

高等学校教材

结构力学 教程

【下册】

龙驭球 包世华 编

• JIE GOU LI XUE JIAO CHENG • JIE GOU LI XUE JIAO CHENG •

高等教育出版社

结构力学教程
【下册】
龙驭球 包世华 编



7615
21

高等学校教材

结构力学教程

【下册】

龙驭球 包世华 编

高等教育出版社

内 容 提 要

本书包含了国家教育委员会批准印发并要求自 1987 年秋起试行的《结构力学课程教学基本要求》(110 学时左右)所规定的内容。

全书共十九章,分上、下两册。上册是基本部分,包括:绪论、平面结构的几何构造分析、静定梁和静定刚架、三铰拱、静定平面桁架、静定结构总论、影响线、结构的位移计算、力法原理及其应用、用力法计算超静定拱、位移法、渐近法及超静定结构影响线、矩阵位移法、杆件结构的虚功原理与能量原理、超静定结构总论、结构力学的研究方法和能力培养等十六章。为了加强电子计算机的应用,在附录 I 中给出了连续梁和平面刚架的框图设计、电算程序与说明。下册是专题部分,包括:结构的动力计算、结构的稳定计算和结构的极限荷载等三章。

本书思路清晰、说理透彻、联系实际、文字洗练,并着力于精选内容,可作为四年制土建、水利、道桥等各专业的教材,也可供其他有关专业和工程技术人员参考。

责任编辑 余美茵

2P34/22

高等学校教材

结构力学教程

【下 册】

龙驭球 包世华 编

*

高等教育出版社出版

新华书店北京发行所发行

人民教育出版社印刷厂印装

*

开本 787×1092 1/16 印张 9 字数 200 000

1988 年 9 月第 1 版 1988 年 9 月第 1 次印刷

印数 0001—8,140

ISBN7-04-000541-7/TB·30

定价 2.40 元

目 录

第三部分 专 题

第十七章 结构的动力计算 1	§ 18-2 两类稳定问题计算简例73
§ 17-1 概述 1	§ 18-3 有限自由度体系的稳定——静力法和能量法77
§ 17-2 单自由度体系的自由振动 4	§ 18-4 无限自由度体系的稳定——静力法82
§ 17-3 单自由度体系的强迫振动 9	§ 18-5 无限自由度体系的稳定——能量法87
§ 17-4 阻尼对振动的影响17	*§18-6 刚架的稳定——矩阵位移法92
§ 17-5 多自由度体系的自由振动..... 23	§ 18-7 组合杆的稳定99
1. 刚度法23	*§ 18-8 拱的稳定104
*2. 柔度法33	§ 18-9 小结112
§ 17-6 多自由度体系主振型的正交性和主振型矩阵37	习题112
§ 17-7 多自由度体系在简谐荷载下的强迫振动42	第十九章 结构的极限荷载116
*§ 17-8 多自由度体系在一般动荷载下的强迫振动46	§ 19-1 概述116
*§ 17-9 无限自由度体系的自由振动51	§ 19-2 极限弯矩、塑性铰和极限状态117
§ 17-10 近似法求自振频率53	§ 19-3 超静定梁的极限荷载119
*§ 17-11 矩阵位移法求刚架的自振频率60	§ 19-4 比例加载时判定极限荷载的一般定理123
§ 17-12 小结64	*§ 19-5 刚架的极限荷载126
习题65	习题135
第十八章 结构的稳定计算70	附录 习题答案137
§ 18-1 两类稳定问题概述70	

第三部分 专 题

第十七章 结构的动力计算

§ 17-1 概 述

1. 结构动力计算的特点

上册各章讨论了在静荷载作用下的结构计算问题,本章专门讨论在动荷载作用下的结构计算问题。

首先说明动荷载与静荷载的区别。动荷载的特征是荷载(大小、方向、作用位置)随时间而变化。如果单纯从荷载本身性质来看,严格说来,绝大多数实际荷载都应属于动荷载。但是,如果从荷载对结构所产生的影响这个角度来看,则可分为两种情况。一种情况是:荷载虽然随时间在变,但是变得很慢,荷载对结构所产生的影响与静荷载相比相差甚微。因此,在这种荷载作用下的结构计算问题实际上仍属于静荷载作用下的结构计算问题。换句话说,这种荷载实际上可看作静荷载。另一种情况是:荷载不仅随时间在变,而且变得较快,荷载对结构所产生的影响与静荷载相比相差甚大。因此,在这种荷载作用下的结构计算问题属于动力计算问题。换句话说,这种荷载实际上应看作动荷载。

其次说明结构的动力计算与静力计算的区别。根据达朗伯(J. le R. d'Alembert)原理,动力计算问题可以转化为静力平衡问题来处理。但是这是一种形式上的平衡,是一种动平衡,是在引进惯性力的条件下的平衡。换句话说,在动力计算中,虽然形式上仍是在列平衡方程,但是这里要注意两个特点:第一,在所考虑的力系中要包括惯性力;第二,这里考虑的是瞬间的平衡,荷载、内力等都是时间的函数。

2. 动荷载的分类

工程实际中经常遇到的动荷载主要有下面几类:

第一类是周期荷载。这类荷载随时间作周期性的变化。周期荷载中最简单也是最重要的一种称为简谐荷载(图 17-1a),荷载 $P(t)$ 随时间 t 的变化规律可用正弦或余弦函数表示。机器转动部分引起的荷载常属于这一类。其他的周期荷载可称为非简谐性的周期荷载(图 17-1b)。

第二类是冲击荷载。这类荷载在很短的时间内,荷载值急剧增大(图 17-2a)或急剧减小(图 17-2b)。各种爆炸荷载属于这一类。

第三类是随机荷载。前面两类荷载都属于确定性荷载,任一时刻的荷载值都是事先确定的。如果荷载在将来任一时刻的数值无法事先确定,则称为非确定性荷载,或称为随机荷载。地震荷

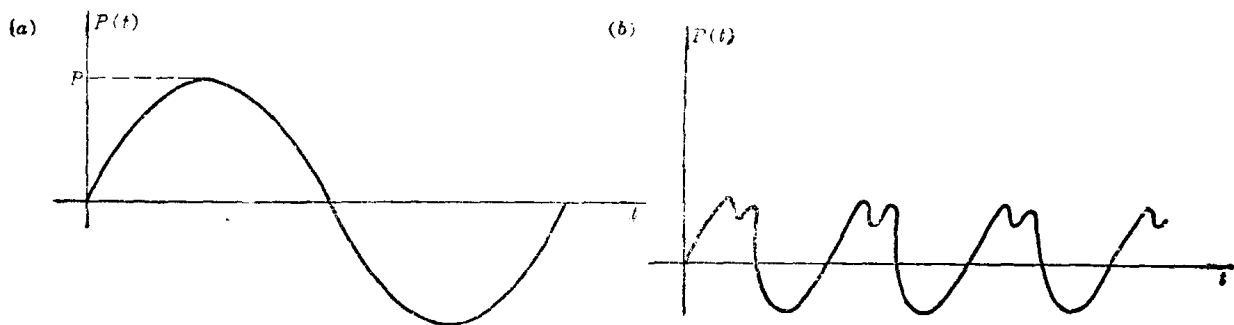


图 17-1

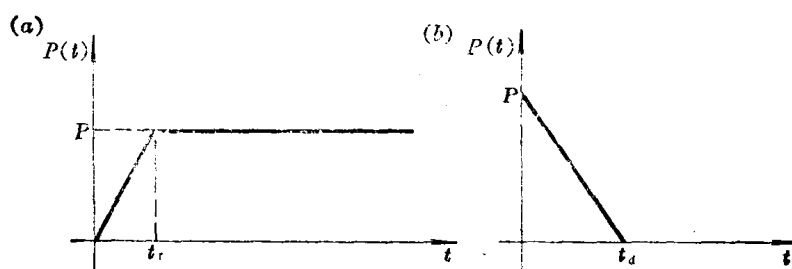


图 17-2

载和风荷载是随机荷载的典型例子。图 17-3 所示为地震时记录到的地面加速度 $u(t)$ 。

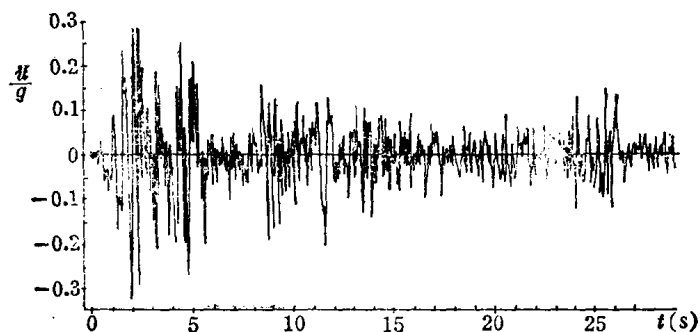


图 17-3

3. 动力计算中体系的自由度

与静力计算一样，在动力计算中也需要事先选取一个合理的计算简图。两者选取的原则基本相同，但在动力计算中，由于要考虑惯性力的作用，因此还需要研究质量在运动过程中的自由度问题。

在动力计算中，一个体系的自由度是指为了确定运动过程中任一时刻全部质量的位置所需确定的独立几何参数的数目。

由于实际结构的质量都是连续分布的，因此任何一个实际结构都可以说具有无限个自由度。但是如果所有结构都按无限自由度去计算，则不仅十分困难，而且也没有必要。因此，通常需要

