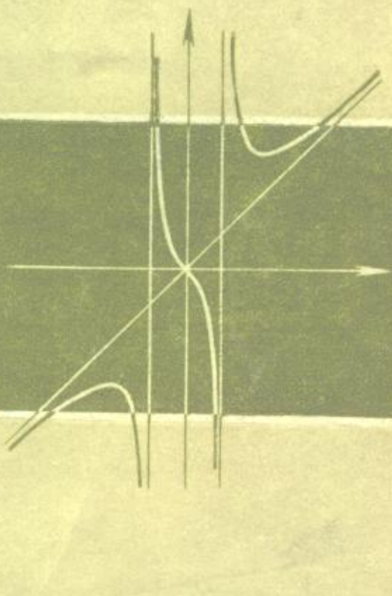
一元微积分双基训练

主编　翟　连　林



数学自学丛书

中国农业机械出版社

数学自学丛书

一元微积分双基训练

主编 翟连林
编者 王起发 章士藻 郝家骁
审阅 郝家骁

中国农业机械出版社

内容简介

本书是“数学自学丛书”之一．为了帮助自学青年和中学生学好高中微积分，本书参照六年制重点中学数学教学大纲以及全日制十年制学校高中微积分教材和工农业余中学的教材，把一元微积分的基础知识，分为极限、导数和微分、导数和微分的应用、不定积分、定积分及其应用等五章进行系统地归纳和总结．通过典型例题的分析、解答和评注，总结常用的解题方法，分析解题思路，指出易犯错误．第六章综合训练，精选了二十一个典型综合例题，沟通微积分各部分知识之间的联系，也涉及几何、代数、三角、解析几何等知识，以开阔读者的思路，提高分析问题和解决问题的能力。

本书可供自学青年、青年职工补课学习和复习使用，对于电视大学、职工大学的学员也是很好的自学读物，亦可供各类中学高中学生和数学教师参考．

2Q77/38.6

一元微积分双基训练（数学自学丛书）

主编　翟连林

编者　王起发　章士藻　郝家骕

审阅　郝家骕

*

中国农业机械出版社出版

北京市海淀　阜成路东钓鱼台乙七号

沈阳市第二印刷厂印刷

新华书店北京发行所发行

新华书店经售

*

787×1092　32开　11½印张　260千字

1983年7月北京第一版　·　1983年7月北京第一次印刷

印数：00,001—79,000　　定价：1.10元

统一书号：7216·59

目　　录

第一章 极　限

微积分研究的对象是函数，使用的主要工具是极限。微积分的主要内容微分、积分等，实质都是不同的极限问题与极限形式。因此，极限是微积分的理论基础，只有正确理解极限的有关概念，熟练掌握极限的有关运算，才能学好微积分，乃至进一步学好高等数学。

本章主要内容有数列与函数极限的概念，数列与函数极限的有关运算法则，重要极限 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$，$\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=e$，以及函数的连续性等。

极限方法是研究变量数学的一种方法。由于学生习惯于对常量数学的研究，同时极限运算又常常带有一定的技巧性，需要综合运用几何、代数、三角、解析几何中的有关知识，对极限概念的理解与极限方法的掌握会有一定的困难。因此，正确理解极限的概念与正确掌握极限的运算，既是本章的重点又是本章的难点。

一、数列的极限

（一）基础知识提要

1．数列极限的概念

对于数列

$$1,\ \frac{1}{2},\ \frac{1}{3},\ \frac{1}{4},\ \frac{1}{5},\ \frac{1}{6},\ \cdots,\ \frac{1}{n},\ \cdots,$$

n越大，$\frac{1}{n}$越小，表明从大于零趋近于零，而不能等于零的一种变化状态。

$$-1,-\frac{1}{2},\ -\frac{1}{3},\ -\frac{1}{4},\ -\frac{1}{5},\ -\frac{1}{6},\ \cdots,\ -\frac{1}{n},\ \cdots,$$

