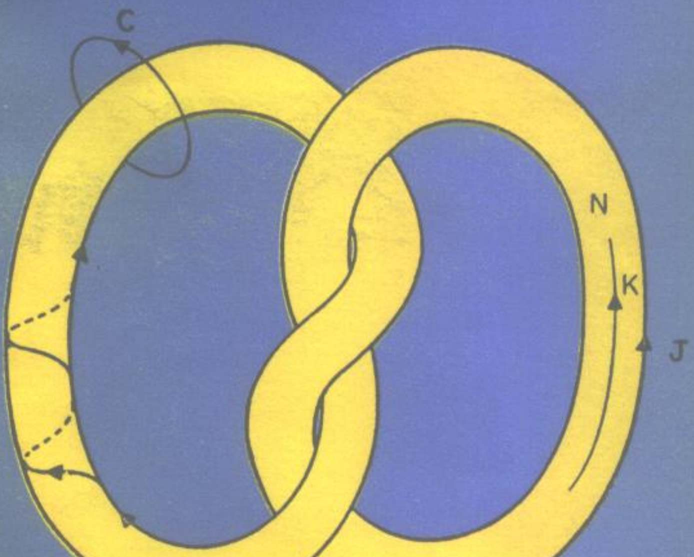
代数拓扑

[美] M.J.格林伯格　J.R.哈普尔 著

刘亚星 史存海 郭天榜 译

高等教育出版社



代数拓扑

[美] M. J. 格林伯格　J. R. 哈普尔 著
刘亚星　史存海　郭天榜 译

高等教育出版社

内 容 简 介

本书根据 M. J. Greenberg 和 J. R. Harper著《Algebraic Topology》(BENJAMIN-CUMMINGS 公司 1981 年版) 译出。它是 Greenberg 原著《Lecrures on Algebraic Topology》的修订本.

本书内容充实，包括同伦，奇异同调，奇异上同调，乘积运算，对偶定理等知识，全书共分 31 节，每节讲一个问题，主题明确，论证简洁，结构严谨，体例清晰，并注意发展动态，在一些关键地方对最新成果及前沿问题均有所探讨.

本书可供数学系代数拓扑及有关专业师生作为教材或参考书。

代数拓扑

〔美〕M. J. 格林伯格 J. R. 哈普尔 著

刘亚星 史济海 郭天榜 译

高等教育出版社 出版

新华书店北京发行所发行

国防工业出版社印刷厂印装

开本 850×1168 1/32 印张 10 字数 238,000

1990 年 6 月第 1 版 1990 年 6 月第 1 次印刷

印数 0001—2,610

ISBN 7-04-000271-X/O·291

定价 2.45 元

序　言

代数拓扑是二十世纪数学主要成就之一．它在数学其它分支，诸如代数[38]，数论[4, 49]，代数几何[27, 31, 50]，微分几何[26]，以及分析[12, 1963—1964]上的影响曾是巨大的．就自身来说，它是研究拓扑空间，特别是流形的主要工具．它的关键思想是给拓扑空间和它们的映射附上代数结构，这些代数结构在一些空间变形和映射下都是不变的，而且是可计算的．

本书旨在作为内容足够的初等教程，使得学生既有能力把这一主题用于其它研究领域，也(或)有能力探求它在更高级的教本和文献中的发展和应用．

我们这本书是第一个著者的《代数拓扑讲义》一书的修订本．修订的目的是要增加一些理论，例子和练习，以便提高、简化原来的讲法并使之现代化．原书的观点和编著原则都保存了下来．实际上原书的全部内容都再度写入．

在增加的材料中，对计算给予特别的注意，并用更多的几何去平衡所有的代数内容．

本书基本上有四部分：第 1—7 节构成第一部分，同伦论初步．定义了道路和映射的同伦，并构造了基本群．给出了覆盖空间用基本群的子群的分类，并且，最后按 Hurewicz 的作法，用圈空间归纳地定义了高维同伦群．

第 8—21 节为第二部分，研究奇异同调论．这一部分曾受到 E. Artin 的清楚易懂的短文[3]和 Eilenberg-Steenrod 的工作[23]的影响．与单纯同调论相比，奇异同调论的优点是：第一，它可用于任意拓扑空间；第二，它明显是拓扑不变量，第三，一旦