对计算方法加以简化。常用的简化方法有下列两种。

第一，集中质量法。

把连续分布的质量集中为几个质点，这样就可以把一个原来是无限自由度的问题简化成为有限自由度的问题。下面举几个例子加以说明。

图 17-4a 所示为一简支梁，跨中放有重物 W 。当梁本身质量远小于重物的质量时，可取图 17-4b 所示的计算简图。这时体系由无限自由度简化为一个自由度。

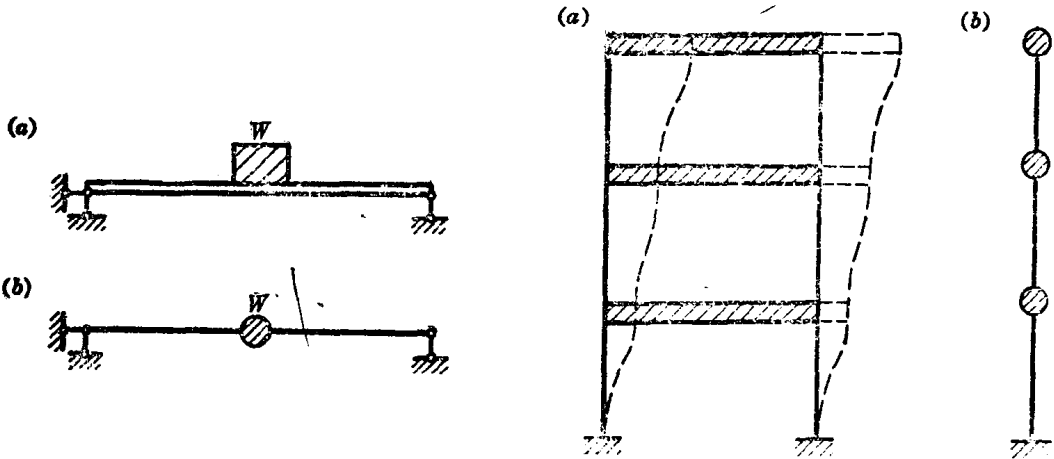


图 17-4

图 17-5

图 17-5a 所示为一三层平面刚架。在水平力作用下计算刚架的侧向振动时，一种常用的简化计算方法是将柱的分布质量化为作用于上下横梁处的集中质量，因而刚架的全部质量都作用在横梁上；此外每个横梁上各点的水平位移可认为彼此相等，因而横梁上的分布质量可用一个集中质量来替代。最后，可取图 17-5b 所示的计算简图，只有三个自由度。

图 17-6a 所示为一块形基础，计算时可简化为一刚性质块。当考虑平面内的振动时，共有三个自由度，即水平位移 x 、竖向位移 y 和角位移 φ (图 17-6b)。当仅考虑竖直方向的振动时，则只有一个自由度(图 17-6c)。

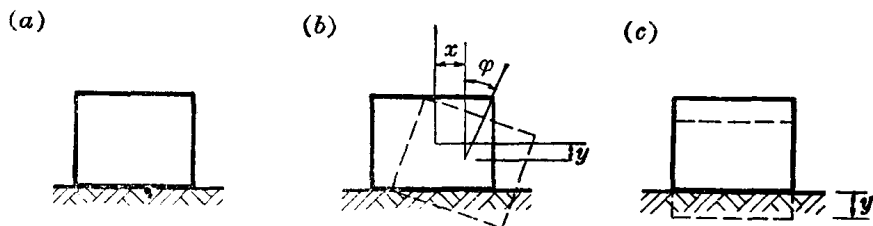


图 17-6

由图 17-6 还可看出，自由度的个数与集中质量的个数并不一定彼此相等。又如图 17-7 所示体系，虽然只有一个集中质量，但有两个自由度。

*第二，广义坐标法。

具有分布质量的简支梁是一个具有无限自由度的体系。简支梁的挠度曲线可用三角级数来

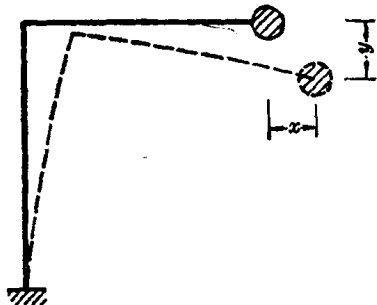


图 17-7

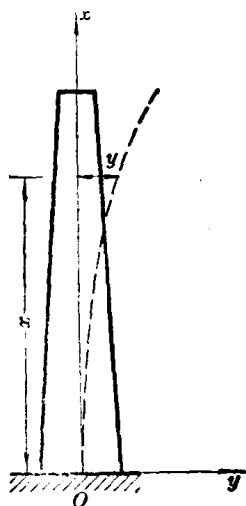


图 17-8

表示:

$$y(x) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k \sin \frac{k\pi x}{l} \quad (a)$$

这里 $\sin \frac{k\pi x}{l}$ 是一组给定的函数,可叫作形状函数; a_k 是一组待定参数,叫做广义坐标。当形状函数选定之后,梁的挠度曲线 $y(x)$ 即由无限多个广义坐标 $a_1, a_2, \dots, a_n, \dots$ 所确定,因此简支梁具有无限自由度。在简化计算中,通常只取级数的前 n 项:

$$y(x) = \sum_{k=1}^n a_k \sin \frac{k\pi x}{l} \quad (b)$$

这时简支梁被简化为具有 n 个自由度的体系。

图 17-8 所示的烟囱原来也是一个具有无限自由度的体系。由于底部是固定端,因此在 $x=0$ 处,挠度 y 及转角 $\frac{dy}{dx}$ 应为零。根据上述位移边界条件,挠度曲线可近似地设为

$$y(x) = x^2(a_1 + a_2x + \dots + a_nx^{n-1}) \quad (c)$$

这样就简化为具有 n 个自由度的体系。

思考题

1. 结构动力计算与静力计算的主要区别是什么?
2. 本节自由度概念与第二章中的自由度概念有何异同?
3. 采用集中质量法和广义坐标法都可使无限自由度体系简化为有限自由度体系,它们所采用的手法有何不同?