n越大，$-\frac{1}{n}$的绝对值越小，表明从小于零趋近于零，而不能等于零的一种变化状态。

$$-1,\ \frac{1}{2},\ -\frac{1}{3},\ \frac{1}{4},\ -\frac{1}{5},\ \frac{1}{6},\cdots,(-1)^n\frac{1}{n},\ \cdots,$$

n越大，$(-1)^n\frac{1}{n}$的绝对值越小，表明从大于或小于零趋近于零，而不能等于零的一种变化状态。

$$1,0,-\frac{1}{3},\ 0,\ -\frac{1}{7},\ \cdots,\ \frac{1}{n}\sin\frac{n\pi}{2},\ \cdots,$$

n越大，$\frac{1}{n}\sin\frac{n\pi}{2}$的绝对值越小，表明从大于或小于零趋近于零，而可以等于零的一种变化状态。

定义1（描述性定义）：

对于数列$\{x_n\}$：$x_1,x_2,x_3,x_4,\cdots,x_n,\cdots,$

在n无限增大的过程中，如果当x_n越到后来越无限趋近于某一个定数A时，则定数A叫做数列$\{x_n\}$的极限，或叫做数列$\{x_n\}$收敛于A。

记成“$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=A$”或“当$n\to\infty$时，$x_n\to A$”。

没有极限的数列叫做发散的。

显然，数列$\left\{\frac{1}{n}\right\}$、$\left\{-\frac{1}{n}\right\}$、$\left\{(-1)^n\frac{1}{n}\right\}$、$\left\{\frac{1}{n}\sin\frac{n\pi}{2}\right\}$都具有极限 0（或收敛于 0），而数列$\{n!\}$、$\{-n^2\}$没有极限（或发散）。

注意：

① 由以上定义可知，常数数列$\{a\}$的极限是a；

② 以上定义告诉我们：研究一个数列，不是孤立地看数列中某一个或有限个数，而是着眼于数列的整体。不是静止在数列中的某一个或有限个数上，而是看数列当 n 增大时的变化趋势；

③ 以上定义仅仅是对数列极限概念的定性描述，什么“后来”、“无限增大”、“无限趋近”等都不够明确，因此在理论的研究上，就有必要再对数列极限进一步作定量的刻划。

再观察数列

$$\frac{1}{2},\ \frac{2}{3},\ \frac{3}{4},\ \frac{4}{5},\ \frac{5}{6},\ \cdots,\ \frac{n}{n+1},\ \cdots,$$

当 n 无限增大时，$x_n=\frac{n}{n+1}=1-\frac{1}{n+1}$无限趋近于 1，即$\frac{n}{n+1}$与 1 之差的绝对值$\left|\frac{n}{n+1}-1\right|=\left|-\frac{1}{n+1}\right|=\frac{1}{n+1}$ 就越来越小。

例如，当 $n>9$ 时，$\left|\frac{n}{n+1}-1\right|=\frac{1}{n+1}<\frac{1}{10}$；当$n>99$时，$\left|\frac{n}{n+1}-1\right|=\frac{1}{n+1}<\frac{1}{100}$.反之，如要$\left|\frac{n}{n+1}-1\right|=\frac{1}{n+1}<\frac{1}{10}$,

只要$n>9$；如要$\left|\frac{n}{n+1}-1\right|=\frac{1}{n+1}<\frac{3}{1000}$，只要$n+1>\frac{1000}{3}$
$\Rightarrow n>\frac{1000}{3}-1$。

一般地，如要$\left|\frac{n}{n+1}-1\right|<\varepsilon$，只要$n>\frac{1}{\varepsilon}-1$即可。

这就是说，对于数列$\left\{\frac{n}{n+1}\right\}$，存在一个定数1，不论给定的小正数$\varepsilon$多么小，总存在一个自然数$N$，当$n>N$时，有$\left|\frac{n}{n+1}-1\right|<\varepsilon$成立。

