电磁学习题选解

北京师范大学物理系

电学教研室编

北京师范大学出版社

内容简介

本书是《电磁学》（作者：梁灿彬、秦光戎、梁竹健，人民教育出版社 1981 年第一版）一书中思考题和习题的选解。对原书中代表性、典型性、灵活性较强的题目进行了解答。本书较之《电磁学习题解答》更为精炼，可供大学师生及中学教师参考。

目　　录

第一章　静电场基本规律

思　题　考

1·5　如图所示 A 和 B 为两个均匀带电球，S 为与 A 同心的球，问：

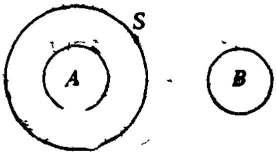


图 1·5

(1) S 面的通量与 B 的电量及位置有关否？

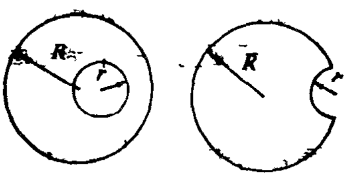
答：只要 B 仍在 S 面外就与 S 面的通量无关。

(2) S 面上某点的电场强度与 B 的电量及位置有关否？

答：有关。

(3) 可否用高斯定理求 S 面上一点的场强？为什么？

答：S 面对总场强没有对称性，因而不能用高斯定理直接求出。但是 S 面对 A 球有对称性，因而可先用高斯定理求出 A 球在 S 面上某点所激发的场强，再以 B 球的球心为心，通过该点作一球面，利用高斯定理求 B 球在该点激发的场强，最后用迭加原理求出该点的总场强。



(a)　(b)

图 1·6

1·6　半径为 R 的均匀带电球内挖去半径为 r 的小球，问附图中 (a) 与 (b) 两种情况，能否用高斯定理

求场强。

答：图 (a) 的情况可以借助高斯定理及迭加原理来求。例如要求某点的场强，可以看作一个半径为R的均匀带电球在该点产生的场强与一个位于所挖部分的均匀带电小球在同一点产生的场强相迭加，这个小球的电荷体密度与大带电球的电荷体密度等值异号。显然对这两个带电球而言，均具有对称性，所以可分别用高斯定理求出这两个场强，再按迭加原理求出总场强。

图 (b) 所示的情况，就无法用上述方法求场强。

1·7 一球形气球，电荷均匀分布在气球表面，当此气球被吹大的过程中，球内外场强如何变化？

答：球内场强在气球吹大过程中始终为零，球外场强在这个过程中，当气球未达该点时，场强始终不变，在气球正掠过该点时，其场强为原来场强的一半（证明见注）。掠过该点后，其场强变为零。

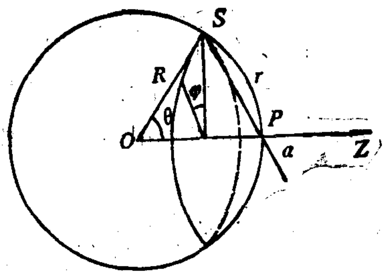


图 1·7

【注】 证明：一均匀带电球面上的场强数值等于$\frac{q}{8\pi\varepsilon_0 R^2}$，式中$q$为球面带的总电量，$R$为球面半径。球面上一点$P$的场强等于面上每一个带电面元对该点贡献之矢量和。

带电面元dS对P点场强的贡献可表示为$\frac{\sigma dS}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\hat{r}$，式中$\sigma$为带电面的面密度（其值等于$\frac{q}{4\pi R^2}$），$r$为面元至$P$点

的距离，$\hat{r}$ 为由面元指向 P 点的单位矢。根据对称性可知总场强方向与 z 轴平行，因而只需要写出每个带电面元对 P 点场强贡献的 z 分量，然后再按迭加原理，将它们加起来，即为总场强。由图可见 $dE_z=\dfrac{\sigma dS}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\cos\alpha$