证明了切除定理，就不再需要重分；最后，一经证明了基本公式(19.16—19.18)，计算是比较容易的．在代数拓扑中组合技巧仍然很重要[36, 62, 70]．不过，现在公认代数拓扑至少包括三个不同范畴——拓扑范畴、微分范畴和分段线性范畴．在这本书中，我们首先研究第一个范畴(第二个范畴的参考文献见[15, 17, 41—44, 51, 55, 68, 71])．同调论对球面的经典应用在第15, 16和18节中给出．

第22—28节构成第三部分，流形的可定向性与对偶性．这一部分受到Dold, Puppe和Milnor论文的很大影响．在这一研究中不需要可三角剖分性的任何假定．对对偶性来说正确的上同调理论是Alexander-Cech上同调；不过，为简短起见，我们只把一个子空间A的Alexander-Cech上同调模描述为A的邻域的奇异上同调模的归纳极限．我们证明当A是一个紧绝对邻域收缩核时它和奇异上同调模一致．

最后在第四部分我们展示一下上同调中乘积理论的基本特征．应用中包括紧定向流形的Lefschetz不动点定理及闭流形中相交理论的一个介绍．

每一部分都分成若干节，这是这一教本的编著单元．在学习次序上有相当大的灵活性(特别是后面几部分)．在第二部分中许多节是以初读时可以略读或不读的材料结束的．

绝大多数节的结尾都有一组练习题．没有理论展开依赖于一个习题，也没有把进一步的理论材料作为习题给出．绝大多数习题和计算有关，而且在主题展开中，作了几何应用．习题中间有许多交叉关系．提供了对展开理论有用的计算上的精炼．类似地，在若干节中作了几何结果的改进．这一过程模仿主题实际展开的方式，因此对该主题逐步抽象化的层次可能起促进作用．一些习题附有解的提示．不要把这些提示看得过于认真．绝大多数问题都

可用不同的方法来解，并且个人喜爱的解法可能得不到广泛的赞成，但是完全"难住"是令人泄气的，所以提示是提供来缓和那种情形的。

这本书的预备要求除了通常的"数学成熟性"之外是很少的。在代数方面，要求熟习群，环，模和它们的同态。从第20节开始，主理想整环上的模的一些基本结果将要用到。仅在第29节和第30节中需要两个模的张量积的基本性质的知识。尽管用不着范畴论的定理，但范畴和函子的语言却在本书中到处使用，所有这方面的材料见Lang [35].

在点集拓扑方面，假定读者熟习有关连续性，紧性、连通性、道路连通性、积空间，商空间等方面的基本事实。仅在第26节的附录中需要一个不平凡的结果，Tietze扩张定理。第7节用到有关函数空间上紧-开拓扑的一些初等结果。有关这方面的材料见Dugundji[20]或Kelley [34].

我向寻求有关代数拓扑近年来非凡成就的进一步知识的读者推荐评述性论文[44a, 62和75的pp. 227—231]及其文献目录。

我感谢M. Artin, H. Edwards, S. Lang, B. Mazur, V. Poenaru, H. Rosenberg, E. Spanier, A. Vasquez以及我的学生Berkovits, Perry和Webber，感谢他们作了有益的评论。

我感谢对修订作出有益评论的几位人士。D. Anderson, E. Bishop, G. Carlsson, M. Friedman, T. Frankel, J. Lin, K. Millett的评论对决定内容的取舍是有帮助的。在工作进行中，M. Cohen, A. Liulevicius, R. Livesay, S. Lubkin, H. Miller, R. Mandelbaum, N. Stein, A. Zabrodsky作了有价值的评论。

手稿的打字工作是由S. Agostinelli, R. Colon, M. Lind熟练地完成的，附图是D. McCumber画的。

特别感谢 Doris, Jennifer, Allison, 在准备和收集这些材料过程中对所忍受的冷落没有过分介意.