定义2（精确性定义）：

对于数列$\{x_n\}$：$x_1, x_2, x_3, x_4, \cdots, x_n, \cdots$。

如果存在一个定数A，不论给定的ε多么小，总存在一个自然数N，使对于$n>N$的一切值，有不等式$|x_n-A|<\varepsilon$成立，则定数A叫做数列$\{x_n\}$的极限或叫做数列$\{x_n\}$收敛于A。

记成“$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=A$”或“当$n\to\infty$时，$x_n\to A$”。

由于$|x_n-A|<\varepsilon$与$A-\varepsilon<x_n<A+\varepsilon$等价，因此$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=A$这一事实的几何意义是：

将数A和数列$\{x_n\}$中各项在数轴上用它们的对应点表示出来，再以点A为中心，ε为半径截取两点$A-\varepsilon$与$A+\varepsilon$（图1-1）。则根据定义，当$n>N$时，所有x_{N+1}、x_{N+2}、…、x_{N+n}、…点都要落在小区间$(A-\varepsilon, A+\varepsilon)$之中，而至多只能是有限个点$x_1$、$x_2$、…、$x_N$在该区间之外。

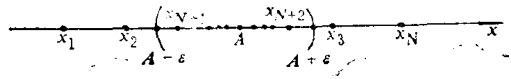


图 1-1

注意：

① 定义 2 中的四小段话“不论给定的 ε 多么小，总存在一个自然数N，使对于 $n>N$的一切值，有不等式$|x_n-A|<\varepsilon$成立”，人们常简述为“$\forall\varepsilon>0$，$\exists N$，当 $n>N$ 时，有$|x_n-A|<\varepsilon$”．这里“$\forall$”表示“任意的”，“$\exists$”表示“存在”．读作“对于任意给定的一个小正数 ε，总存在一个自然数N，当$n>N$ 时，有 $|x_n-A|<\varepsilon$”，即以“给定、存在、当、有”四段式来描述数列$\{x_n\}$具有极限 A．

② 定义 2 中，通过自然数 n，表明“无限增大”；通过 $n>N$，表明“后来”；通过距离 $|x_n-A|$ 的大小，表明 x_n 与 A 的接近程度，且将 x_n 从大于、小于或摆动地趋近于 A 的情况统一起来了；通过$|x_n-A|<\varepsilon$表明 x_n与 A“无限接近”．这样就克服了定义 1 中的缺陷，使数列极限获得了定量的描述，这一精确定义又叫做数列极限的“ε-N”定义．

③ 在定义 2 中，ε 具有任意性与稳定性．ε是一个小正数，它是表达x_n与 A 的接近程度的限制，具有任意性，以愈小愈好；同时 ε 又具有相对的稳定性，ε 一经给出，它就稳定了，只有相对稳定，才能找到N．

④ 定义 2 中的N与 ε 有关，N随 ε 的变化而变化，不妨记为$N=N(\varepsilon)$；同时由 ε 找N，又不唯一．例如在数列$\left\{\frac{n}{n+1}\right\}$中，当 $\varepsilon=\frac{3}{1000}$时，则$N$取333、334、335、…等都符合要求．

2. 数列极限的性质

（1）收敛数列的极限是唯一的（唯一性）；

（2）收敛数列必有界（有界性）；

（3）若$\lim\limits_{n\to\infty} x_n=A$，且$A>0$（或$A<0$），则当$n>N$时，有$x_n>0$（或$<0$）（保号性）；

（4）若$\lim\limits_{n\to\infty} x_n=A$，$\lim\limits_{n\to\infty} y_n=B$，且$n>N$时，有$x_n\leqslant y_n$，则$A\leqslant B$（单调性）；

（5）若$\lim\limits_{n\to\infty} x_n=\lim\limits_{n\to\infty} z_n=A$，且$n>N$时，有$x_n\leqslant y_n\leqslant z_n$，则$\lim\limits_{n\to\infty} y_n=A$（追敛性又叫两边夹法则）。