在△OSP 中 $\alpha=(180°-\theta)/2$

$$r^2=R^2+R^2-2R^2\cos\theta=2R^2(1-\cos\theta)$$

所以 $E_P=\iint dE_z=\iint\dfrac{\sigma R^2\sin\theta d\theta d\varphi\cos[(180°-\theta)/2]}{4\pi\varepsilon_0\cdot 2R^2(1-\cos\theta)}$

$$=\frac{R^2\sigma}{8\pi\varepsilon_0 R^2}\int_0^{2\pi}d\varphi\int_0^{\pi}\frac{\sin\theta\sin\frac{\theta}{2}d\theta}{(1-\cos\theta)}$$

$$=\frac{\sigma}{4\varepsilon_0}\int_0^{\pi}\frac{2\sin^2\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}d\theta}{2\sin^2\frac{\theta}{2}}$$

$$=\frac{\sigma}{4\varepsilon_0}\int_0^{\pi}2\cos\frac{\theta}{2}d\frac{\theta}{2}$$

$$=\frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\sin\frac{\theta}{2}\Big|_0^{\pi}=\frac{\sigma}{2\varepsilon_0}=\frac{q}{8\pi\varepsilon_0 R^2}.$$

1·8 附图中若已知 S_1 面上的通量为 Φ，问 S_2 面、S_3 面及 S_4 面上的通量 Φ_2、Φ_3 及 Φ_4，各等于多少？曲面法线取向如图所示。

答：由 S_1 与 S_2 面组成的闭合曲面中，根据高斯定理

$$\oint\!\!\!\oint \boldsymbol{E}\cdot d\boldsymbol{S}=\frac{q_2}{\varepsilon_0}$$

而 $\oint\!\!\!\oint \boldsymbol{E}\cdot d\boldsymbol{S}=-\Phi_1+\Phi_2$，　$\therefore \Phi_2=\Phi_1+\dfrac{q_2}{\varepsilon_0}$.

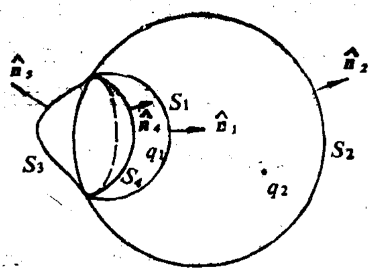


图 1·8

用类似方法可求得

$$\Phi_3=\frac{q_1}{\varepsilon_0}-\Phi_1,$$

$$\Phi_4=\Phi_1-\frac{q_1}{\varepsilon_0}.$$

1·11 下列说法正确否？如不正确，请举一反例加以论述。

（1）场强相等的区域、电位亦处处相等。

答：不对，例如二平行无限大的等值异号的带电板间的电场处处相等，但电位并不处处相等。

（2）电位相等处，场强也相等。

答：不对，例如在点电荷的某一个等位面上的场强并不相等。

（3）场强大处，电位一定高。

答：不对，例如愈靠近负点电荷，场强虽愈大，但电位反而降低。

（4）电场为零处，电位一定为零。

答：不对，例如两个等值同号点电荷联系的中点，场强为零，但电位却不为零。

（5）电位为零处，场强一定等于零。

答：不对，例如两等值异号点电荷连线的中点电位为零，但场强却不为零。

1·12 两个半径分别为 R_1 与 R_2 的同心均匀带电球面，且 $R_2=2R_1$，内球带电量 $q_1>0$，问外球带电量 q_2 满足什么

条件时，能使内球的电位为正？满足什么条件时，能使内球的电位为零，满足什么条件时，能使内球的电位为负？

答：因内球的电位 $U_{内}=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{q_1}{R_1}+\frac{q_2}{R_2}\right)$，

要使 $U_{内}>0$，即要求$\frac{q_1}{R_1}+\frac{q_2}{2R_1}>0$，即 $q_2>-2q_1$。

同理可知，当 $q_2=-2q_1$ 时，$U_{内}=0$。

当 $q_2<-2q_1$ 时，$U_{内}<0$。

习　题

1·2·1　在真空中有两个点电荷，设其中一个所带电量是另一个的四倍。它们相距 5×10^{-2} 米时，相互排斥力为 1.60 牛顿；问它们相距 0.10 米时，排斥力是多少？两点电荷的电量各为多少？

