

杆、板、壳大变形理论

陈至达 著



科学出版社

D33
C65

杆、板、壳大变形理论

陈至达 著

科学出版社

1994

(京)新登字 092 号

D202/14
内 容 简 介

非线性大变形力学理论是当前国际力学界的研究热点,杆、板、壳大变形理论则是这一热点的应用中心课题。

从 von Kármán 发表平板大挠度非线性方程的半个多世纪以来,杆、板、壳的大挠度非线性经典理论已日臻成熟。随着计算机的发展,人们在解决了大量的以前不敢想象的计算难题的同时,逐步认识到经典理论的不完备性带来的诸多根本性障碍,单靠改进某些计算方法已收益不大。时代在呼唤新的准确的理论!

正是在这种历史背景下,本书作者在长期科研与教学的基础上总结和深化了前人的工作,采用新的非线性几何场论和非线性连续体力学理论建立了杆、板、壳的全新的准确理论。作为一个新的准确理论,它不但能解决经典理论未能解决的难题,还包含了经典理论已有的全部正确结果。

本书可供理工科高年级大学生、研究生以及有关专业的研究人员和工程设计人员阅读、参考。

杆、板、壳大变形理论

陈至达 著

责任编辑 杨 吟

科学出版社出版

北京黄城根北街16号

邮政编码: 100717

香河县第二印刷厂印刷

新华书店北京发行所发行 各地新华书店经销

*

1994年10月第一版 开本:850×1168 1/32

1994年10月第一次印刷 印张:8 1/4

印数:1-2 000 字数:210 000

ISBN 7-03-004085-6/O·711

定价:13.60元

谨将本书献给我的老师

钱伟长教授和张维教授

祝贺他们的八十寿辰

序 言

在自然界中,大变形现象是普遍存在的,大至地质构造的历史性变迁,小至如变形虫和细菌的活动,形态万千.但目前应用数学方法来描述这些运动形态,仍存在着很大的困难.就物体的几何形态而言,杆、板和壳是三维物体中最简单而典型者.因此,在数学力学理论的发展史中,对杆、板与壳的变形运动规律的研究无论是小位移或大位移都往往首先受到学者的重视.另一原因是这些典型简单几何形态物体的变形与位移容易在实验室中测定并与用数学理论计算的结果相校核,而且在工程中有着广泛的应用.

在 19 世纪中,物理学家 G. R. Kirchhoff(1824—1887)就已经在他的数学物理教程的力学部分中企图建立准确的有限变形弹性力学理论,然而由于数学计算的复杂性,不得不作了一些简化变形假设,导出弹性薄板的方程.以后 Love 在类似假设上又导出了薄壳的方程.现在的弹性板壳力学教科书中,通用的 Kirchhoff-Love 变形几何假设便是源于他们的贡献.

自 1910 年, Kármán 发表了平板大挠度非线性方程以后,壳体大挠度非线性问题研究获得较大进展.在这方面,钱学森、钱伟长都有突出贡献;其他还有许多有成就的著名学者,不一一列出.在本世纪中叶,有理力学教授 Truesdell 的非线性力学场论在理论方法的探索方面对有限变形力学进展产生了积极影响.

近 30 年来,电子计算机的发展解决了大量过去长期无法解决的十分繁杂的计算力学难题,同时在另一方面又揭露了经典近似理论的不完备性.众多学者认识到如不从完善壳体基本理论入手,

而单纯依靠对一些计算方法的改进,所获效益已经不大.

本书为适应发展的要求,应用新的非线性几何场论和非线性连续体力学方法建立杆、板与壳的力学理论.新的准确理论对于杆、板与壳的形变和转动程度,可以从小到大描述整个运动过程,这个优点是经典理论所无法比拟的.为了便于读者与经典公式进行比较,本书在经典简化假设的基础上导出了大部分著名力学家所导出的板、壳大挠度公式以资参考.一个准确的理论,其合理性不但要体现在能解决经典理论未能解答的难题,还必须体现在它能包括经典理论已有的全部正确结果,并提供判断其误差的准绳.

