高等学校教学用书

振动理論

ZHENDONG LILUN

下册

И. М. 巴巴科夫著

蔡承文 等譯

人民教育出版社

高等学校教学用书

振 动 理 論

ZHENDONG LILUN

下 册

И. М. 巴巴科夫著
蔡 承 文 等譯

人 民 教 育 出 版 社

本书系按苏联技术理論书籍出版社(Гостехиздат)出版的И. М. 巴巴科夫(И. М. Бабаков)著"振动理論"(Теория колебаний)一书1958年版譯出的。原书經苏联高等教育部审定为高等工业学校用教学参考书。

中譯本分为上下两册。下册内容包括原书的中篇"无限多自由度的線性系統"及下篇"运动稳定性和非線性振动"。

本册由浙江大学力学教研組蔡承文等翻譯，分工如下：第九章——王行新，第十章——吳爱莲，第十一章——黄純明，第十二章——洪嘉智，第十三章——庄表中，第十四、十七章——蔡承文，第十五章——胡琦，第十六章——贾学博；并由蔡承文負責校訂。

在本册付印前，曾請北京大学丁中一和黄琳同志將著者及譯者所編的原书勘誤表对照原书内容进行校核，最后再由譯者在譯稿上作了相应的訂正。

振 动 理 論

下 册

И. М. 巴巴科夫著

蔡承文 等譯

北京市书刊出版业营业許可証出字第2号

人民教育出版社出版(北京景山东街)

民 族 印 刷 厂 印 装

新华书店北京发行所发行

各 地 新 华 书 店 經 售

統一书号K13010·1088 开本850×1168 1/32 印张 $13\frac{14}{16}$

字数340,000 印数0001—4,000 定价(6)¥1.30

1963年3月第1版 1963年3月北京第1次印刷

下册目录

中篇　无限多自由度的綫性系統

下篇 运动稳定性和非綫性振动

中篇　无限多自由度的綫性系統

第九章　弹性杆微振动的普遍性質

1. 綫性叠加原理和直杆微振动的积分方程　直杆在其彈性稳定平衡位置附近作微小的縱向振动、扭轉振动或横向振动时，是一种最簡单的无限多自由度系統。通常假設，在平衡状态下，这种系統的横截面重心处在同一直綫(系統的"軸綫")上，并假設系統的单位长度質量、剛度或柔度以及外載荷的密度，都是一个坐标 x 的連續函数或分段連續函数。x 是从軸綫上选定的原点算起的距离。同时假設杆的横截面在以后将考察的一切变形下，仍保持为平面[①]，并且軸綫上各点或杆上对应于这些点的各横截面，因振动时的外載荷作用于杆上而产生的位移，由坐标 x 和时間 t 这两个变量的一个函数 $y(x, t)$ 的値单值地确定。

根据杆的变形形式不同，这个函数表示不同的量。当杆作縱向振动时，这个函数表示杆截面的縱向位移；当杆作扭轉振动时，表示轉角；最后，当杆作横向振动时，則表示截面重心的横向位移。可見，横向振动是假設在同一平面內发生的。

最后，因为只限于考察所謂微振动，我們将認为，振动时发生的恢复力不会超出比例极限，所以，确定直杆变形的量是恢复力的綫性函数。

这种振动称为綫性振动，而作綫性振动的系統称为綫性系統。

可以依据作用于系統的广义力，而作出系統变形的所謂源形

① 在扭轉振动的情况下，只有对于圓截面杆才是正确的。

表达式，这是綫性系統的最重要性質。这个性質是建立綫性振动普遍理論的出发点。

为了說明这种表达式的意义，首先考察系統受密度为 $q(x)$ 的分布載荷而产生的靜力变形 $y(x)$（例如，因杆的自重而产生的靜力撓度）。設有单位广义力作用在杆上横坐标为 s 的一点上，則横坐标为 x 的截面将产生一定的位移。我們用 $\bar{K}(x,s)$ 来表示这个位移①。$\bar{K}(x,s)$ 是坐标 x 和 s 的函数，这函数沿杆的全长 l 都是一定的，在区域 $0\leqslant x\leqslant l$、$0\leqslant s\leqslant l$ 内是有限的并且連續的。此外，它还具有为了証明以后必須对它实行的运算为合理所需的一切性質。这个函数是我們在有限多个自由度換用系統的振动理論中遇到过的影响系数的推广，因而称为杆的影响函数。