解：设两点电荷中一个所带电量为 q，则另一个为 $4q$：

(1) 根据库仑定律：$\boldsymbol{F}=K\frac{q_1q_2}{r_2}\hat{\boldsymbol{r}}$ 得：$\frac{F_1}{F_2}=\frac{r_2^2}{r_1^2}$，

$$F_2=\frac{F_1r_1^2}{r_2^2}=\frac{1.60\times(5\times10^{-2})^2}{(10^{-1})^2}=0.4(\text{牛顿})。$$

(2) $F_1=K\frac{4q^2}{r_1^2}$

$$\therefore\quad q=\pm\left(\frac{F_1r_1^2}{4K}\right)^{\frac{1}{2}}=\pm\left(\frac{1.60\times5^2\times10^{-4}}{4\times9\times10^9}\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$=\pm3.3\times10^{-7}(\text{库仑})$$

$$4q=\pm1.33\times10^{-6}(\text{库仑})。$$

1·2·2　两个同号点电荷所带电量之和为 Q，当距离一

定时，问它们带电量各为多少时，相互作用力最大？

解：设其中一个所带电量为 q，则另一个所带电量为 $Q-q$。

根据库仑定律知，相互作用力的大小为

$$F=K\frac{q(Q-q)}{r^2}$$

求 F对 q 的极值，使 $F'=0$

即：$\frac{K}{r^2}(Q-2q)=0$

$\therefore \quad q=\frac{1}{2}Q$。

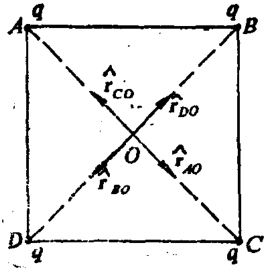
1·2·5 在正方形的顶点上各放一电量相等的同性点电荷 q。

(1) 证明放在正方形中心的任意电量的点电荷所受的力为零。

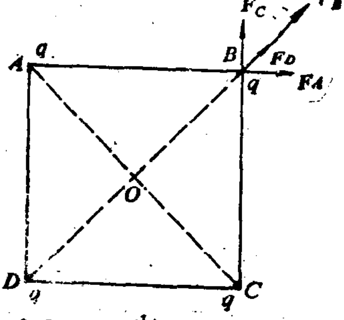
(2)若在中心放一点电荷 Q，使顶点上每个电荷受到的合力恰为零，求 Q 与 q 的关系。

证：

(1) 如图 (a)，设正方形每边长为 a，中心所放的点



(a)



(b)

图 1·2·5

电荷的电量为 Q。由库仑定律及迭加原理得：

$$\boldsymbol{F}_{合}=\boldsymbol{F}_{BO}+\boldsymbol{F}_{DO}+\boldsymbol{F}_{AO}+\boldsymbol{F}_{CO}$$

$$=KQq\left[\frac{\hat{\boldsymbol{r}}_{BO}}{r_{BO}^2}+\frac{\hat{\boldsymbol{r}}_{DO}}{r_{DO}^2}+\frac{\hat{\boldsymbol{r}}_{AO}}{r^2_{AO}}+\frac{\hat{\boldsymbol{r}}_{CO}}{r_{CO}^2}\right]$$

$$=\frac{2KQq}{a^2}(\hat{\boldsymbol{r}}_{BO}+\hat{\boldsymbol{r}}_{DO}+\hat{\boldsymbol{r}}_{AO}+\hat{\boldsymbol{r}}_{CO})=0$$

其中：$r_{BO}=r_{AO}=r_{CO}=r_{DO}=\frac{\sqrt{2}}{2}a$，

$$\hat{\boldsymbol{r}}_{BO}=-\hat{\boldsymbol{r}}_{DO},\quad \hat{\boldsymbol{r}}_{AO}=-\hat{\boldsymbol{r}}_{CO}。$$