本书讲解的内容以近代力学的有限形变几何学为中心,它和近代微分几何学的应用密切相关,这部分内容是当前的力学、物理、计算力学、工程等学科的研究者所迫切需要的.至于一般计算方法,目前已存在许多优秀的著作,不作为本书重点.希望本书的出版,能对读者在科学新领域的开拓有所帮助.复合材料板壳的大变形、大幅度振动、失稳后的大变形的形态以及板、壳破坏的全过程研究,都需要用到大变形几何学.

本书的主要内容曾在钱伟长教授主持的“应用数学和力学讲座”中使用过,随后又成为研究生的教材.作者对钱伟长教授的支持和指教深表感谢.

赵彭年副教授、秦忠博士、孙博华博士、陈勉博士、李平博士等以及博士生杨成永、硕士生陈洛燕,他们在书稿的校勘、翻译等工作中给了作者许多帮助.对于科学出版社杨岭编辑的细心工作,作者深表谢意.

本书出版得到国家科学技术委员会的高科技基础研究基金资助,作者谨致谢意.

陈至达

一九九四年八月 北京

目 录

序言

引论	(1)
第一章 张量分析简引 有限变形与转动的数学描述	(9)
§ 1.1 张量	(9)
§ 1.2 不变量协变与逆变量	(11)
§ 1.3 Ricci-Eddington 的广义量纲原理	(16)
§ 1.4 二次不变式 度规张量	(19)
§ 1.5 曲线坐标系 Christoffel 记号	(21)
§ 1.6 协变导数	(26)
§ 1.7 物体的运动与点集变换	(28)
§ 1.8 经典小位移形变几何公式为何不适用于大位移问题	(30)
§ 1.9 刚体转动张量 正交变换	(32)
§ 1.10 大位移的应变张量	(35)
§ 1.11 S-R 分解定理和非线性几何场论的基本公式及其意义	(39)
§ 1.12 张量分量的物理分量之几何意义	(41)
§ 1.13 平面大位移的几何公式	(44)
第二章 空间曲线及杆件大变形问题	(48)
§ 2.1 空间曲线的几何性质 一维拖带坐标	(48)
§ 2.2 杆件变形的平面假设	(53)
§ 2.3 细长曲杆的运动方程	(53)
§ 2.4 细直杆的平面大挠度方程	(60)
§ 2.5 弹性线(Elastica)方程的椭圆积分	(63)
§ 2.6 应用椭圆积分求解梁与框架大挠度的一些数值结果	(66)
§ 2.7 杆件大变形与临界载荷之差分解法	(74)
§ 2.8 曲杆变形速度	(77)

§ 2.9	一般截面形状曲杆的运动方程(Kirchhoff 方法)	(81)
§ 2.10	螺旋弹簧	(85)
第三章	曲面几何的基础知识	(89)
§ 3.1	曲面的参数方程	(89)
§ 3.2	曲面的基矢 长度尺规	(91)
§ 3.3	曲面上曲线的曲率	(94)
§ 3.4	平均曲率与全曲率	(97)
§ 3.5	法线方向在曲面上的变动 Weingarten 方程	(98)
§ 3.6	曲率张量的变动关系(Gauss-Codazzi 方程)	(100)
§ 3.7	例 圆柱壳中面	(102)
§ 3.8	曲面的类型	(104)
第四章	板与壳的变形几何学	(106)
§ 4.1	曲面与壳体	(106)
§ 4.2	曲线的平行位移	(107)
§ 4.3	曲面变形的基本特征	(110)
§ 4.4	在壳体空间内点的位移表示式	(115)
§ 4.5	微小变形应变张量在曲线坐标系中的表示式	(117)
§ 4.6	有限转动与有限形变的应变张量在曲线坐标系中的表示式	(121)
§ 4.7	壳体变形的应变张量	(128)
§ 4.8	Kirchhoff-Love 假设条件的讨论	(131)
§ 4.9	Reissner-Власов 的壳体位移近似公式	(135)
§ 4.10	圆柱薄壳中等变形与转动的应变分量	(137)
§ 4.11	圆球薄壳中等变形与转动的应变分量	(142)
第五章	壳与板二阶变形量计算例补充	(145)
§ 5.1	平板二阶变形量计算	(145)
§ 5.2	圆平板二阶变形量计算	(146)
§ 5.3	转动影响项的近似计算式	(148)
§ 5.4	壳变形曲率的近似计算式	(151)
§ 5.5	考虑二阶变形量的壳体应变分量公式	(155)
§ 5.6	旋转壳的有限变形应变分量	(156)
第六章	大变形应力的描述	(160)