§ 17-2 单自由度体系的自由振动

单自由度体系的动力分析虽然比较简单,但是非常重要。这是因为:第一,很多实际的动力问题常可按单自由度体系进行计算,或进行初步的估算。第二,单自由度体系的动力分析是多自

由度体系动力分析的基础,只有牢固地打好这个基础,才能顺利地学习后面的内容。

1. 自由振动微分方程的建立

现结合图 17-9 讨论单自由度体系的自由振动。

图 17-9a 所示的悬臂立柱在顶部有一重物,质量为 m 。设柱本身的质量比 m 小得多,可以忽略不计。因此,体系只有一个自由度。

假设由于外界的干扰,质点 m 离开了静止平衡位置,干扰消失后,由于立柱弹性力的影响,质点 m 沿水平方向产生自由振动,在任一时刻 t ,质点的水平位移为 $y(t)$ 。

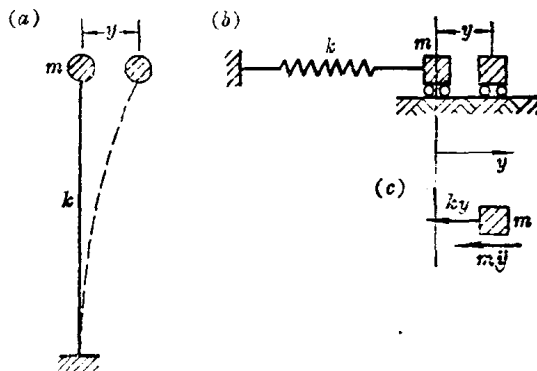


图 17-9

在建立自由振动微分方程之前,先把图 17-9a 中的体系用图 17-9b 所示的弹簧模型来表示。原来由立柱对质量 m 所提供的弹性力这里改用弹簧来提供。因此,弹簧的刚度系数 k (使弹簧伸长单位距离时所需施加的拉力) 应使之与立柱的刚度系数 (使柱顶产生单位水平位移时在柱顶所需施加的水平力) 相等。

现在推导自由振动的微分方程。以静平衡位置为原点,取质量 m 在振动中位置为 y 时的状态作隔离体,如图 17-9c 所示。如果忽略振动过程中所受到的阻力,则隔离体所受的力有下列两种:

- (1) 弹性力 $-ky$, 与位移 y 的方向相反;
- (2) 惯性力 $-m\ddot{y}$, 与加速度 $\ddot{y}$ 的方向相反。

根据达朗伯原理,可列出隔离体的平衡方程如下:

$$m\ddot{y} + ky = 0 \quad (17-1)$$

这就是从力系平衡角度建立的自由振动微分方程。这种推导方法叫做刚度法。

另一方面,自由振动微分方程也可从位移协调角度来推导。用 f_I 表示惯性力: $f_I = -m\ddot{y}$; 用 δ 表示弹簧的柔度系数,即在单位力作用下所产生的位移,其值与刚度系数 k 互为倒数:

$$\delta = \frac{1}{k} \quad (a)$$

则质量 m 的位移为

$$y = f_I \delta = (-m\ddot{y}) \delta \quad (b)$$

上式表明:质量 m 在运动过程中任一时刻的位移等于在当时惯性力作用下的静力位移。

将式 (a) 代入式 (b), 整理后仍得到式 (17-1)。这里是从位移协调的角度建立自由振动微分方程的。这种推导方法叫做柔度法。

2. 自由振动微分方程的解

单自由度体系自由振动微分方程 (17-1) 可改写为

$$\ddot{y} + \omega^2 y = 0 \quad (17-2)$$

其中

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}} \quad (c)$$

式(17-2)是一个齐次方程,其通解为

$$y(t) = C_1 \sin \omega t + C_2 \cos \omega t \quad (d)$$

其中的系数 C_1 和 C_2 可由初始条件确定。设在初始时刻 $t=0$ 质点有初始位移 y_0 和初始速度 v_0 , 即

$$y(0) = y_0, \quad \dot{y}(0) = v_0$$

由此解出:

$$C_1 = \frac{v_0}{\omega}, \quad C_2 = y_0$$

代入式(d), 即得

$$y(t) = y_0 \cos \omega t + \frac{v_0}{\omega} \sin \omega t \quad (17-3)$$

由上式看出, 振动是由两部分所组成:

一部分是单独由初始位移 y_0 (没有初始速度) 引起的, 质点按 $y_0 \cos \omega t$ 的规律振动, 如图 17-10a 所示。

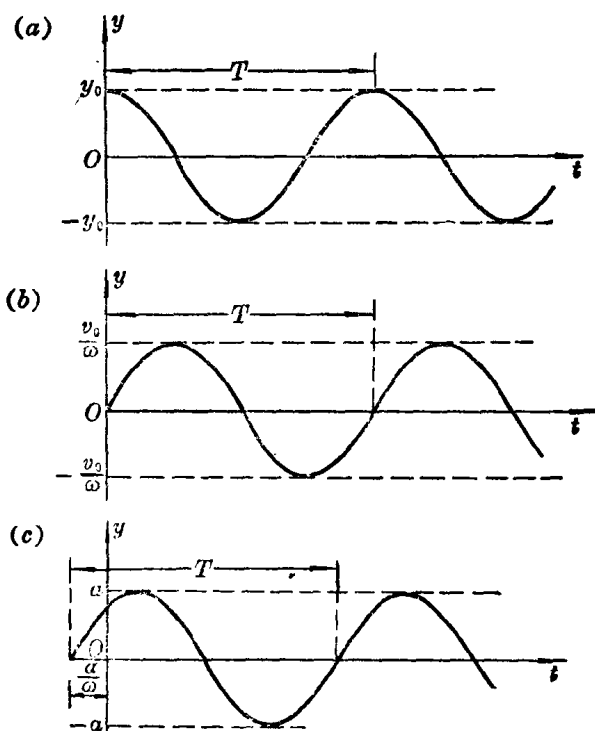


图 17-10

另一部分是单独由初始速度 (没有初始位移) 引起的, 质点按 $\frac{v_0}{\omega} \sin \omega t$ 的规律振动, 如图 17-10b 所示。

式(17-3)还可改写为

$$y(t) = a \sin(\omega t + \alpha) \quad (17-4)$$

其图形如图 17-10c 所示。其中参数 a 称为振幅, α 称为初始相位角。参数 a 、 α 与参数 y_0 、 v_0 之

间的关系可导出如下:

先将式(17-4)的右边展开,得

$$y(t) = a \sin \alpha \cos \omega t + a \cos \alpha \sin \omega t$$

再与式(17-3)比较,即得

$$y_0 = a \sin \alpha, \quad \frac{v_0}{\omega} = a \cos \alpha$$

或

$$a = \sqrt{y_0^2 + \frac{v_0^2}{\omega^2}}, \quad \alpha = \operatorname{tg}^{-1} \frac{y_0 \omega}{v_0} \quad (17-5a, b)$$

3. 结构的自振周期

式(17-4)的右边是一个周期函数,其周期为

$$T = \frac{2\pi}{\omega} \quad (17-6)$$

不难验证,式(17-4)中的位移 y 确实满足周期运动的下列条件:

$$y(t+T) = y(t)$$

这就表明,在自由振动过程中,质点每隔一段时间 T 又回到原来的位置,因此 T 称为结构的自振周期。

自振周期的倒数叫做频率,记作 f :

$$f = \frac{1}{T} = \frac{\omega}{2\pi} \quad (17-7)$$

频率 f 表示单位时间内的振动次数,其常用单位为 1/秒(1/s),或称为赫兹(Hz)。

此外, ω 可叫做圆频率或角频率(习惯上有时也叫做频率):

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = 2\pi f \quad (17-8)$$

ω 表示在 2π 个单位时间内的振动次数。

下面给出自振周期计算公式的几种形式:

(1) 将式(c)代入式(17-6),得

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{m}{k}} \quad (17-9a)$$

(2) 将 $\frac{1}{k} = \delta$ 代入上式,得

$$T = 2\pi \sqrt{m\delta} \quad (17-9b)$$

(3) 将 $m = W/g$ 代入上式,得

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{W\delta}{g}} \quad (17-9c)$$

(4) 令 $W\delta = \Delta_{st}$, 得

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{\Delta_{st}}{g}} \quad (17-9d)$$

其中 δ 是沿质点振动方向的结构柔度系数, 它表示在质点上沿振动方向施加单位荷载时质点沿振动方向所产生的静位移。因此, $\Delta_{st} = W\delta$ 表示在质点上沿振动方向施加数值为 W 的荷载时质点沿振动方向所产生的静位移。

同样, 利用式(17-8), 可得出圆频率的计算公式如下:

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}} = \frac{1}{\sqrt{m\delta}} = \sqrt{\frac{g}{W\delta}} = \sqrt{\frac{g}{\Delta_{st}}} \quad (17-10)$$

由上面的分析可以看出结构自振周期 T 的一些重要性质:

(1) 自振周期与结构的质量和结构的刚度有关, 而且只与这两者有关, 与外界的干扰因素无关。干扰力的大小只能影响振幅 a 的大小, 而不能影响结构自振周期 T 的大小。

(2) 自振周期与质量的平方根成正比, 质量越大, 则周期越大(频率 f 越小); 自振周期与刚度的平方根成反比, 刚度越大, 则周期越小(频率 f 越大); 要改变结构的自振周期, 只有从改变结构的质量或刚度着手。

(3) 自振周期 T 是结构动力性能的一个很重要的数量标志。两个外表相似的结构, 如果周期相差很大, 则动力性能相差很大; 反之, 两个外表看来并不相同的结构, 如果其自振周期相近, 则在动荷载作用下其动力性能基本一致。地震中常发现这样的现象。所以自振周期的计算十分重要。

例 17-1 图 17-11 所示为一等截面简支梁, 截面抗弯刚度为 EI , 跨度为 l 。在梁的跨度中点有一个集中质量 m 。如果忽略梁本身的质量, 试求梁的自振周期 T 和圆频率 ω 。