从证明过程可看出：放在正方形中心的点电荷不论其电量为何值，它所受的力均为零。

（2）讨论B点的电荷所受的力。

设 A、O、C、D 点的点电荷对 B 点的电荷q 的作用力分别为：$\boldsymbol{F}_A$、$\boldsymbol{F}_O$、$\boldsymbol{F}_C$、$\boldsymbol{F}_D$，如图所示：

$$\boldsymbol{F}_A=\frac{Kq^2}{a^2}\hat{\boldsymbol{r}}_A,\qquad \boldsymbol{F}_C=\frac{Kq^2}{a^2}\hat{\boldsymbol{r}}_C,$$

$$\boldsymbol{F}_D=\frac{Kq^2}{2a^2}\hat{\boldsymbol{r}}_D=\frac{Kq^2}{2a^2}(\cos 45^\circ\,\hat{\boldsymbol{r}}_A+\sin 45^\circ\,\hat{\boldsymbol{r}}_C)$$

$$=\frac{\sqrt{2}Kq^2}{4a^2}(\hat{\boldsymbol{r}}_A+\hat{\boldsymbol{r}}_C),$$

$$\boldsymbol{F}_O=\frac{2KQq}{a^2}\hat{\boldsymbol{r}}_O=\frac{\sqrt{2}KQq}{a^2}(\hat{\boldsymbol{r}}_A+\hat{\boldsymbol{r}}_C)。$$

使 $\boldsymbol{F}=\boldsymbol{F}_A+\boldsymbol{F}_C+\boldsymbol{F}_D+\boldsymbol{F}_O$

$$=\left(\frac{Kq^2}{a^2}+\frac{\sqrt{2}Kq^2}{4a^2}+\frac{\sqrt{2}KQq}{a^2}\right)\times(\hat{\boldsymbol{r}}_A+\hat{\boldsymbol{r}}_C)=0$$

即使：$\frac{Kq^2}{a^2}+\frac{\sqrt{2}Kq^2}{4a^2}+\frac{\sqrt{2}KQq}{a^2}=0$

得　$Q=-\left(\frac{1}{4}+\frac{\sqrt{2}}{2}\right)q$。

1·2·6　两电量相等同性的点电荷，在其连线的中垂面上放一点电荷。根据对称性可知，该点电荷在中垂面上受力的极大值的轨迹是一圆。求该圆的半径。

解：如图（a）。设 x 轴上有两个点电荷，其电量均为 q，坐标分别为（$-a$，0，0）、（a，0，0）；中垂面 yoz 平面上有一点电荷Q，坐标为（0，y，z）。

设 $\boldsymbol{r}=y\hat{j}+z\hat{k}$

$r^2=y^2+z^2$ 即在中垂面内Q到坐标原点的距离。

如图（b），根据对称性点电荷 Q 所受的合力方向与 $\boldsymbol{r}$ 方向一致，

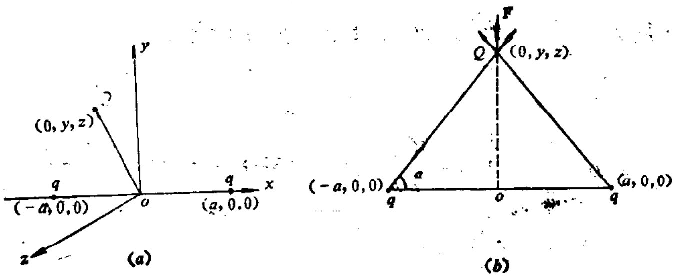


图　1·2·6（设 q 与 Q 同号）

$$\therefore\quad \boldsymbol{F}=2\frac{KQq}{r^2+a^2}\sin\alpha\,\hat{\boldsymbol{r}}=\frac{2KQqr}{(r^2+a^2)^{3/2}}\hat{\boldsymbol{r}}$$

求 F 对 r 的极值：

$$\left[\frac{2KQqr}{(r^2+a^2)^{3/2}}\right]'=2KQq\left[-\frac{3r^2}{(r^2+a^2)^{5/2}}+\right.$$

$$\left.+\frac{1}{(r^2+a^2)^{3/2}}\right]=0$$

即：$-3r^2+(r^2+a^2)=0$

$$\therefore \quad r^2=\frac{a^2}{2}$$

即：$y^2+z^2=\frac{a^2}{2}$

这是一个圆心坐标为（0，0，0），半径为$\frac{\sqrt{2}}{2}a$的圆轨迹方程。

1·3·2 用细线悬一质量为0.2克的小球，将其置于两个竖直放置的平行板间（见图）。设小球带电量为6×10^{-9}库仑，欲使悬挂小球的线与场强夹角成60°角，求两板间场强。