像影响系数一样，函数 $\bar{K}(x,s)$ 对于坐标 x 和 s 具有对称性質：

$$\bar{K}(x,s)=\bar{K}(s,x). \tag{9.1}$$

这是位移互易定律的表达式。根据位移互易定律，因截面 s 上作用有单位力而使截面 x 产生的位移，等于因截面 x 上作用着单位力而使截面 s 产生的位移。其他某些与彈性系統的綫性变形有关的量，也具有这种互易性②。

利用影响函数 $\bar{K}(x,s)$，因密度为 $q(s)$ 的載荷而引起在点 x 的靜力位移 $y(x)$，可以表示成如下积分表达式：

$$y(x)=\int_0^l \bar{K}(x,s)q(s)ds. \tag{9.2}$$

函数 $y(x)$ 的这种表达式，就称为源形表达式。

变形的源形表达式(9.2)，是彈性系統变形的綫性叠加原理的

① 这里和以后，位移可以表示杆的撓度、縱向位移或轉角。

② Стретт Дж. (Лорд Рэлей), Теория звука (声的理論), 卷1, Гостехиздат, 1955。

表达式之一。根据綫性叠加原理，因分布載荷而在点 s 产生的位移，可以当作因載荷

$$q(s)ds$$

作用在杆的元素 ds 上而产生的微分位移的綫性和。从这个观点来看，方程(9.2)是胡克定律对无限多自由度系統的推广。对于有限多 n 自由度系統，公式(2.14)是胡克定律的表达式:

$$y_i=\sum_{k=1}^{n}\alpha_{ik}P_k \quad (i=1,2,\cdots\cdots,n),$$

式中 P_k 是集中力，α_{ik} 是靜力影响系数。这样看来，綫性叠加原理和变形 $y(x)$ 表作源形表达式的可能性，乃是方程(9.2)所描写綫性系統的同一基本性质的两个等效的說法。因而，在綫性变形的范圍內，彈性系統影响函数的存在，与系統的由綫性叠加原理表示的基本性质有不可分割的联系。

假如，除了分布載荷以外，还有集中力 $P_i(i=1,2,\cdots k)$ 作用在杆的某些截面 $x_i(i=1,2,\cdots\cdots,k)$ 上，那末在任意点 x 的变形将表示为和式:

$$y(x)=\int_0^l \bar{K}(x,s)q(s)ds+\sum_{i=1}^{k}P_i\bar{K}(x,x_i). \qquad (9.3)$$

利用达朗伯原理，便可从方程(9.2)和(9.3)得到直杆微振动的积分方程。設有与时間有关的載荷作用在杆上，我們用 $q(s,t)$ 来表示載荷的密度。在此情况下，杆的任意截面 x 上的变形，也将与时間有关，因而，将由某个两变量的函数 $y(x,t)$ 来确定。假如在載荷 $q(s,t)$ 之外，再附加杆的微段质量的慣性力或慣性力矩，那末，根据达朗伯原理，可以把这种变形看作是靜力变形。如果 $m(s)$ 是杆的单位长度的质量或轉动慣量，那末在杆上某点 s 的长度元素 ds 的慣性力将等于

$$-m(s)\frac{\partial^2 y(s,t)}{\partial t^2}ds.$$

假如在方程(9.2)中，把 $q(s)ds$ 换成

$$\left[q(s,t)-m(s)\frac{\partial^2 y(s,t)}{\partial t^2}\right]ds,$$

并把 $y(x)$ 写成 $y(x,t)$，我們将得到杆的振动方程：

$$y(x,t)=-\int_0^l \bar{K}(x,s)\frac{\partial^2 y(s,t)}{\partial t^2}m(s)ds+$$

$$+\int_0^l \bar{K}(x,s)q(s,t)ds. \qquad (9.4)$$

直杆微振动的积分方程(准确地說是积分-微分方程)就是这样。

当沒有外載荷时，也即 $q(s,t)\equiv 0$ 时，系統作自由振动。从(9.4)式可以看出，如下方程就是自由振动的积分方程：

$$y(x,t)=-\int_0^l \bar{K}(x,s)\frac{\partial^2 y(s,t)}{\partial t^2}m(s)ds. \qquad (9.5)$$