解: 对于简支梁跨中质量的竖向振动来说, 柔度系数为

$$\delta = \frac{l^3}{48EI}$$

因此, 由式(17-9b)和(17-10)得

$$T = 2\pi\sqrt{m\delta} = 2\pi\sqrt{\frac{ml^3}{48EI}}$$

$$\omega = \frac{1}{\sqrt{m\delta}} = \sqrt{\frac{48EI}{ml^3}}$$

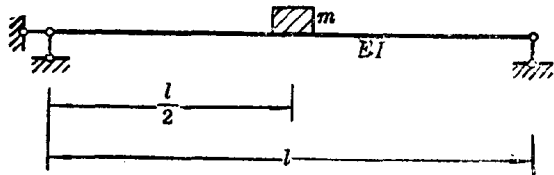


图 17-11



图 17-12

例 17-2 图 17-12 所示为一等截面竖直悬臂杆, 长度为 l , 截面面积为 A , 惯性矩为 I , 弹性

模量为 E 。杆顶有重物，其重量为 W 。设杆件本身质量可忽略不计，试分别求水平振动和竖向振动时的自振周期。

解：(1) 水平振动

当杆顶作用水平力 W 时，杆顶的水平位移为

$$\Delta_{st} = \frac{Wl^3}{3EI}$$

所以

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{Wl^3}{3EIg}}$$

(2) 竖向振动

当杆顶作用竖向力 W 时，杆顶的竖向位移为

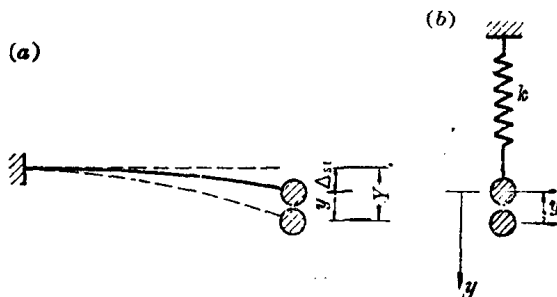
$$\Delta_{st} = \frac{Wl}{EA}$$

所以

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{Wl}{EA g}}$$

思考题

1. 在建立振动微分方程时，如考虑重力的影响，动位移的方程有无改变？(思考题 17-1 图)



思考题 17-1 图

2. 为什么说自振周期是结构的固有性质？它与结构哪些固有量有关？
3. 为了计算自由振动时质点在任意时刻的位移，除了要知道质点的初始位移和初始速度之外，还需要知道些什么？
4. 试举出几个单自由度体系自由振动的例子(水平运动、竖向运动或转动)。

§ 17-3 单自由度体系的强迫振动

结构在动荷载作用下的振动称为强迫振动或受迫振动。

图 17-13a 所示为单自由度体系的振动模型，质量为 m ，弹簧刚度系数为 k ，承受动荷载 $P(t)$ 。取质量 m 作隔离体，如图 17-13b 所示。弹性力 $-ky$ 、惯性力 $-m\ddot{y}$ 和动荷载 $P(t)$ 之间的平衡方程为

$$m\ddot{y} + ky = P(t)$$

或写成

$$\ddot{y} + \omega^2 y = \frac{P(t)}{m} \quad (17-11)$$

其中 ω 仍是 $\sqrt{\frac{k}{m}}$ 。

式(17-11)就是单自由度体系强迫振动的微分方程。

下面讨论几种常见的动荷载作用时结构的振动情况。

1. 简谐荷载

设体系承受如下的简谐荷载:

$$P(t) = F \sin \theta t \quad (a)$$

这里 θ 是简谐荷载的圆频率, F 是荷载的最大值, 称为幅值。将式(a)代入式(17-11), 即得运动方程如下:

$$\ddot{y} + \omega^2 y = \frac{F}{m} \sin \theta t \quad (b)$$

先求方程的特解。设特解为

$$y = A \sin \theta t \quad (c)$$

将式(c)代入式(b), 得

$$(-\theta^2 + \omega^2) A \sin \theta t = \frac{F}{m} \sin \theta t$$

由此得

$$A = \frac{F}{m(\omega^2 - \theta^2)}$$

因此特解为

$$y = \frac{F}{m\omega^2 \left(1 - \frac{\theta^2}{\omega^2}\right)} \sin \theta t \quad (d)$$

如令

$$y_{st} = \frac{F}{m\omega^2} = F\delta \quad (e)$$

则 y_{st} 可叫做最大静位移(即把荷载最大值 F 当作静荷载作用时结构所产生的位移), 而特解(d)可写为

$$y = y_{st} \frac{1}{1 - \frac{\theta^2}{\omega^2}} \sin \theta t \quad (f)$$

微分方程的齐次解已在上节求出, 故得通解如下:

$$y = C_1 \sin \omega t + C_2 \cos \omega t + y_{st} \frac{1}{1 - \frac{\theta^2}{\omega^2}} \sin \theta t \quad (g)$$

