

高等学校教学用书



振 动 理 论

ZHENDONG LILUN

下 册

И. М. 巴巴科夫著

蔡承文 等 译

人民教育出版社

52.21

132

12

高等学校教学用书



振 动 理 论

ZHENDONG LILUN

下 册

И. М. 巴巴科夫著

蔡 承 文 等 译

31-1-1

人民 1963 年 出版 社



本书系按苏联技术理论书籍出版社(Гостехиздат)出版的 И. М. 巴巴科夫(И. М. Бабаков)著“振动理论”(Теория колебаний)一书 1958 年版译出的。原书经苏联高等教育部审定为高等工业学校用数学参考书。

中译本分为上下两册。下册内容包括原书的中篇“无限多自由度的线性系统”及下篇“运动稳定性和非线性振动”。

本册由浙江大学力学教研组蔡承文等翻译,分工如下:第九章——王行新,第十章——吴爱莲,第十一章——黄纯明,第十二章——洪嘉智,第十三章——庄表中,第十四、十七章——蔡承文,第十五章——胡琦,第十六章——费学博;并由蔡承文负责校订。

在本册付印前,曾请北京大学丁中一和黃琳同志将著者及译者所编的原书勘误表对照原书内容进行校核,最后再由译者在译稿上作了相应的订正。

振 动 理 论

下 册

И. М. 巴巴科夫著

蔡承文等译

北京市书刊出版业营业许可証出字第2号

人民教育出版社出版(北京景山东街)

民族印刷厂印装

新华书店北京发行所发行

各地新华书店经售

统一书号K13010·1088 开本 850×1168 1/32 印张 13¹⁴/₁₆

字数 340,000 印数 0001—4,000 定价(6) 1.30

1958年3月第1版 1953年3月北京第1次印刷

下册目录

中篇 无限多自由度的綫性系統

第九章 彈性杆微振动的普遍性質	265
1. 綫性疊加原理和直杆微振动的积分方程	265
2. 直杆的自由振动	269
3. 直杆固有振动型式的性質	272
4. 直杆自由振动积分方程通解的形式	279
5. 直杆的受迫振动	282
第十章 直杆的纵向振动和扭轉振动	289
1. 杆的纵向振动微分方程	289
2. 杆的具有綫性阻力的自由振动	298
3. 带右边的振动型式方程	300
第十一章 直杆的橫向振动	313
1. 基本假定和直杆橫向振动方程的推导	313
2. 边界条件和初始条件	316
3. 杆的固有振动型式和确定固有振动型式的函数	317
4. 其他一些基本問題	321
5. 带右边的振动型式方程	333
6. 均匀杆的橫向受迫振动	337
7. 諧影响系数	341
8. 装有轉盘的直軸的临界轉速	349
9. 矩陣形式的初参数法	352
10. 具有非彈性內阻力的直杆的橫向振动	354
第十二章 变截面直杆振动的近似計算法	364
1. 总的說明	364
2. 变分法	364
3. 里茨法	370
4. 雷萊法	378
5. D. F. 加摩尔金法	396
6. 关于用变分法計算基本頻率的誤差的估計	404
7. 受迫振动	408

8. 振动型式的逐次近似法(疊代法).....	410
9. 基础面数的改善.....	418
第十三章 板的横向振动.....	420
1. 基本假定和公式.....	420
2. 板的势能 and 动能.....	422
3. 板的横向振动的变分方程.....	424
4. 板的横向振动型式的微分方程和边界条件.....	429
5. 板的固有振动型式的若干性质.....	431
6. 計算板的横向振动固有型式和固有频率的近似方法(瑞茨法和加莫尔 命法).....	436
7. 圓板的横向振动方程.....	446
8. 均匀薄板的振动型式.....	449
9. 汽輪机轉盘的軸向振动.....	458
10. 青貝耳对轉盘軸向振动的实验研究.....	466
11. 轉盘的临界轉速.....	469