最后，我们感谢 Errett Bishop, 他提议我们在这本书上进行合作。

Marvin J. Greenberg

John R. Harper

目　录

序言 ……1
第一编　同伦论基础 ……1
引言 ……1
1　第一编的内容安排 ……2
2　道路的同伦 ……3
3　映射的同伦 ……7
4　圆周的基本群 ……11
5　覆盖空间 ……16
6　提升原则 ……22
7　闭路空间和高维同伦群 ……28
第二编　奇异同调论 ……34
引言 ……34
8　仿射预备知识 ……36
9　奇异理论 ……38
10　链复形 ……46
11　同调的同伦不变性 ……53
12　π_1 和 H_1 间的关系 ……57
13　相对同调 ……65
14　正合同调序列 ……70
15　切除定理 ……79
16　对球的进一步应用 ……91
17　Mayer-Vietoris 序列 ……95
18　Jordan-Brouwer 隔离定理 ……104
19　空间的构造: 球状复形 ……111
20　Betti 数和 Euler 示性数 ……129
21　空间的构造: 胞腔复形和多附加空间 ……134
第三编　流形上的定向和对偶性 ……155
引言 ……155
22　流形的定向 ……156

23 奇异上同调……………………………………………………173
24 上积和卡积……………………………………………………194
25 代数极限………………………………………………………205
26 Poincaré 对偶性………………………………………………211
27 Alexander 对偶性 ……………………………………………226
28 Lefschetz 对偶性 ……………………………………………233
第四编 乘积和 Lefschetz 不动点定理……………………………242
引言……………………………………………………………242
29 乘积……………………………………………………………243
30 Thom 类和 Lefschetz 不动点定理 ……………………………268
31 相交数与上积…………………………………………………282
符号表…………………………………………………………294
文献……………………………………………………………296
索引……………………………………………………………302

第一编　同伦论基础

引　言

诱使代数拓扑产生的思想源泉是一种主要在十九世纪后半叶发展起来的观念，这就是函数的许多性质在“形变”之下保持不变．例如复分析中 Cauchy 定理和残数计算断言复积分对曲线连续形变的不变性．真正的起点大概是 Abel 积分的 Riemann 理论．就是在这里曲面连通性的重大意义才被公认．建议有兴趣的读者在学习代数拓扑时去查阅一下 Felix Klein 对 Riemann 理论的讲述．[80]．

首先系统地考虑给空间赋以数值不变量问题的是 Poincaré．在研究中，他发现了曲线可形变为另一曲线和曲线界定一较大空间之间的不同．前一概念导致引进同伦和基本群，而后者则导致同调论．

将这些思想发展成为一种数学理论是复杂的．不过，指导这种发展的想法却很易描述．构造一些函子，即：对于每个拓扑空间 X，确定一个群 $F(X)$，对每个映射 $f: X \to Y$（除有特别声明外，拓扑空间之间的“映射”总指“连续映射”），确定一个同态 $F(f)$：$F(X) \to F(Y)$，满足：

(1) 若 $Y = X$ 且 $f =$ 恒等映射，则 $F(f) =$ 恒等同态；

(2) 若 $g: Y \to Z$，则 $F(gf) = F(g)F(f)$．

例：设有拓扑空间与映射的一个图表：问题是求 f' 使 $pf' = f$．应用函子 F，我们看出有解的一个必要条件是 $F(f)$ 将 $F(Y)$

$$\begin{tikzcd} & E \arrow[d, "p"] \\ Y \arrow[ur, dashed, "f'"] \arrow[r, "f"'] & X \end{tikzcd}$$

映入 $F(X)$ 的子群 $F(p)(F(E))$ 以后我们将看到在某些情形，此条件也是充分的(6.1).

例：设 $f: X \to Y$ 为一同胚．于是，根据函子的性质，$F(f^{-1})$ 是 $F(f)$ 的逆，从而 $F(f)$ 是一同构．这样，X 和 Y 同胚的一个必要条件(通常不是充分的)是 $F(X)$ 和 $F(Y)$ 为同构的群．对于给定的具有类似拓扑性质的两个空间，要证明它们不同胚，通常这是最容易的方法．

例：设 $i: A \to X$ 是子空间 A 到 X 内的包含映射，我们的问题是求一映射 $r: X \to A$ 使得 ri 是 A 到自身的恒等映射(这样的映射 r 称为 X 到 A 上的收缩)．如果这样的 r 存在，根据函子的性质，$F(r)F(i)$ 应等于 $F(A)$ 上的恒等变换，从而 $F(i)$ 将 $F(A)$ 同构地映到 $F(X)$ 的一个子群上．因此，如果我们已知道 $F(X)$ 是平凡群而 $F(A)$ 不是平凡群，这样的收缩就不可能存在，这恰是证明 Brouwer 不动点定理的方法(4.11 和 15.7)．

读者还可以构作更多的例子去说明这种观点的有效性．

1　第一编的内容安排

在第一编中，我们论述基本群以及与它密切相关的覆盖空间．构造基本群函子的几何思想是道路的同伦．粗略地说，道路的同伦是保持端点不动的一个形变，两条道路可以定义合成，只要其中一条的终点与另一条的始点相同．熟知的代数性质，如结合性，不再保持，但在同伦的意义下可以保持．结果在同伦等价类上得到一个群结构，称为基本群．这种群并不只是拓扑不变量，而是在更大的

一类映射即同伦等价之下保持不变，这些内容将在第 2 节和第 3 节中加以论述.