不論杆的振动是什么类型(縱向振动、扭轉振动和横向振动)，在杆的任何固定条件下，所得方程(9.5)以及方程(9.4)都具有相同的形式。这一事实就是这两个方程的最美妙的性質之一。对于不同类型振动和不同固定条件，只有影响函数 $\bar{K}(x,s)$ 将具有不同解析表达式。在最簡单情况下，这些解析表达式可以根据材料力学公式列出。方程(9.5)的形式不随振动类型的不同和固定条件(或边界条件)的不同而变，这一事实表示出綫性系統微振动的物理本質有其統一性。这种統一性决定了綫性系統中存在着普遍的性質，并且証实了建立綫性系統振动的普遍理論是可能而且适宜的。这种普遍理論中，与用方程(9.5)或(9.4)来描写振动密切相关的許多原理，可以作为具有对称核的积分方程的数学理論中一些著名定理的說明。这样看来，这部分积分方程理論特别适合于

闡明在不同类型振动中所具有的共同性质。此外还应指出，如果注意一下用积分方程法进行計算的可能性，那末这种方法的实用价值是不大的。在这方面，积分方程法要比微分方程法差得多。

2. 直杆的自由振动 直杆的自由振动积分方程

$$y(x,t)=-\int_0^l \bar{K}(x,s)m(s)\frac{\partial^2 y(s,t)}{\partial t^2}ds, \qquad (9.6)$$

可以看作是有 n 个未知量的一組 n 个綫性微分方程、在n无限增加时的极限情况。假如把积分区間$(0,l)$分成 n 段，用 n 项有限和代替积分式，并認为对于与区間分点相对应的 n 个离散值 x 来説，等式(9.6)能精确地滿足，那末我們就会得到这样的方程組。我們用 $y_i(i=1,2,\cdots,n)$来表示函数 $y(x,t)$在这些分点上的值，并用 α_{ik} 和 m_k 来表示函数 $\bar{K}(x,s)$ 和 $m(s)$ 的对应值，經上述置换后，将有：

$$y_i=-\sum_{k=1}^{n}\alpha_{ik}m_k\ddot{y}_k \quad (i=1,2,\cdots,n). \qquad (9.7)$$

方程組(9.7)与方程組(2.42)沒有不同。那时，方程組(2.42)是对于有 n 个集中质量的换用軸的横向振动而列出的。当 n 趋向于无穷大，而分割杆所得的各段趋向于零时，y_i 的离散和变成連續和，而方程(9.7)就变成方程(9.6)。这样看来，方程(9.6)相当于描写无限多自由度系統微振动的一組无限个綫性方程。积分方程(9.6)的这种理解，就是建立积分方程解的著名弗列德霍姆法，或无限行列式法[①] 的基础。也可以利用它来发現連續系統微振动的

[①] Виарда Г., Интегральные уравнения(积分方程), 1933, 第5章(关于积分方程的理論也可参閱：斯米尔諾夫，高等数学教程，第4卷，第1分册，陈傳璋譯，高等教育出版社，1958，第1章；彼得罗夫斯基，积分方程論講义，胡祖熾譯，高等教育出版社，1954；米哈林，积分方程及其应用，陈傳璋、卢鶴紱譯，商务印书館，1955。——譯者)。