下篇 运动稳定性和非綫性振动

第十四章 运动稳定性普通理論的引論.....	471
1. 初步說明.....	471
2. 系統平衡状态稳定性的定义.....	475
3. 关于应用 A. M. 利亚普諾夫第二方法来研究自治系統平衡状态稳定性 的若干說明.....	477
4. 关于具有无穷小上界的函数.....	482
5. 两个变量的第一类利亚普諾夫函数性质的几何解釋.....	483
6. 系統平衡状态稳定性的定理.....	485
7. 保守系統平衡稳定性的拉格朗日-普里克雷定理.....	487
8. 运动稳定性的定义.....	491
9. 相对坐标中的被扰动运动方程.....	494
10. 第二类利亚普諾夫函数.....	496
11. 非恒定运动稳定性的利亚普諾夫定理.....	501
12. 渐近稳定性的利亚普諾夫定理.....	503
13. 关于具有循环坐标的系統的稳定运动稳定性(旁氏定理).....	509
14. 运动不稳定性利亚普諾夫定理.....	516
第十五章 按第一次近似的稳定性.....	519
1. 初步說明.....	519
2. 第一次近似方程的正則形式.....	520
3. 特征方程有重根的情况.....	522

4. 单自由度系统·····	526
5. 按第一次近似判断稳定性的利亚普诺夫定理·····	534
6. 按第一次近似判断不稳定性的利亚普诺夫定理·····	540
7. 特征方程诸根有负实部的准则·····	545
8. 科希指标和有理分式的指标计算·····	545
9. 劳思准则·····	550
10. 胡尔维茨准则·····	556
11. 扰动性的耗散力和迴轉仪力对线性化系统平衡稳定性的影响·····	559
第十六章 最简单的非线性系统·····	568
1. 非线性系统·····	568
2. 等倾线法·····	573
3. 单自由度非线性保守系统·····	574
4. 非线性保守系统的周期运动·····	582
5. 耗散系统·····	592
6. 相轨迹的利昂纳特作图法·····	595
7. 自振系统·····	604
第十七章 非线性力学的若干普遍方法·····	617
1. 初步说明·····	617
2. 普安卡雷定理(受迫振动情况)·····	618
3. 普安卡雷定理(准线性自治系统的自由振动情况)·····	630
4. A. H. 克雷洛夫法·····	638
5. 范·德·波耳法·····	643
6. 极限环的稳定性·····	652
7. H. M. 克雷洛夫-H. H. 博果柳博夫法·····	654
8. A. M. 利亚普诺夫系统·····	657
9. 非线性系统的受迫振动(均化法)·····	662
10. 非线性系统的受迫振动(Б. Г. 加摩尔金法)·····	666
11. 周期系数线性方程和非线性系统的周期解的稳定性问题·····	674
12. 周期解的稳定性·····	678
附录·····	687
表 1. 函数 $\cos \alpha$, $\sin \alpha$, $\operatorname{ch} \alpha$, $\operatorname{sh} \alpha$ 和 A. H. 克雷洛夫函数	
$S(\alpha) = \frac{1}{2}(\cos \alpha + \operatorname{ch} \alpha)$, $T(\alpha) = \frac{1}{2}(\sin \alpha + \operatorname{sh} \alpha)$,	
$U(\alpha) = \frac{1}{2}(\operatorname{ch} \alpha - \cos \alpha)$, $V(\alpha) = \frac{1}{2}(\operatorname{sh} \alpha - \sin \alpha)$.	
(宗量 α 的值自 0 至 5 弧度)·····	687

表 2. 梁函数

$$X_i = \sin \frac{\lambda_i x}{l} + A_i \cos \frac{\lambda_i x}{l} + B_i \operatorname{sh} \frac{\lambda_i x}{l} + C_i \operatorname{ch} \frac{\lambda_i x}{l}$$