为了利用基本群，我们必须能够计算它. 有两种主要的计算途径：Seifert-Van Kampen 定理和利用覆盖空间. 前者在本书中应用的形式叙述在(4.12)中，其它教程中有一些便于应用的极好叙述，因此，详细叙述我们不再重复. 我们对圆周的基本群的讨论是覆盖空间理论的一个范例. 关于覆盖空间的提升定理(6.1)，除了有用以外，它还是融合代数和几何的一个典型例子，这就给这个课题增添了一种特殊的风趣. 最后第一编以借助圈空间对高维同伦群进行简短讨论作为结束.

2 道路的同伦

考虑平面内一复变函数 f 绕一闭曲线 C(如单位圆周)积分的问题. 例如，我们有：

$$\int_C z\,dz = 0^{(*)}$$

$$\int_C \frac{dz}{z} \neq 0$$

那么，它们之间有何不同？我们知道 C 在 z 的解析域(即整个平面)之内可以“缩成一个点”，从而绕 C 的积分便等于在一个点的积分，即等于 0. 与此相反，在 $1/z$ 的解析域内，C 就不能“缩成一个点”.

更明确一些，设 σ，τ 是空间 X 中的两条道路(即单位闭区间 I 到 X 内的映射)，有着共同的端点(即 $\sigma(0)=\tau(0)=x_0$，$\sigma(1)=\tau(1)=x_1$)，如果存在映射 $F: I\times I\to X$，使得

(*) 原文误作 $\int_C z\,dz=1$——译者.

(1) $$F(s,\ 0)=\sigma(s)\quad \text{对所有 } s,$$
(2) $$F(s,\ 1)=\tau(s)\quad \text{对所有 } s,$$
(3) $$F(0,\ t)=x_0\quad \text{对所有 } t,$$
(4) $$F(1,\ t)=x_1\quad \text{对所有 } t,$$

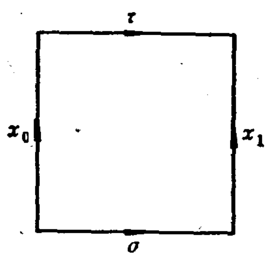
我们说 σ 和 τ 保持端点不动同伦，记作

$$\sigma\simeq\tau\ \mathrm{rel}(0,\ 1)$$

而映射 F 则叫做 σ 到 τ 的同伦，对于每个 t，显然 $s\to F(s,\ t)$ 是从 x_0 到 x_1 的一条道路 F_t，并且 $F_0=\tau$，$F_1=\tau$，我们用

$$F_t\colon \sigma\simeq\tau\ \mathrm{rel}(0,\ 1)$$

来表示．以图表示就是



特别是，如果 σ 是 x_0 处的一条闭路（即 $x_1=x_0$），而 τ 是 x_0 处的常值道路，亦即对所有 s，$\tau(s)=x_0$，如果有 $\sigma\simeq\tau\ \mathrm{rel}(0,\ 1)$，那么我们就说"$\sigma$ 可以缩成一点"或者说 σ 是零伦的．

于是 Cauchy 定理的正确叙述是：对于 f 的解析域 X 中零伦的（更一般的，零调的）所有闭路 C，总有

$$\int_C f(z)dz=0.$$

不难证明，同伦关系 $\simeq$ 具有下述性质：

(1) $$\sigma\simeq\sigma\ \mathrm{rel}(0,\ 1)$$
(2) $$\sigma\simeq\tau\ \mathrm{rel}(0,\ 1)\Rightarrow\tau\simeq\sigma\ \mathrm{rel}(0,\ 1)$$
(3) $\sigma\simeq\tau\ \mathrm{rel}(0,\ 1)$ 且 $\tau\simeq\rho\ \mathrm{rel}(0,\ 1)\to\sigma\simeq\rho\ \mathrm{rel}(0,\ 1)$

因此我们可以考虑从 x_0 到 x_1 的道路 σ 关于等价关系 $\simeq$ 的同伦类 $[\sigma]$.

