形式为

$$AX = b,\ X \geqslant 0,\ C^{T}X = \min$$

满足前 2 条的解为可行解，同时又满足第 3 条的为最优解。从解的性质看，线性规划有下述几种可能：

1. 不存在可行解或无解，例如规划

$$x_1 = -1$$
$$x_1 \geqslant 0 \qquad \text{无可行解}$$
$$3x_1 = \min$$

2. 存在可行解，但找不到最优解，例如规划

$$x_1 - x_2 = 0$$
$$x_1,\ x_2 \geqslant 0$$
$$-2x_1 = \min$$

显然，令 $x_1 = x_2 = \lambda$，λ 为任意非负值都是可行解，当 $\lambda \to +\infty$，则目标函数 $-2x_1 \to -\infty$，故找不出使目标函数取极小值的具体解 X。

3. 存在最优解，但不是唯一的。例如规划

$$x_1 + x_2 = 1$$
$$x_1,\ x_2 \geqslant 0$$
$$x_1 + x_2 = \min$$

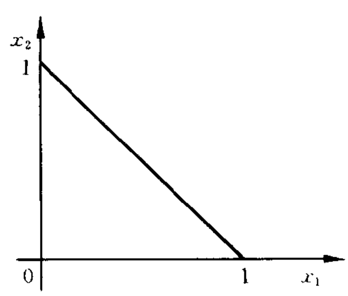

图 1-1

显然 $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ 及 $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ 两点连线上的所有点