中参数 λ_i 和系数 A_i, B_i, C_i 的值 698

表 3. 计算中遇到的若干积分的数值 700

表 4. 计算中遇到的若干三角公式 701

中篇 无限多自由度的綫性系統

第九章 弹性杆微振动的普遍性質

1. 綫性疊加原理和直杆微振动的积分方程 直杆在其彈性穩定平衡位置附近作微小的縱向振动、扭轉振动或橫向振动时，是一种最简单的无限多自由度系統。通常假設，在平衡状态下，这种系統的橫截面重心处在同一直綫（系統的“軸綫”）上，并假設系統的单位长度質量、剛度或柔度以及外載荷的密度，都是一个坐标 x 的連續函数或分段連續函数。 x 是从軸綫上选定的原点算起的距离。同时假設杆的橫截面在以后将考察的一切变形下，仍保持为平面^①，并且軸綫上各点或杆上对应于这些点的各橫截面，因振动时的外載荷作用于杆上而产生的位移，由坐标 x 和時間 t 这两个变量的一个函数 $y(x, t)$ 的值单值地确定。

根据杆的变形形式不同，这个函数表示不同的量。当杆作縱向振动时，这个函数表示杆截面的縱向位移；当杆作扭轉振动时，表示轉角；最后，当杆作橫向振动时，則表示截面重心的橫向位移。可見，橫向振动是假設在同一平面內发生的。

最后，因为只限于考察所謂微振动，我們將認為，振动时发生的恢复力不会超出比例极限，所以，确定直杆变形的量是恢复力的綫性函数。

这种振动称为綫性振动，而作綫性振动的系統称为綫性系統。

可以依据作用于系統的广义力，而作出系統变形的所謂源形

① 在扭轉振动的情况下，只有对于圓截面杆才是正确的。

表达式，這是綫性系統的最重要性質。這個性質是建立綫性振動普遍理論的出發點。

為了說明這種表達式的意義，首先考察系統受密度為 $q(x)$ 的分布載荷而產生的靜力變形 $y(x)$ （例如，因杆的自重而產生的靜力撓度）。設有單位廣義力作用在杆上橫坐標為 s 的一點上，則橫坐標為 x 的截面將產生一定的位移。我們用 $\bar{K}(x, s)$ 來表示這個位移^①。 $\bar{K}(x, s)$ 是坐標 x 和 s 的函數，這函數沿杆的全長 l 都是一定的，在區域 $0 \leq x \leq l, 0 \leq s \leq l$ 內是有限的並且連續的。此外，它還具有為了證明以後必須對它實行的運算為合理所需的一切性質。這個函數是我們在有限多個自由度換用系統的振動理論中遇到過的影响系數的推廣，因而稱為杆的影响函數。

像影响系數一樣，函數 $\bar{K}(x, s)$ 對於坐標 x 和 s 具有對稱性質：

$$\bar{K}(x, s) = \bar{K}(s, x). \quad (9.1)$$

這是位移互易定律的表达式。根據位移互易定律，因截面 s 上作用有單位力而使截面 x 產生的位移，等於因截面 x 上作用着單位力而使截面 s 產生的位移。其他某些與彈性系統的綫性變形有關的量，也具有這種互易性^②。

利用影响函數 $\bar{K}(x, s)$ ，因密度為 $q(s)$ 的載荷而引起在點 x 的靜力位移 $y(x)$ ，可以表示成如下積分表达式：

$$y(x) = \int_0^l \bar{K}(x, s) q(s) ds. \quad (9.2)$$

函數 $y(x)$ 的這種表达式，就稱為源形表达式。

變形的源形表达式(9.2)，是彈性系統變形的綫性疊加原理的

① 這裡和以後，位移可以表示杆的撓度、縱向位移或轉角。

② Стрети Дж. (Лорд Рэлей), Теория звука (聲的理論), 卷 I, Гостехиздат, 1955。

表达式之一。根据綫性叠加原理，因分布载荷而在点 s 产生的位移，可以当作因载荷

$$q(s)ds$$

作用在杆的元素 ds 上而产生的微分位移的綫性和。从这个观点来看，方程(9.2)是胡克定律对无限多自由度系統的推广。对于有限多 n 自由度系統，公式(2.14)是胡克定律的表达式：