如果 σ 是从 x_0 到 x_1 的道路，τ 是从 x_1 到 x_2 的道路，我们如下定义一条从 x_0 到 x_2 的道路 $\sigma\tau$, 它是先沿 σ 运动，然后沿 τ 运动而得到的一条道路. 确切地说，就是

$$\sigma\tau(t)=\begin{cases}\sigma(2t) & 0\leqslant t\leqslant\frac{1}{2}\\ \tau(2t-1) & \frac{1}{2}\leqslant t\leqslant 1\end{cases}$$

(4) $\sigma\simeq\sigma'\mathrm{rel}(0,\ 1)$ 且 $\tau\simeq\tau'\mathrm{rel}(0,\ 1)\Rightarrow\sigma\tau\simeq\sigma'\tau'\mathrm{rel}(0,\ 1)$

证明：若

$$F_t\colon\ \sigma\simeq\sigma'\mathrm{rel}(0,\ 1)$$
$$G_t\colon\ \tau\simeq\tau'\mathrm{rel}(0,\ 1)$$

则 $F_tG_t\colon \sigma\tau\simeq\sigma'\tau'\mathrm{rel}(0,$ □

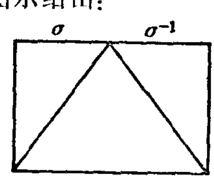
这样，我们可明确地在 σ 的类的右边乘上 τ 的类. 当然，这时总是假定 σ 的终点等于 τ 的始点.

(2.1) **定理** 设 $\pi_1(X,\ x_0)$ 为 X 中 x_0 处闭路同伦类的集合，如果按如上方式定义 $\pi_1(X,\ x_0)$ 中的乘法，则 $\pi_1(X,\ x_0)$ 成为群，且群的单位元是 x_0 处常值道路的同伦类，类 $[\sigma]$ 的逆元是闭路 σ^{-1} 的类，而 σ^{-1} 定义为

$$\sigma^{-1}(t)=\sigma(1-t)\quad(0\leqslant t\leqslant 1)$$

(即沿 σ 返回的道路)

证明：我们来证明 $\sigma\sigma^{-1}\simeq x_0$，这里 x_0 又表示点 x_0 处的常值道路. 此同伦由下面的图示给出：



也就是说，定义 $F(s, t)$ 为

$$F(s, t)=\begin{cases}\sigma(2s) & 0\leqslant 2s\leqslant t\\ \sigma(t) & t\leqslant 2s\leqslant 2-t\\ \sigma^{-1}(2s-1) & 2-t\leqslant 2s\leqslant 2\end{cases}$$

显然这些函数分别在每个三角形上连续，并且在这些三角形的交上一致，因此，根据一个初等的论证，F 在整个正方形上连续.

关于乘法满足结合律（在同伦的意义下）的证明以及 x_0 的类为单位元的证明都可以类似地进行:

令
$$F(s, t)=\begin{cases}\sigma\left(\dfrac{4s}{t+1}\right) & 0\leqslant s\leqslant \dfrac{t+1}{4}\\ \tau(4s-t-1) & \dfrac{t+1}{4}\leqslant s\leqslant \dfrac{t+2}{4}\\ \omega\left(\dfrac{4s-t-2}{2-t}\right) & \dfrac{t+2}{4}\leqslant s\leqslant 1\end{cases}$$

则 $(\sigma\tau)\omega\simeq\sigma(\tau\omega)\,\mathrm{rel}(0, 1)$

令
$$F(s, t)=\begin{cases}\sigma\left(\dfrac{2s}{t+1}\right) & 0\leqslant s\leqslant \dfrac{t+1}{2}\\ x_0 & \dfrac{t+1}{2}\leqslant s\leqslant 1\end{cases}$$

则 x_0 处的常值道路是基本群的单位元. □

$\pi_1(X, x_0)$ 和 $\pi_1(X, x_1)$ 之间有无关系？无疑，当 x_0 和 x_1 属于 X 的不同道路连通分支时，它们之间确无关系. 不过，我们有下述结果:

(2.2) **命题** 设 α 是从 x_0 到 x_1 的一条道路，那么由 $[\sigma]\to[\alpha^{-1}\sigma\alpha]$ 定义的映射是群 $\pi_1(X, x_0)$ 到群 $\pi_1(X, x_1)$ 上的一个同构 α_*

证明: α_* 显然是一个同态，并且 $(\alpha^{-1})_*$ 是它的逆（这里 α^{-1} 是 (2.1) 中定义的道路）. □

(2.3) **推论** 若 X 为道路连通空间，则群 $\pi_1(X, x_0)$ 在同构

的意义下与点 x_0 的选取无关.