某些性質，只要用极限过程的方法，把有限多自由度系統振动的已知性質推广到連續系統就行了①。

大家知道，n 自由度綫性系統的方程(9.7)的最簡单周期解，具有形式

$$y_{si}=u_{si}\sin(p_s t+\alpha_s), \tag{9.8}$$

式中 $u_{si}(i=1,2,\cdots,n)$ 是各集中質量的振幅偏移的集合（第 s 阶振动型式），而 p_s 是系統的第 s 阶固有頻率。解(9.8)对应于系統的一个主振动，也就是第 s 阶主振动，同时，主振动的数目，以及系統的固有頻率数目，至少在像以前所考察的那种非奇异情况下，等于系統的自由度数目。

遵循积分方程 (9.6) 与綫性方程組 (9.7) 之間的上述类比关系，我們将寻求方程(9.6)的如下形式的最簡单周期解：

$$y(x,t)=\bar{\varphi}(x)\sin(pt+\alpha). \tag{9.9}$$

这里 $\bar{\varphi}(x)$ 确定了杆軸綫上各点离开共平衡位置的振幅偏移（或杆截面的位移）的連續集合。因此，把函数 $\bar{\varphi}(x)$ 称为杆的振幅函数或振动型式。在离散系統中，振幅函数簡并成集中質量的 n 个振幅偏移的有限集合。

把 (9.9) 式代入方程 (9.6) 后，我們将得到振动型式的积分方程

$$\bar{\varphi}(x)=p^2\int_0^l \bar{K}(x,s)m(s)\bar{\varphi}(s)ds. \tag{9.10}$$

从积分方程理論可以知道，并非对于任意 p^2 值，齐次方程(9.10)都能有非平凡解。非零解 $\bar{\varphi}(x)$ 能存在的那些 p^2 值称为函数 $\bar{K}(x,s)m(s)$ 的固有值，而固有値的平方根就是所考察系統的固

① 拉格朗日所建立的弦綫振动方程的推导，就是根据这种极限过程。参閱：Лагранж, Аналитическая механика(分析力学), 卷 1, 第 6 篇, § IV, Гостехиздат, 1950。

有振动频率。我們将把对应于固有频率的函数 $\bar{\varphi}(x)$，称为系統的固有振动型式。因此，方程 (9.6) 的形如 (9.9) 的周期解，由积分方程(9.10)的固有值和固有函数[①]来确定。

把方程(9.10)重写成如下形式:

$$\bar{\varphi}(x)=\int_0^l \bar{K}(x,s)p^2m(s)\bar{\varphi}(s)ds,$$

并把它与杆因受分布載荷 $q(s)$而产生的静力变形方程

$$y(x)=\int_0^l \bar{K}(x,s)q(s)ds \tag{9.11}$$

作比較，我們就可断定，可以将固有型式 $\bar{\varphi}(x)$看作是杆因受載荷

$$p^2m(s)\bar{\varphi}(s)$$

而产生的静力变形型式。我們将把这种載荷称为固有載荷。

利用代換

$$\varphi(x)=\bar{\varphi}(x)\sqrt{m(x)}, \tag{9.12}$$

就容易使具有不对称核

$$\bar{K}(x,s)m(s)$$

的方程(9.11)对称化，也就是說，把它轉換成具有对称核的方程。事实上，若将(9.12)式代入方程(9.11)，并假定

$$K(x,s)=\bar{K}(x,s)\sqrt{m(x)m(s)},$$

我們就会得到:

$$\varphi(x)=p^2\int_0^l K(x,s)\varphi(s)ds, \tag{9.13}$$

現在式中

$$K(x,s)=K(s,x).$$

因此，固有型式 $\varphi(x)$，是具有对称核的齐次积分方程的基本

---

① 也称“特征值”和“特征函数”。——譯者

函数，而固有频率的平方则是核 $K(x, s)$ 的固有值。

从积分方程的普遍理論可以知道，对称核的各固有值組成离散的无限集合。按增加的次序編号，这些固有值随其次序編号而增长到无穷大。我們将假定，每一个固有值都有一个固有型式与它对应。这些固有型式組成所謂"完全解組"。

3. 直杆固有振动型式的性質 固有型式的某些性質，不必解出方程(9.13)就可发現。

固有型式的正交性定理和表示成源形表达式之任意振动型式可按固有型式展开的定理，这两个定理所表示的性质是振动理論中特别重要的两种性质。这些定理是有限自由度系統固有型式的已知性質对无限自由度系統的推广。