$$y_i = \sum_{k=1}^n \alpha_{ik} P_k \quad (i=1, 2, \dots, n),$$

式中 P_k 是集中力， α_{ik} 是靜力影响系数。这样看来，綫性叠加原理和变形 $y(x)$ 表作源形表达式的可能性，乃是方程(9.2)所描写綫性系統的同—基本性质的两个等效的說法。因而，在綫性变形的范围内，彈性系統影响函数的存在，与系統的由綫性叠加原理表示的基本性质有不可分割的联系。

假如，除了分布载荷以外，还有集中力 $P_i (i=1, 2, \dots, k)$ 作用在杆的某些截面 $x_i (i=1, 2, \dots, k)$ 上，那末在任意点 x 的变形将表示为和式：

$$y(x) = \int_0^l \bar{K}(x, s) q(s) ds + \sum_{i=1}^k P_i \bar{K}(x, x_i). \quad (9.3)$$

利用达朗伯原理，便可从方程(9.2)和(9.3)得到直杆微振动的积分方程。設有与時間有关的载荷作用在杆上，我們用 $q(s, t)$ 来表示载荷的密度。在此情况下，杆的任意截面 x 上的变形，也将与時間有关，因而，将由某个两变量的函数 $y(x, t)$ 来确定。假如在载荷 $q(s, t)$ 之外，再附加杆的微段质量的慣性力或慣性力矩，那末，根据达朗伯原理，可以把这种变形看作是靜力变形。如果 $m(s)$ 是杆的单位长度的质量或轉动慣量，那末在杆上某点 s 的长度元素 ds 的慣性力将等于

$$-m(s) \frac{\partial^2 y(s, t)}{\partial t^2} ds.$$

假如在方程(9.2)中, 把 $q(s)ds$ 换成

$$[q(s, t) - m(s) \frac{\partial^2 y(s, t)}{\partial t^2}] ds,$$

并把 $y(x)$ 写成 $y(x, t)$, 我們將得到杆的振动方程:

$$\begin{aligned} y(x, t) = & - \int_0^l \bar{K}(x, s) \frac{\partial^2 y(s, t)}{\partial t^2} m(s) ds + \\ & + \int_0^l \bar{K}(x, s) q(s, t) ds. \end{aligned} \quad (9.4)$$

直杆微振动的积分方程(准确地說是积分-微分方程)就是这样。

当沒有外载荷时, 也即 $q(s, t) \equiv 0$ 时, 系統作自由振动。从(9.4)式可以看出, 如下方程就是自由振动的积分方程:

$$y(x, t) = - \int_0^l \bar{K}(x, s) \frac{\partial^2 y(s, t)}{\partial t^2} m(s) ds. \quad (9.5)$$

不論杆的振动是什么类型(纵向振动、扭轉振动和横向振动), 在杆的任何固定条件下, 所得方程(9.5)以及方程(9.4)都具有相同的形式。这一事实就是这两个方程的最美妙的性質之一。对于不同类型振动和不同固定条件, 只有影响函数 $\bar{K}(x, s)$ 将具有不同解析表达式。在最簡單情况下, 这些解析表达式可以根据材料力学公式列出。方程(9.5)的形式不随振动类型的不同和固定条件(或边界条件)的不同而变, 这一事实表示出綫性系統微振动的物理本质有其統一性。这种統一性决定了綫性系統中存在着普遍的性質, 并且証实了建立綫性系統振动的普遍理論是可能而且适宜的。这种普遍理論中, 与用方程(9.5)或(9.4)来描写振动密切相关的許多原理, 可以作为具有对称核的积分方程的数学理論中一些著名定理的說明。这样看来, 这部分积分方程理論特別适合于