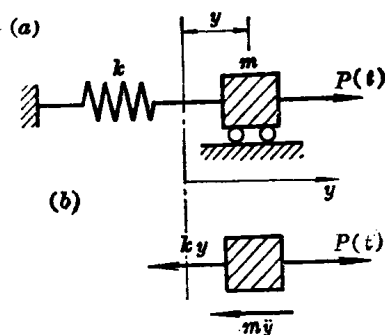


图 17-13

积分常数 C_1 和 C_2 需由初始条件来求。设在 $t=0$ 时的初始位移和初始速度均为零, 则得

$$C_1 = -y_{st} \frac{\theta/\omega}{1-\omega^2}, \quad C_2 = 0$$

代入式(9), 即得

$$y = y_{st} \frac{1}{1-\omega^2} (\sin \theta t - \frac{\theta}{\omega} \sin \omega t) \quad (17-12)$$

由此看出, 振动是由两部分合成的: 第一部分按荷载频率 θ 振动, 第二部分按自振频率 ω 振动。由于在实际振动过程中存在着阻尼力(参看下册), 因此按自振频率振动的那一部分将会逐渐消失, 最后只余下按荷载频率振动的那一部分。我们把振动刚开始两种振动同时存在的阶段称为“过渡阶段”, 而把后来只按荷载频率振动的阶段称为“平稳阶段”。由于过渡阶段延续的时间较短, 因此在实际问题中平稳阶段的振动较为重要。

下面讨论平稳阶段。任一时刻的位移为

$$y(t) = y_{st} \frac{1}{1-\omega^2} \sin \theta t$$

最大位移(即振幅)为

$$[y(t)]_{\max} = y_{st} \frac{1}{1-\omega^2}$$

最大动位移 $[y(t)]_{\max}$ 与最大静位移 y_{st} 的比值叫做动力系数用 β 表示, 即

$$\beta = \frac{[y(t)]_{\max}}{y_{st}} = \frac{1}{1-\omega^2} \quad (17-13)$$

由此看出, 动力系数 β 是频率比值 $\frac{\theta}{\omega}$ 的函数。函数图形如图 17-14 所示, 其中横坐标为 $\frac{\theta}{\omega}$, 纵坐标为 β 的绝对值(注意, 当 $\frac{\theta}{\omega} > 1$ 时, β 为负值)。

由图 17-14 可看出如下特性:

当 $\frac{\theta}{\omega} \rightarrow 0$ 时, 动力系数 $\beta \rightarrow 1$ 。这时简谐荷载的数值虽然随时间变化, 但变化得非常慢(与结构的自振周期相比), 因而可当作静荷载处理。

当 $0 < \frac{\theta}{\omega} < 1$ 时, 动力系数 $\beta > 1$, 又 β 随 $\frac{\theta}{\omega}$ 的增大而增大。

当 $\frac{\theta}{\omega} \rightarrow 1$ 时, $|\beta| \rightarrow \infty$ 。即当荷载频率 θ 接近于结构自振频率 ω 时, 振幅会无限增大。这种现象称为“共振”。实际上由于阻尼力的影响, 共振时也不会出现振幅为无限大的情况, 但是共振时

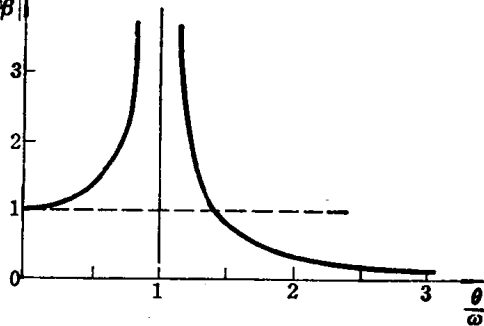


图 17-14

的振幅比静位移大很多倍的情况是可能出现的。(还需指出,共振现象的形成有一个过程,振幅是由小逐渐变大的,并不是一开始就很大。在简谐振动实验中可以看到这个发展过程。)

当 $\frac{\theta}{\omega} > 1$ 时, β 的绝对值随 $\frac{\theta}{\omega}$ 的增大而减小。

以上分析了在简谐荷载作用下结构位移幅度随 $\frac{\theta}{\omega}$ 变化的情况。对于结构内力(例如弯矩)也可作类似的分析。

例 17-3 设有一简支钢梁,跨度 $l=4\text{ m}$,采用型号为 I28 b 的工字钢,惯性矩 $I=7480\text{ cm}^4$,截面系数 $W=534\text{ cm}^3$,弹性模量 $E=2.1 \times 10^4\text{ kN/cm}^2$ 。在跨度中点有电动机,重量 $Q=35\text{ kN}$,转速 $n=500\text{ r/min}$ 。由于具有偏心,转动时产生离心力 $P=10\text{ kN}$,离心力的竖向分力为 $P\sin\theta t$ 。忽略梁本身的质量,试求钢梁在上述竖向简谐荷载作用下强迫振动的动力系数和最大正应力。

解: (1) 简支钢梁的自振频率

$$\omega = \sqrt{\frac{g}{\Delta_{st}}} = \sqrt{\frac{48EIg}{Ql^3}} = \sqrt{\frac{48 \times 2.1 \times 10^4 \times 7480 \times 980}{35 \times 400^3}} = 57.4 \frac{1}{\text{s}}$$

(2) 荷载的频率

$$\theta = \frac{2\pi n}{60} = \frac{2 \times 3.1416 \times 500}{60} = 52.3 \frac{1}{\text{s}}$$