3. 数列极限的运算法则

设$\lim\limits_{n\to\infty} x_n=A$，$\lim\limits_{n\to\infty} y_n=B$，则

（1）$\lim\limits_{n\to\infty} Cx_n=C\lim\limits_{n\to\infty} x_n$，其中$C$为常数；

（2）$\lim\limits_{n\to\infty}(x_n+y_n)=\lim\limits_{n\to\infty} x_n+\lim\limits_{n\to\infty} y_n$；

（3）$\lim\limits_{n\to\infty}(x_n-y_n)=\lim\limits_{n\to\infty} x_n-\lim\limits_{n\to\infty} y_n$；

（4）$\lim\limits_{n\to\infty}(x_n\cdot y_n)=\lim\limits_{n\to\infty} x_n\cdot\lim\limits_{n\to\infty} y_n$；

（5）$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x_n}{y_n}=\dfrac{\lim\limits_{n\to\infty} x_n}{\lim\limits_{n\to\infty} y_n}$　$(y_n\neq0,B\neq0)$。

即当数列极限存在时，常数可从极限符号内移出，和、差、积、商的极限等于极限的和、差、积、商（除数的极限不为零）。

4. 几个重要的数列极限

（1）$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}=0$；

（2）$\lim\limits_{n\to\infty}a^n=\begin{cases}0 & (0<|a|<1)\\ 1 & (a=1)\\ +\infty & (a>1)\end{cases}$；

（3）$\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=e$，$\lim\limits_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n}\right)^{-n}=e$。

（二）基本训练举例

例 1 已知数列$\frac{3}{2}$，$\frac{5}{4}$，$\frac{9}{8}$，…，$\frac{2^n+1}{2^n}$，…：

（1）计算$|a_n-1|$；

（2）从第几项起后面所有项 $|a_n-1|<\frac{1}{100}$？

（3）从第几项起后面所有项$|a_n-1|<\varepsilon$？

（4）确定该数列的极限。

解：（1） $|a_n-1|=\left|\frac{2^n+1}{2^n}-1\right|=\left|\frac{1}{2^n}\right|=\frac{1}{2^n}$；

（2）由$|a_n-1|<\frac{1}{100}$，即$\left|\frac{2^n+1}{2^n}-1\right|<\frac{1}{100}$，

得 $\frac{1}{2^n}<\frac{1}{100}$，$2^n>100$，

而 $2^6<100<2^7$，$\therefore$ $n>6$。

故从第 7 项起后面所有项$|a_n-1|<\frac{1}{100}$；

（3）由$|a_n-1|<\varepsilon$，即$\left|\frac{2^n+1}{2^n}-1\right|<\varepsilon$，

得　$\frac{1}{2^n}<\varepsilon$，$2^n>\frac{1}{\varepsilon}$，

两边取对数，得　$n>\log_2\frac{1}{\varepsilon}$，

设$\log_2\frac{1}{\varepsilon}$的整数部分为$N$，故从$N+1$项开始，即$n>N$时，$|a_n-1|<\varepsilon$。

（4）由上面（3），得

$\forall\varepsilon>0$，$\exists N$，当$n>N$时，$|a_n-1|<\varepsilon$，

$\therefore\ \lim\limits_{n\to\infty}a_n=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2^n+1}{2^n}=1$。

例 2　求证：

（1）$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2n+1}{3n-1}=\frac{2}{3}$；

（2）数列$\left\{\frac{1+(-1)^n}{2}\right\}$没有极限；

（3）若$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$，　则$\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt{x_n}=\sqrt{a}$（其中$x_n>0$，$a>0$）。

证明：

（1）$\because\ \left|a_n-\frac{2}{3}\right|=\left|\frac{2n+1}{3n-1}-\frac{2}{3}\right|=\frac{5}{3(3n-1)}$，

$\therefore$　要使$\left|a_n-\frac{2}{3}\right|<\varepsilon$，只要$\frac{5}{3(3n-1)}<\varepsilon$即可，