阐明在不同类型振动中所具有的共同性质。此外还应指出, 如果注意一下用积分方程法进行计算的可能性, 那末这种方法的实用价值是不大的。在这方面, 积分方程法要比微分方程法差得多。

2. 直杆的自由振动 直杆的自由振动积分方程

$$y(x, t) = - \int_0^l \bar{K}(x, s) m(s) \frac{\partial^2 y(s, t)}{\partial t^2} ds, \quad (9.6)$$

可以看作是有 n 个未知量的一组 n 个线性微分方程、在 n 无限增加时的极限情况。假如把积分区间 $(0, l)$ 分成 n 段, 用 n 项有限和代替积分式, 并认为对于与区间分点相对应的 n 个离散值 x 来说, 等式 (9.6) 能精确地满足, 那末我们就会得到这样的方程组。我们用 $y_i (i=1, 2, \dots, n)$ 来表示函数 $y(x, t)$ 在这些分点上的值, 并用 α_{ik} 和 m_k 来表示函数 $\bar{K}(x, s)$ 和 $m(s)$ 的对应值, 经上述置换后, 将有:

$$y_i = - \sum_{k=1}^n \alpha_{ik} m_k \ddot{y}_k \quad (i=1, 2, \dots, n). \quad (9.7)$$

方程组 (9.7) 与方程组 (2.42) 没有不同。那时, 方程组 (2.42) 是对于有 n 个集中质量的换用轴的横向振动而列出的。当 n 趋向于无穷大, 而分割杆所得的各段趋向于零时, y_i 的离散和变成连续和, 而方程 (9.7) 就变成方程 (9.6)。这样看来, 方程 (9.6) 相当于描写无限多自由度系统微振动的一组无限个线性方程。积分方程 (9.6) 的这种理解, 就是建立积分方程解的著名弗列德霍姆法, 或无限行列式法^① 的基础。也可以利用它来发现连续系统微振动的

① Винарда Г., Интегральные уравнения (积分方程), 1933, 第5章 (关于积分方程的理论也可参阅: 斯米尔诺夫, 高等数学教程, 第4卷, 第1分册, 陈传璋译, 高等教育出版社, 1958, 第1章; 彼得罗夫斯基, 积分方程讲义, 胡祖德译, 高等教育出版社, 1954; 米哈林, 积分方程及其应用, 陈传璋、卢鹤绂译, 商务印书馆, 1955。——译者)。

某些性質，只要用極限過程的方法，把有限多自由度系統振動的已知性質推廣到連續系統就行了^①。

大家知道， n 自由度綫性系統的方程(9.7)的最簡單周期解，具有形式

$$y_{si} = u_{si} \sin(p_s t + \sigma_s), \quad (9.8)$$

式中 u_{si} ($i = 1, 2, \dots, n$) 是各集中質量的振幅偏移的集合(第 s 階振動型式)，而 p_s 是系統的第 s 階固有頻率。解(9.8)對應于系統的一個主振動，也就是第 s 階主振動，同時，主振動的數目，以及系統的固有頻率數目，至少在像以前所考察的那種非奇異情況下，等於系統的自由度數目。

遵循積分方程(9.6)與綫性方程組(9.7)之間的上述類比關係，我們將尋求方程(9.6)的如下形式的最簡單周期解：

$$y(x, t) = \bar{\varphi}(x) \sin(pt + \alpha). \quad (9.9)$$

這裡 $\bar{\varphi}(x)$ 確定了杆軸綫上各點離開其平衡位置的振幅偏移(或杆截面的位移)的連續集合。因此，把函數 $\bar{\varphi}(x)$ 稱為杆的振幅函數或振動型式。在离散系統中，振幅函數簡併成集中質量的 n 個振幅偏移的有限集合。

把(9.9)式代入方程(9.6)後，我們將得到振動型式的積分方程

$$\bar{\varphi}(x) = p^2 \int_0^l \bar{K}(x, s) m(s) \bar{\varphi}(s) ds. \quad (9.10)$$