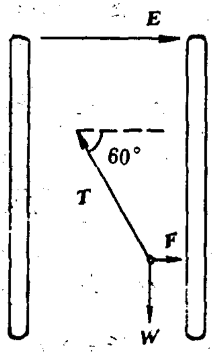


图 1·3·2

解：带电小球所受的电场力：$\boldsymbol{F}=Q\boldsymbol{E}$，重力为$W=mg$，细线的张力为$\boldsymbol{T}$，根据力的平衡条件知：

$$\begin{cases} T\sin60^\circ=mg \\ T\cos60^\circ=QE \end{cases}$$

即：$E=\frac{mg}{Q}\text{ctg}60^\circ$

$$=\frac{2\times10^{-4}\times9.8\times0.577}{6\times10^{-9}}$$

$$=1.89\times10^5(\text{牛/库})$$。

1·3·3 有一电子射入一电场强度是5000牛顿/库仑的均匀电场，电场的方向是竖直向上。电子的初速度是10^7米/秒，与水平线所夹的入射角为30°（见图）。（不考虑重力对电子的影响）

（1）求该电子的上升最大高度。

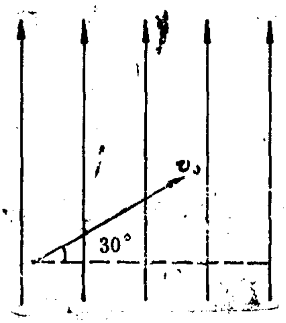


图 1·3·3

(2) 此电子回到其原来高度时的水平射程是多少？

解：(1) 电子所受的电场力：

$$F=-eE$$

其加速度 $a=\dfrac{F}{m}=-\dfrac{eE}{m}$

当电子上升到最大高度时：$v_{\perp}=0$

$$\therefore \quad v_{0\perp}^2=(v_0\sin30°)^2=2ah$$

$$\therefore \quad h=\frac{(v_0\sin30°)^2}{2a}=\frac{(v_0\sin30°)^2m}{2eE}$$

$$=\frac{(10^7\times0.5)^2\times9.1\times10^{-31}}{2\times1.6\times10^{-19}\times5\times10^3}$$

$$=1.4\times10^{-2}(\text{米}).$$

(2) 电子从上升到返回到原来高度时共用时间：

$$t=2\sqrt{\frac{h}{a}}=2\sqrt{\frac{2hm}{eE}}$$

$$=2\sqrt{\frac{2\times1.4\times10^{-2}\times9.1\times10^{-31}}{1.6\times10^{-19}\times5\times10^3}}$$

$$=1.13\times10^{-8}(\text{秒}).$$

水平射程：

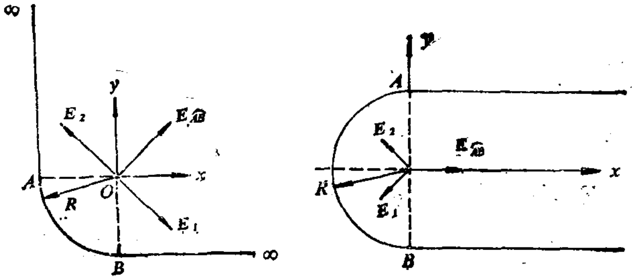
$$s=v_{0//}t=v_0\cos30°t$$

$$=10^7\times0.866\times1.13\times10^{-8}$$

$$=9.79\times10^{-2}\ (\text{米}).$$

1·3·8 线电荷密度为 η 的无限长均匀带电线，分别弯成附图中 (a) 与 (b) 两种形状，若圆弧半径为 R。试求：

(*a*)、(*b*) 图中O点的场强。



(*a*)　　图　1·3·8　　(*b*)