即　$3n-1>\frac{5}{3\varepsilon}$，$n>\frac{5+3\varepsilon}{9\varepsilon}$，

取 N等于$\frac{5+3\varepsilon}{9\varepsilon}$的整数部分，

则，$\forall\varepsilon>0$，$\exists N$，当$n>N$时，$\left|a_n-\frac{2}{3}\right|<\varepsilon$，

$\therefore\ \lim\limits_{n\to\infty}\frac{2n+1}{3n-1}=\frac{2}{3}$；

（2）因为该数列的奇次项是零，偶次项是1，即该数列中的所有项始终是在0与1之间摆动，对于任意给定的一个小正数ε，例如$\varepsilon=\frac{1}{2}$，则不存在一个常数A，使$|1-A|<\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}<A<\frac{3}{2}\right)$与$|0-A|<\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}<A<\frac{1}{2}\right)$同时成立，由数列极限定义，所以该数列$\left\{\frac{1+(-1)^n}{2}\right\}$没有极限；

（3）$\because|\sqrt{x_n}-\sqrt{a}|=\left|\frac{x_n-a}{\sqrt{x_n}+\sqrt{a}}\right|\leqslant\frac{|x_n-a|}{\sqrt{a}}$，

$\therefore$ 要使$|\sqrt{x_n}-\sqrt{a}|<\varepsilon$，只要$\frac{|x_n-a|}{\sqrt{a}}<\varepsilon$即可，

$\because\ \lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$，

$\therefore\ \forall\varepsilon>0$，$\exists N>0$，当$n>N$时，$|x_n-a|<\sqrt{a}\,\varepsilon$，

$\therefore\ \forall\varepsilon>0$，$\exists N>0$，当$n>N$时，有$|\sqrt{x_n}-\sqrt{a}|\leqslant\frac{|x_n-a|}{\sqrt{a}}<\varepsilon$，

即 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt{x_n}=\sqrt{a}$。

评注：

① 求证数列$\{a_n\}$的极限为A，就是利用“ε-N”定义验证数列$\{a_n\}$的极限为A。一般从解不等式$|a_n-A|<\varepsilon$入

手，设法分解出 n，如能得到一个仅含有 ε 的不等式 $n> f(\varepsilon)$，取 $f(\varepsilon)$ 的整数部分为 N，则由数列极限定义：

$\forall\varepsilon>0$，$\exists N$，当 $n>N$ 时，$|a_n-A|<\varepsilon$，
从而证得 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=A$。

② 证明数列 $\{a_n\}$ 没有极限，一般说来，不能从解不等式 $|a_n-A|<\varepsilon$ 出发，通常根据数列极限的定义与性质应用反证法进行证明。没有极限分为极限不存在与极限为无穷大两种情况。本例中数列 $\left\{\frac{1+(-1)^n}{2}\right\}$ 的极限应为不存在，而数列 $\{n^2\}$ 与 $\{-n!\}$ 的极限分别为正无穷大（$+\infty$）与负无穷大($-\infty$)。在微积分中极限不存在与极限为无穷大是两个不同的概念，表明两种不同的变化状态，通常说数列有极限 A，均指为有限数的情形。

例 3 求数列1.231，1.23131，1.2313131… 的极限，并由此化循环小数 $0.\dot{3}$，$0.\dot{2}1\dot{0}8$，$3.20\dot{1}\dot{2}$ 为分数。

证明：设 $a_n=1.2\overbrace{3131\cdots31}^{n\text{个}31}$，

则
$$a_n=1+\frac{2}{10}+\frac{31}{1000}+\frac{31}{100000}+\cdots+\frac{31}{\underbrace{10000\cdots0}_{2n+1\text{个}0}}$$

$$=1+\frac{2}{10}+\frac{31}{1000}\left[1+\frac{1}{100}+\cdots+\frac{1}{100^{n-1}}\right]$$

$$=1+\frac{2}{10}+\frac{31\left[1-\left(\frac{1}{100}\right)^n\right]}{990},$$

$$\therefore\ \lim_{n\to\infty}a_n=1+\frac{2}{10}+\frac{31}{990}=1\frac{229}{990}.$$