從積分方程理論可以知道，並非對於任意 p^2 值，齊次方程(9.10)都能有非平凡解。非零解 $\bar{\varphi}(x)$ 能存在的那些 p^2 值稱為函數 $\bar{K}(x, s)m(s)$ 的固有值，而固有值的平方根就是所考察系統的固有

^① 拉格朗日所建立的弦綫振動方程的推导，就是根據這種極限過程。參閱：Лаврентьев, Аналитическая механика(分析力學)，卷1，第6篇，§17，Гостехиздат, 1950。

有振动频率。我们将把对应于固有频率的函数 $\bar{\varphi}(x)$ ，称为系统的固有振动型式。因此，方程 (9.6) 的形如 (9.9) 的周期解，由积分方程 (9.10) 的固有值和固有函数^①来确定。

把方程 (9.10) 重写成如下形式：

$$\bar{\varphi}(x) = \int_0^l \bar{K}(x, s) p^2 m(s) \bar{\varphi}(s) ds,$$

并把它与杆因受分布载荷 $q(s)$ 而产生的静力变形方程

$$y(x) = \int_0^l \bar{K}(x, s) q(s) ds \quad (9.11)$$

作比较，我们就可断定，可以将固有型式 $\bar{\varphi}(x)$ 看作是杆因受载荷 $p^2 m(s) \bar{\varphi}(s)$

而产生的静力变形型式。我们将把这种载荷称为固有载荷。

利用代换

$$\varphi(x) = \bar{\varphi}(x) \sqrt{m(x)}, \quad (9.12)$$

就容易使具有不对称核

$$\bar{K}(x, s) m(s)$$

的方程 (9.11) 对称化，也就是说，把它转换成具有对称核的方程。事实上，若将 (9.12) 式代入方程 (9.11)，并假定

$$K(x, s) = \bar{K}(x, s) \sqrt{m(x)m(s)},$$

我们就会得到：

$$\varphi(x) = p^2 \int_0^l K(x, s) \varphi(s) ds, \quad (9.13)$$

现在式中

$$K(x, s) = K(s, x).$$

因此，固有型式 $\varphi(x)$ ，是具有对称核的齐次积分方程的基本

① 也称“特征值”和“特征函数”。——译者

函數，而固有頻率的平方則是核 $K(x, s)$ 的固有值。

從積分方程的普遍理論可以知道，對稱核的各固有值組成離散的無限集合。按增加的次序編號，這些固有值隨其次序編號而增長到無窮大。我們將假定，每一個固有值都有一個固有型式與它對應。這些固有型式組成所謂“完全解組”。

3. 直杆固有振動型式的性質 固有型式的某些性質，不必解出方程(9.13)就可發現。

固有型式的正交性定理和表示成源形表达式之任意振動型式可按固有型式展開的定理，這兩個定理所表示的性質是振動理論中特別重要的兩種性質。這些定理是有限自由度系統固有型式的已知性質對無限自由度系統的推廣。

固有型式的正交性定理 我們用 $\varphi_i(x)$ 來表示與固有頻率 p_i 相對應的固有型式；用 $\varphi_k(x)$ 表示與頻率 p_k 相對應的固有型式，因此，

$$\varphi_i(x) = p_i^2 \int_0^l K(x, s) \varphi_i(s) ds,$$

$$\varphi_k(x) = p_k^2 \int_0^l K(x, s) \varphi_k(s) ds.$$

把第一式乘上 $\frac{\varphi_k(x)}{p_i^2}$ ，第二式乘上 $\frac{\varphi_i(x)}{p_k^2}$ 。在 0 到 l 的範圍內對 x 積分後，將得到：

$$\frac{1}{p_i^2} \int_0^l \varphi_i(x) \varphi_k(x) dx = \iint_0^l K(x, s) \varphi_i(s) \varphi_k(x) dx ds,$$

$$\frac{1}{p_k^2} \int_0^l \varphi_i(x) \varphi_k(x) dx = \iint_0^l K(x, s) \varphi_i(x) \varphi_k(s) dx ds.$$