§ 6.1	小变形应力描述法的近似性	(160)
§ 6.2	面力 体力 体矩	(161)
§ 6.3	体积改变	(161)
§ 6.4	排列张量	(163)
§ 6.5	面积的张量表示 面积改变	(165)
§ 6.6	应力张量	(167)
§ 6.7	在拖带系中的应力平衡方程	(170)
§ 6.8	物性方程	(176)
第七章	壳体平衡非线性微分方程	(178)
§ 7.1	内力和内矩	(178)
§ 7.2	壳微元体的平衡	(180)
§ 7.3	平板的平衡方程	(188)
§ 7.4	Kármán 的板大挠度方程及近似性讨论	(190)
§ 7.5	壳体中等大变形的非线性方程	(193)
§ 7.6	小结	(198)
第八章	板、壳非线性微分方程数值解	(200)
§ 8.1	关于大变形能量原理的几点说明	(200)
§ 8.2	功率型变分原理 有限元法的理论基础	(201)
§ 8.3	变宽度悬臂板大挠度 有限差分解法	(205)
§ 8.4	变厚度圆板中等挠度问题 无穷级数解	(209)
§ 8.5	壳体大变形计算的有限元法	(218)
§ 8.6	增量变分方程	(223)
§ 8.7	在拖带系中的应力速率	(225)
§ 8.8	位移增量计算的有限元方程	(230)
§ 8.9	一些结果	(234)
参考文献	(239)
附录	(245)

引 论

杆、板与壳变形的力学问题,从理论上说是三维弹性力学的一类特殊问题.所谓“杆”是指可以当作一维线度弹性体计算的三维物体,杆的横截面的直径比长度小得多.所谓“壳”是指可以当作二维曲面弹性体计算的三维物体,壳的横截面的厚度比曲面横展尺寸小得多.“板”是指曲率为零的平壳;事实上平板形变后都成为有曲率的壳体.这类物体形变的特点是在空间中允许有大位移的形变与转动.

大变形与小变形是相对的量级概念.例如在横展 10km 的地上,局部隆起 10m,在地质图上仍是小变形.但是对薄为 0.1mm 的电话筒薄膜,如中心挠度为 0.1mm,和厚度同量级,则可称为大挠度.当中心挠度大时,非线性效应增长,薄板小变形方程就不能完全确切地描述其振动形态,需要考虑大挠度的几何条件,否则计算出的形变与应力,其误差可能超出真实的合理范围.

近代的有限变形力学理论使我们可以准确地描述从微小位移到任意大位移的形变过程,但由于耦合微分方程的高度非线性,在数学上解答甚为困难,常常不得不作出某些合理近似,以求节省计算机时.实际上,也常出现这样的情况:应用准确的方程反而比用近似方程,在解答步骤上更为简单.

为了便于比较经典理论的简化假设,下面作些简单讨论.经典理论主要的假设有三方面:

(a) 在建立平衡方程时,忽略了构件由于变形引起几何形状改变的影响,采用变形前的位形作为参考基准.也即是不区分变形前和变形后参考系的差别.

(b) 采用 Love-Kirchhoff 的变形简化假设.即假设: (I) 中面法线变形后保持为中面法线. (II) 厚度变化忽略不计. (III) 同时还

可略去中面法线应力不计。

经验证明对于均质各向同性材料的长杆、薄壳(板)的小变形而言,这个假设保持相当可靠的真实性。事实上对于厚板才须考虑修正,或者当载荷在负载面上正负变动幅度较大及在有较大局部应力时,中面切应变大而不能忽视时也必须考虑修正。

(c)采用线性的位移-应变关系近似式,在小变形理论中,一般采用 Cauchy 的微小变形应变分量公式:

$$\epsilon_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right), (i, j = 1, 2, 3)$$