在此情形下，$\pi_1(X, x_0)$ 通常简记为 $\pi_1(X)$ 并称作 X 的**基本群**.

我们希望 π_1 能成为从空间到群的一个函子，但是，由于在一般情况下 $\pi_1(X, x_0)$ 确与基点 x_0 有关，要想得到一个函子就必须将基点加入我们的范畴. 因此，我们定义**带基点的拓扑空间范畴**，它的对象是偶 (X, x_0)，它的射是满足 $f(x_0)=y_0$ 的映射 $f: X\to Y$. 对于每个这样的 f，可以得到一个导出同态：

$$f_*: \pi_1(X, x_0)\to \pi_1(Y, y_0)$$

它由 $f_*[s]=[f\circ s]$ 来定义. 容易验证定义是明确的且 f_* 确为同态. 此外，还不难验证

(1) $Y=X$ 且 $f=$ 恒等映射 $\Rightarrow f_*=$ 恒等同态；

(2) 若 $g: (Y, y_0)\to(Z, z_0)$，则 $(gf)_*=g_*f_*$

这样一来，我们就可以谈论从带基点的拓扑空间范畴到群范畴的**基本群函子**了.

3 映射的同伦

由于道路是 I 到 X 内的映射，我们可试用任意空间 Y 代替 I 来定义同伦. 这时当然不再有端点. 不过，我们可以用一个子空间 $A\subset Y$ 代替集合 $\{0, 1\}$.

设有映射 $f, g: Y\to X$，满足 $f|A=g|A$，如存在映射 $F: Y\times I\to X$ 使得

(1) 对所有的 $y\in Y$，$F(y, 0)=f(y)$，

(2) 对所有的 $y\in Y$，$F(y, 1)=g(y)$，

(3) 对所有的 $y\in A$，$t\in I$，$F(y, t)=f(y)=g(y)$，

我们便说 $f\simeq g \text{ rel } A$

当 A 为空集时，则简记为

$$f \simeq g$$

于是，我们又得到一个等价关系.

例 1 设 $X=Y=\mathbf{R}^n$，f 为恒等映射，g 为常值映射 0，那么

$$F(x,\ t)=tx$$

定义一个从 g 到 f 的同伦.

如果 X 上的恒等映射同伦于 X 到其中某一点的常值映射，我们就说空间 X 是可点缩的.

(3.1) 练习题 X 是可点缩的当且仅当对任何空间 Y，Y 到 X 的任何两个映射都同伦. 又可点缩空间是道路连通的.

例 2 欧几里德空间中的每个凸子集 X 是可点缩的. 这是因为，若 $f_1,\ f_2: Y \to X$，我们定义一个同伦如下：

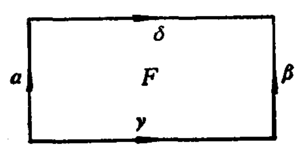
$$F(y,\ t)=tf_1(y)+(1-t)f_2(y) \quad y\in Y,\ t\in I.$$

一个道路连通空间，当它的基本群是平凡群时，称为**单连通空间**

(3.2) 命题 可点缩空间是单连通空间.

证明：命题并不十分显然，因为，尽管点 x_0 处的每条闭路 σ 作为映射都同伦于常值道路，但是我们并不知道它们是否相对于 $(0,\ 1)$ 同伦.

(3.3) 引理 已知 $F:\ I\times I\to X$，令 $\alpha(t)=F(0,\ t)\beta(t)=F(1,\ t)$，$\gamma(s)=F(s,\ 0)$，$\delta(s)=F(s,\ 1)$，用图表示



则 $\delta\simeq\alpha^{-1}\gamma\beta\ \mathrm{rel}(0,\ 1)$.

证明：用并置下面三个正方形的办法来进行证明.