(3) 求动力系数 β

由(17-13)式

$$\beta = \frac{1}{1 - \left(\frac{\theta^2}{\omega^2}\right)} = \frac{1}{1 - \left(\frac{52.3}{57.4}\right)^2} = 5.88$$

即动力位移和动力应力的最大值为静力值的 5.88 倍。

(4) 求跨中最大正应力

$$\sigma_{\max} = \frac{Ql}{4W} + \beta \frac{Pl}{4W} = \frac{(Q + \beta P)l}{4W} = \frac{(35 + 5.88 \times 10)400}{4 \times 534} = 17.56\text{ kN/cm}^2$$

式中第一项是电动机重量 Q 产生的正应力,第二项是动荷载 $P\sin\theta t$ 产生的最大正应力。

2. 一般动荷载

现在讨论在一般动荷载 $P(t)$ 作用下所引起的动力反应。我们分两步讨论:首先讨论瞬时冲量的动力反应,然后在此基础上讨论一般动荷载的动力反应。

设体系在 $t=0$ 时处于静止状态。然后有瞬时冲量 S 作用。例如图 17-15 所示为在 Δt 时间内作用荷载 P ,其冲量 S 即为 $P\Delta t$ 。由于冲量 S 的作用,体系将产生初速度 $v_0 = \frac{S}{m}$,但初位移仍为零。利用式(17-3),即得

$$y = \frac{S}{m\omega} \sin \omega t \quad (17-14)$$

上式就是在 $t=0$ 时作用瞬时冲量 S 所引起的动力反应。

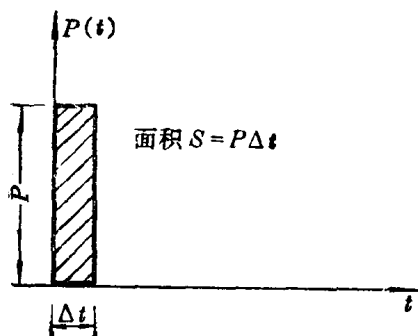


图 17-15

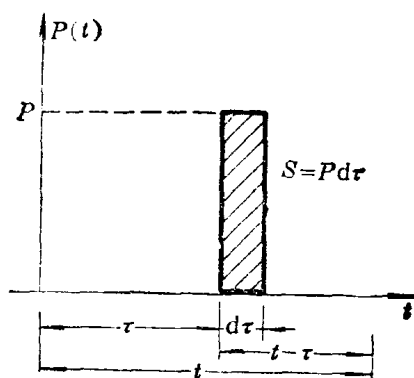


图 17-16

如果在 $t = \tau$ 时作用瞬时冲量 S (图 17-16), 则在以后任一时刻 $t (t > \tau)$ 的位移为

$$y = \frac{S}{m\omega} \sin \omega(t - \tau) \quad (a)$$

现在讨论图 17-17 所示任意动荷载 $P(t)$ 的动力反应。整个加载过程可看作由一系列瞬时冲量所组成。例如在时刻 $t = \tau$ 作用的荷载为 $P(\tau)$, 此荷载在微分时段 $d\tau$ 内产生的冲量为 $dS = P(\tau)d\tau$ 。根据式(a), 此微分冲量引起如下的动力反应: 对于 $t > \tau$,

$$dy = \frac{P(\tau)d\tau}{m\omega} \sin \omega(t - \tau) \quad (b)$$

然后对加载过程中产生的所有微分反应进行叠加, 即对式(b)进行积分, 可得出总反应如下:

$$y(t) = \frac{1}{m\omega} \int_0^t P(\tau) \sin \omega(t - \tau) d\tau \quad (17-15)$$

式(17-15)叫做杜哈梅(J. M. C. Duhamel)积分; 这就是初始处于静止状态的单自由度体系在任意动荷载 $P(t)$ 作用下的位移公式。如初始位移 y_0 和初始速度 v_0 不为零, 则总位移应为

$$y(t) = y_0 \cos \omega t + \frac{v_0}{\omega} \sin \omega t + \frac{1}{m\omega} \int_0^t P(\tau) \sin \omega(t - \tau) d\tau \quad (17-16)$$

下面应用式(17-16)来讨论几种动荷载的动力反应。

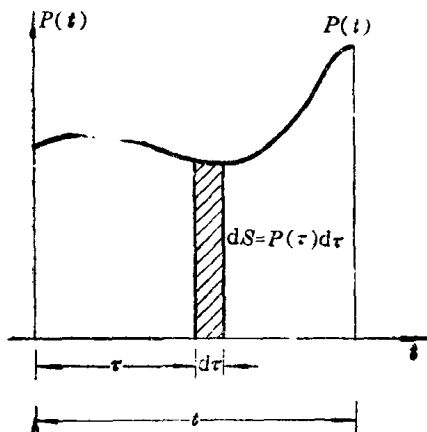


图 17-17

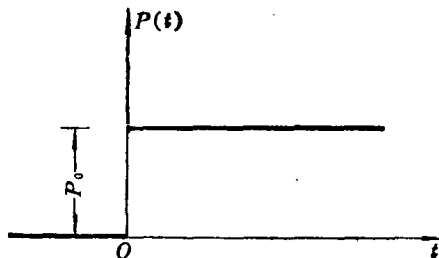


图 17-18