当构件发生大变形与大转动时,由位移函数 u_i 计算应变分量的误差增大。例如当一个板作刚性转动 3° ,在应变分量中就会引入约千分之一的误差,而软钢塑性屈服的应变量为千分之二。因此,在某些条件下可能使误差达到不允许的程度。

以上假设在薄壳大变形时仍为实验所支持,而且它的计算实用价值是将三维的空间问题化为二维问题处理,很大程度地简化了计算。但当厚度增大时,误差就增加。严格来说,先验的简化形变假设,在数学上等价于给真实形变外加了约束限制。因此计算中会出现虚假应力,有时可能使计算无法进行下去。

在上述三个简化条件基础上建立的杆、板、壳小变形理论的适用范围,具体说来仍和边界条件及构件曲率有关。

例如图 A. 1 中(a)与(b)两种情况相比,当变形非常小时,两端支承条件不同引起内部应力差别不大,而当变形增大后,在(a)所产生的中面内应力就要大于(b),此力之计算必须考虑变形后位形的几何形状。

在图 A. 1(c)与(d)的情形中,构件有曲率,在微小变形的情况,构件内已有膜应力作用,它和弯曲应力共同起了承担载荷的作用。当变形微小时,二者差别不大,但当变形大后,要正确估计承载能力,必须考虑变形几何位形的影响。当扁球壳受均布载荷变形成为圆平板时,曲率消失,平衡成为不稳定的。

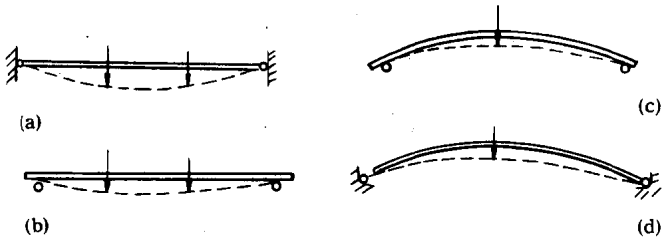


图 A. 1

一根直梁, 未加载时, 曲率为零; 加载后便成为曲梁. 在小变形理论中, 平衡方程仍以直梁为基准, 所以曲率变化允许用近似式:

$$\frac{d\theta}{ds} \approx \frac{d^2w}{dx^2}$$

$$P = P_1 \sin \frac{\pi x}{l}$$

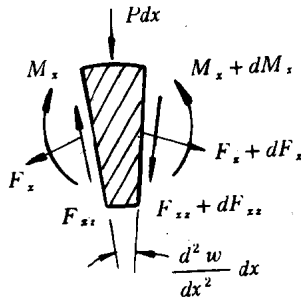
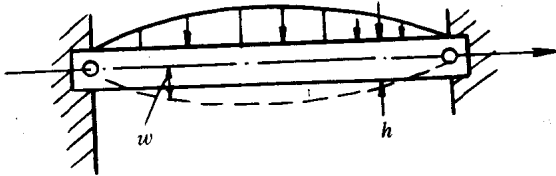


图 A. 2

式中各量符号意义如常见含义. 但对于大变形, 由此近似关系建立方程导出的解其误差将达到不允许的程度.

Donnell 为了说明大挠度时膜力的作用, 举出下例^[21].

考虑到变形后位形的影响, 我们可以列出下列平衡方程:

$$\begin{aligned} F_{xx} &= \frac{dM_x}{dx} \\ \frac{dF_x}{dx} &= F_{xx} \frac{d^2w}{dx^2} \\ \frac{dF_{xx}}{dx} + P + F_x \frac{d^2w}{dx^2} &= 0 \end{aligned}$$

方程中各符号意义见图 A. 2. 以上方程是在形变后位形上列出的. 如引用 Love-Kirchhoff 假设, 则有

$$\begin{aligned} M_x &= -EI \frac{d^2w}{dx^2} \\ F_{xx} &= \frac{dM_x}{dx} = -EI \frac{d^3w}{dx^3} \end{aligned}$$