由於影響函數 $K(x, s)$ 的對稱性，右邊的两个二重積分彼此相等。

因而

$$\left(\frac{1}{p_i^2} - \frac{1}{p_k^2}\right) \int_0^l \varphi_i(x) \varphi_k(x) dx = 0.$$

因此, 假如 $p_i \neq p_k$, 则

$$\int_0^l \varphi_i(x) \varphi_k(x) dx = 0. \quad (9.14)$$

这个等式表示了已对称化的固有型式的正交性定理。

由于方程(9.13)是齐次的, 固有型式只能确定到任意常量因子。这个因子可以选得能使

$$\int_0^l \varphi_i^2(x) dx = 1. \quad (9.15)$$

满足上面等式的型式称标准型式^①。如果转而考察未对称化的型式 $\bar{\varphi}_i(x)$, 若注意到关系式

$$\varphi_i(x) = \bar{\varphi}_i(x) \sqrt{m(x)},$$

则对于这种型式, 正交性条件和标准性条件(或正交标准性条件)具有形式:

$$\int_0^l m(x) \bar{\varphi}_i(x) \bar{\varphi}_k(x) dx = \begin{cases} 0, & \text{当 } i \neq k, \\ 1, & \text{当 } i = k. \end{cases} \quad (9.16)$$

写成这种形式的正交性条件, 可以看作是以下事实的表达式: 固有载荷在与它正交的固有型式所确定位移上所作的功等于零。但是正交性条件还可以有别的解释。也可以把它看作是线性系统固有振动的能量守恒定律的特殊表达式, 也就是说, 把它看作是如下事实的表达式: 两个固有振动叠加所得振动的能量, 等于每个振动各自所有能量的总和。我们来考察振动杆的动能。

① 也称“归一型式”。——译者

$$T = \frac{1}{2} \int_0^l m(s) \left[\frac{\partial y(s, t)}{\partial t} \right]^2 ds. \quad (9.17)$$

當系統作第 i 階主振動時，則有

$$y_i(x, t) = \bar{\varphi}_i(x) \sin(p_i t + \alpha_i),$$

因而這個振動的動能為

$$T_i = \frac{1}{2} p_i^2 \cos^2(p_i t + \alpha_i) \int_0^l m(s) \bar{\varphi}_i^2(s) ds.$$

第 i 階主振動的極大動能為

$$T_{i, \max} = \frac{1}{2} p_i^2 \int_0^l m(s) \bar{\varphi}_i^2(s) ds. \quad (9.18)$$

在第 i 階振動上，疊加以第 k 階主振動：

$$y_k(x, t) = \bar{\varphi}_k(x) \sin(p_k t + \alpha_k),$$

其動能為

$$T_k = \frac{1}{2} p_k^2 \cos^2(p_k t + \alpha_k) \int_0^l m(s) \bar{\varphi}_k^2(s) ds.$$

這時，合成振動

$$y(x, t) = \bar{\varphi}_i(x) \sin(p_i t + \alpha_i) + \bar{\varphi}_k(x) \sin(p_k t + \alpha_k),$$

將具有動能

$$\begin{aligned} T = & \frac{1}{2} \int_0^l m(s) [p_i^2 \bar{\varphi}_i^2(s) \cos^2(p_i t + \alpha_i) + p_k^2 \bar{\varphi}_k^2(s) \cos^2(p_k t + \alpha_k) + \\ & + 2p_i p_k \bar{\varphi}_i(s) \bar{\varphi}_k(s) \cos(p_i t + \alpha_i) \cos(p_k t + \alpha_k)] ds, \end{aligned}$$

或

$$T = T_i + T_k + p_i p_k \cos(p_i t + \alpha_i) \cos(p_k t + \alpha_k) \int_0^l m(s) \bar{\varphi}_i(s) \bar{\varphi}_k(s) ds.$$

只有在條件