解： (*a*) 在O点建立坐标系，如图所示：

$A\infty$ 半无限长直导线在 O 点产生的场强 $\boldsymbol{E}_1$：

$$\boldsymbol{E}_1=\int_0^{\infty}\left[\frac{-\eta R}{4\pi\varepsilon_0(R^2+y^2)^{3/2}}\hat{j}+\right.$$

$$\left.+\frac{\eta y}{4\pi\varepsilon_0(R^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}\hat{i}\right]dy$$

$$=-\frac{\eta}{4\pi\varepsilon_0 R}\hat{j}+\frac{\eta}{4\pi\varepsilon_0 R}\hat{i}$$

同理，$B\infty$ 半无限长直导线在 O 点产生的场强 $\boldsymbol{E}_2$：

$$\boldsymbol{E}_2=\frac{\eta}{4\pi\varepsilon_0 R}\hat{j}-\frac{\eta}{4\pi\varepsilon_0 R}\hat{i}$$

$\widehat{AB}$ 弧在 O 点产生的场强为：

$$\boldsymbol{E}_{\widehat{AB}}=\frac{\eta}{4\pi\varepsilon_0 R}\hat{i}+\frac{\eta}{4\pi\varepsilon_0 R}\hat{j}$$

$$\therefore\quad \boldsymbol{E}=\boldsymbol{E}_1+\boldsymbol{E}_2+\boldsymbol{E}_{\widehat{AB}}$$

$$=\frac{\eta}{4\pi\varepsilon_0 R}(\hat{i}+\hat{j})$$

(*b*) 建立如图所示的坐标系，与图 (*a*) 讨论相同得：

$$\boldsymbol{E}_1=\frac{\eta}{4\pi\varepsilon_0 R}(-\hat{\boldsymbol{i}}-\hat{\boldsymbol{j}})$$

$$\boldsymbol{E}_2=\frac{\eta}{4\pi\varepsilon_0 R}(-\hat{\boldsymbol{i}}+\hat{\boldsymbol{j}})$$

$$\boldsymbol{E}_{\widehat{AB}}=\frac{\eta}{2\pi\varepsilon_0 R}\hat{\boldsymbol{i}}$$

$$\therefore\quad \boldsymbol{E}=\boldsymbol{E}_1+\boldsymbol{E}_2+\boldsymbol{E}_3=0$$

1·3·9 一无限长带电圆柱面，其面电荷密度由下式所决定 $\sigma=\sigma_0\cos\varphi$，$\varphi$ 角为 x 轴夹角，见附图。

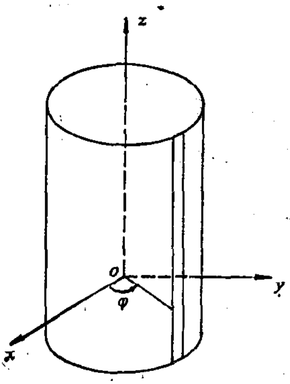


图 1·3·9

求：圆柱轴线 z 上的场强。

解：设该圆柱面的横截面半径为 R，根据 1·3·7 题中 $L\to\infty$ 时的结论：无限长直带电线在空间一点产生的场强 $E=\dfrac{\eta}{2\pi\varepsilon_0 r}$ 得出：带电圆柱面上宽度为 dL $(=Rd\varphi)$ 的无限长带电线在轴线一点产生的场强为

$$d\boldsymbol{E}=-\frac{\eta}{2\pi\varepsilon_0 R}\hat{\boldsymbol{R}}=-\frac{\sigma_0\cos\varphi}{2\pi\varepsilon_0 R}Rd\varphi\hat{\boldsymbol{R}}$$

$$=-\frac{\sigma_0\cos\varphi}{2\pi\varepsilon_0}(\cos\hat{\boldsymbol{i}}+\sin\varphi\,\hat{\boldsymbol{j}})d\varphi$$

$$\therefore \boldsymbol{E}=-\int_0^{2\pi}\frac{\sigma_0\cos\varphi}{2\pi\varepsilon_0}(\cos\varphi\,\hat{\boldsymbol{i}}+\sin\varphi\,\hat{\boldsymbol{j}})d\varphi$$