以及挠曲方程

$$EI \frac{d^4w}{dx^4} = P + F_x \frac{d^2w}{dx^2}$$

如果梁的两端为铰支固定, 设承受横向荷载 $P = P_1 \sin(\pi x/l)$. 由于支承约束限制, 令

$$F_x = \sigma_{xm} h$$

则有

$$\begin{aligned} \sigma_{xm} &= E \frac{\Delta l}{l} = \frac{E}{l} \int_0^l (ds - dx) \\ &= \frac{E}{l} \int_0^l (\sqrt{dx^2 + dw^2} - dx) \\ &= \frac{E}{l} \int_0^l \left\{ \left[1 + \left(\frac{dw}{dx} \right)^2 \right]^{1/2} - 1 \right\} dx \\ &= \frac{E}{l} \int_0^l \left\{ \left[1 + \frac{1}{2} \left(\frac{dw}{dx} \right)^2 + \dots \right] - 1 \right\} dx \\ &\approx \frac{E}{l} \int_0^l \frac{1}{2} \left(\frac{dw}{dx} \right)^2 dx = \frac{\pi^2 E w_1^2}{4l^2} \end{aligned}$$

挠曲方程及边界条件可由解

$$w = w_1 \sin(\pi x/l)$$

所满足, w_1 为 midpoint 挠度. 由挠曲方程, 我们可以得到下列关系

$$\frac{Eh^3}{12} \frac{\pi^4}{l^4} w_1 = P_1 - \frac{\pi^2 E w_1^2}{4l^2} \frac{\pi^2}{l^2} h w_1$$

或

$$\left(\frac{12l^4}{\pi^4 E h^4}\right) P_1 = \frac{1}{h} w_1 + 3\left(\frac{w_1}{h}\right)^3$$

以上关系式示于图 A. 3.

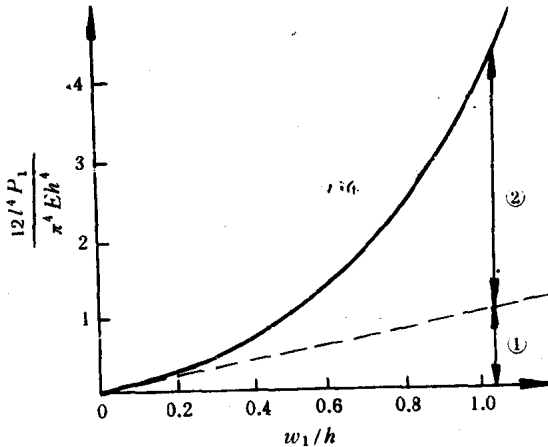


图 A. 3

小挠度时, 例如 $w_1 \leq 0.1h$, 略去非线性项的误差是 3%. 而当大挠度时, 非线性部分(膜应力作用)将大于线性项(弯曲应力作用), 此时可略去线性项, 例如 $w_1 = 3.3h$, 略去弯曲作用项之误差约 3%. (当然仍假设材料为弹性的). 这个结果被用来对板与壳大挠度特性进行定性研究.

不过要注意到, 在由几何位形变动引起的膜力可忽略的情况下, 例如受气压荷载的弹性悬臂薄板, 则末端挠度 w_1 为板厚数十倍, 实验证明线性理论结果和非线性解答相差仍有限^[22]. 这是因

为虽然板元有很大的转动,但平均曲率不大,仅有挠度相当大时,线性理论的误差才显著增大.对于末端加弯矩的情况,因板曲率变化大,线性理论在大挠度时完全不能用.

在大变形问题中,转动是十分重要的因素,转动有时比形变占有更重要的地位.按照转动与形变量级的差别,问题类型又可分为:(1)大变形,大转动;(2)大变形,小转动;(3)小变形,大转动;(4)小变形,小转动.线性理论的位移函数类型属第四类.

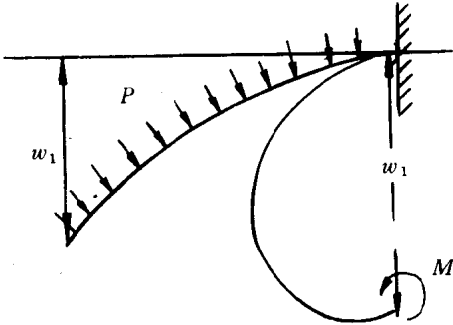


图 A.4

图 A.5 表示在轴向压缩下圆柱薄壳的失稳屈曲

模式(在文献中有时称为 Yoshimura 模式),在实验中很容易看到,图中是纸壳模型.从图中可以看到整个圆柱薄壳失稳屈曲后的形状分成许多三角形的子区,每个子区的边界是应变突出的棱角,子区内是中等应变大转动区.此种子区的出现使整个壳面具有曲率不连续的子边界.研究曲面的大形变不但要应用有限形变几何学还要涉及拓扑学,这是新的研究方向.这时经典小变形理论已无用武之地.

1910年,von Kármán 发表了平板大挠度非线性方程.他用几何投影法导出了包含有二阶应变的大挠度应变表示式.所谓“二阶”是指以微小应变的量级如 $(\partial u/\partial x)$ 作为一阶小量,则 $(\partial u/\partial x)^2$ 视为二阶小量.对于非线性有限变形应变张量的准确数学表示式而言,这种说法就没有意义,只有当将准确公式展成级数时,各项才有量级比较.在本书中,我们将说明在各种条件下如何导出各名家的壳体大变形近似应变分量公式.

有理力学教授 Truesdell 和 Ciarlet 曾对 von Kármán 在推导板大挠度方程所用的一些先验未经证明的假设作了评论,其要点如

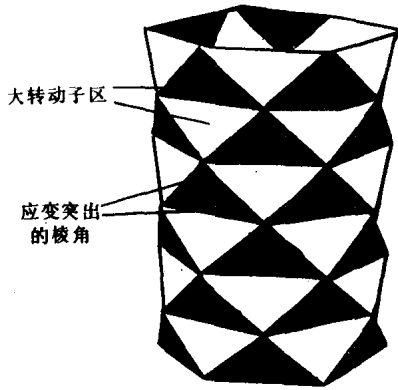


图 A.5 在轴向压缩下圆柱薄壳的一种典型失稳屈曲模式

下:

(1)在推导中采用的变形近似几何,其真实性如何,理论本身并无法说明.

(2)假定的应力分布方式是否准确,也须用其他理论证明之.

(3)采用非线性应变分量,但应力-应变关系仍为 Hooke 定律,是否适用,理论本身的基础对这一点也难说明白.

(4)省略去的应变分量,其误差有多大也仅能从其他完整的理论说明之.

(5)在选用参考坐标系时也有混淆.在小变形时,对采用变形前或变形后的参考系,因略去高阶小项,影响不大.但对于大变形,参考系的选取是要认真对待的.

由于所采用假设的限制,Kármán 方程的适用范围仍限于应变和转动为中等程度的情况,主要考虑了应变分量的二阶小项及薄膜应力在变形后位形上对平衡方程的影响.

企图根据三维弹性力学理论建立壳体力学的准确方程是近年来许多数学力学家努力的方向.在这方面,最早的贡献首推 Syngé 和钱伟长,他们在 40 年代就奠定了板与壳有限变形非线性理论的基础.在他们的论著中区分了变形前后的位形,并引用了二个参考

系：一个是固定于空间的惯性参考系，一个是嵌含在壳体中的自然坐标系或称为拖带系。这种双重坐标系的描述法是 Euler 经典力学描述法的合理推广，已成为近代变形体力学中的运动参考系的最基本和重要的描述法。在 50 年前，力学文献中所用的有限变形应变张量主要采用 Love 推荐的 Green 应变张量（微分二次式定义的张量），这类张量消除了壳体本身的转动，具有内禀性质（intrinsic-property），但在数学上缺少与之相匹配的变形体局部转动张量。以后 Truesdell 推荐用乘积分解定义的伸张张量和局部转动张量取代 Green 应变张量。如此定义的伸张张量由于在物理逻辑上的错误，及在三维情况下计算的复杂性，其实用价值反而不如 Green 应变张量。因此原因，在壳体大变形计算程序中采用 Green 应变张量仍很常见，尽管它存在基本缺点。

新的非线性几何场论导出的应变张量和局部转动张量，具有明确的几何意义，可以和经典力学理论（刚体，可变形体力学）合而构成统一理论。新理论在数学和力学上的完备性，使它在解决科学领域中的众多大变形问题时得到应用。在本书中，我们讲解的是该理论在杆、板、壳形变力学中的应用，这是工程科学应用的最广泛的领域之一。