$$=-\frac{\sigma_0}{2\varepsilon_0}\hat{\boldsymbol{i}}$$

1·4·1 如图所示，匀强电场的场强 $\boldsymbol{E}$ 与半径为 R 的半

球面的轴线平行，试计算通过此半球面的 $\boldsymbol{E}$ 的通量。若以半球面的边线为边，另作一个任意形状的曲面，此面的通量为多少？

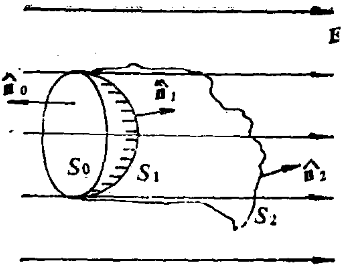


图 1·4·1

解：S_1 面的通量：

如图设与场强垂直的圆平面为 S_0，S_1 和 S_0 组成一闭合曲面，其包围电荷 $\Sigma q_i=0$，利用高斯定理得：

$$\oiint \boldsymbol{E}\cdot d\boldsymbol{S}=\iint_{S_0}\boldsymbol{E}\cdot d\boldsymbol{S}+\iint_{S_1}\boldsymbol{E}\cdot d\boldsymbol{S}$$

$$=\Phi_0+\Phi_{S_1}=0$$

$$\therefore\quad \Phi_{S_1}=-\Phi_{S_0}$$

$$\Phi_{S_0}=\iint_{S_0}\boldsymbol{E}\cdot d\boldsymbol{S}=-\pi R^2E$$

$$\therefore\quad \Phi_{S_1}=-\Phi_{S_0}=\pi R^2E.$$

同理：$\Phi_{S_2}=-\Phi_{S_0}=\pi R^2E$。

1·4·2 图中电场强度分量为 $E_x=bx^{\frac{1}{2}}$，$E_y=E_z=0$，其中 $b=800$（牛顿/库仑）。试求：

（1）通过正立方体的电通量。

（2）正立方体内之总电荷是多少？设 $a=10$（厘米）。

解：（1）通过立方体的左侧面的电通量

$$\Phi_{左}=-E_xS=-ba^{\frac{5}{2}}.$$

通过立方体的右侧面的电通量　$\Phi_{右}=E_xS=\sqrt{2}ba^{\frac{5}{2}}$

其余各面的电通量为零。

所以通过正立方体的电通量

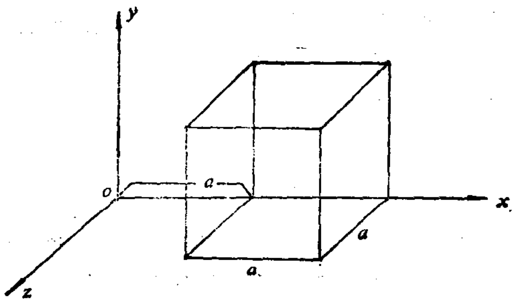


图 1·4·2

$$\Phi=\Phi_{左}+\Phi_{右}=-ba^{\frac{5}{2}}+\sqrt{2}\,ba^{\frac{5}{2}}$$

$$=(\sqrt{2}-1)ba^{\frac{5}{2}}=(\sqrt{2}-1)\times800\times(10^{-1})^{\frac{5}{2}}$$

$$=(\sqrt{2}-1)\times800\times10^{-\frac{5}{2}}$$

$$=1.05\ (牛顿·米^2/库).$$

(2) 根据高斯定理，得

$$\Phi=\oiint \boldsymbol{E}\cdot d\boldsymbol{S}=\frac{\Sigma q}{\varepsilon_0},$$

$$\therefore\ \Sigma q=\varepsilon_0\Phi=8.85\times10^{-12}\times1.05$$

$$=9.29\times10^{-12}\ (库仑).$$

1·4·6 一半径为 R 的带电球，其体电荷密度 $\rho=\rho_0\left(1-\frac{r}{R}\right)$，$\rho_0$ 为一常量，r 为空间某点至球心的距离。

试求：(1) 球内、外的场强分布。

(2) r 为多大时，场强最大，该点场强 $E_{max}=$?