固有型式的正交性定理 我們用 $\varphi_i(x)$ 来表示与固有頻率 p_i 相对应的固有型式；用 $\varphi_k(x)$ 表示与頻率 p_k 相对应的固有型式，因此，

$$\varphi_i(x)=p_i^2\int_0^l K(x, s)\varphi_i(s)ds,$$

$$\varphi_k(x)=p_k^2\int_0^l K(x, s)\varphi_k(s)ds.$$

把第一式乘上 $\dfrac{\varphi_k(x)}{p_i^2}$，第二式乘上 $\dfrac{\varphi_i(x)}{p_k^2}$。在 0 到 l 的范圍內对 x 积分后，将得到：

$$\frac{1}{p_i^2}\int_0^l \varphi_i(x)\varphi_k(x)dx=\int_0^l\int_0^l K(x, s)\varphi_i(s)\varphi_k(x)dxds,$$

$$\frac{1}{p_k^2}\int_0^l \varphi_i(x)\varphi_k(x)dx=\int_0^l\int_0^l K(x, s)\varphi_i(x)\varphi_k(s)dxds.$$

由于影响函数 $K(x, s)$ 的对称性，右边的两个二重积分彼此相等。

因而

$$\left(\frac{1}{p_i^2}-\frac{1}{p_k^2}\right)\int_0^l \varphi_i(x)\varphi_k(x)dx=0.$$

因此，假如 $p_i \neq p_k$，則

$$\int_0^l \varphi_i(x)\varphi_k(x)dx=0. \tag{9.14}$$

这个等式表示了已对称化的固有型式的正交性定理。

由于方程(9.13)是齐次的，固有型式只能确定到任意常量因子。这个因子可以选得能使

$$\int_0^l \varphi_i^2(x)dx=1. \tag{9.15}$$

满足上面等式的型式称标准型式[1]。如果轉而考察未对称化的型式 $\bar{\varphi}_i(x)$，若注意到关系式

$$\varphi_i(x)=\bar{\varphi}_i(x)\sqrt{m(x)},$$

則对于这种型式，正交性条件和标准性条件(或正交标准性条件)具有形式：

$$\int_0^l m(x)\bar{\varphi}_i(x)\bar{\varphi}_k(x)dx=\begin{cases}0, \text{当 } i\neq k,\\ 1, \text{当 } i=k.\end{cases} \tag{9.16}$$

写成这种形式的正交性条件，可以看作是以下事实的表达式：固有載荷在与它正交的固有型式所确定位移上所作的功等于零。但是正交性条件还可以有別的解釋。也可以把它看作是綫性系統固有振动的能量守恒定律的特殊表达式，也就是說、把它看作是如下事实的表达式：两个固有振动叠加所得振动的能量，等于每个振动各自所有能量的总和。我們来考察振动杆的动能。

---

[1] 也称"规一型式"。——譯者

$$T=\frac{1}{2}\int_0^l m(s)\left[\frac{\partial y(s,t)}{\partial t}\right]^2 ds. \tag{9.17}$$

当系統作第 i 阶主振动时，则有

$$y_i(x,t)=\bar{\varphi}_i(x)\sin(p_i t+\alpha_i),$$

因而这个振动的动能为

$$T_i=\frac{1}{2}p_i^2\cos^2(p_i t+\alpha_i)\int_0^l m(s)\bar{\varphi}_i^2(s)ds.$$

第 i 阶主振动的极大动能为

$$T_{i\max}=\frac{1}{2}p_i^2\int_0^l m(s)\bar{\varphi}_i^2(s)ds. \tag{9.18}$$

在第 i 阶振动上，叠加以第 k 阶主振动：

$$y_k(x,t)=\bar{\varphi}_k(x)\sin(p_k t+\alpha_k),$$

其动能为

$$T_k=\frac{1}{2}p_k^2\cos^2(p_k t+\alpha_k)\int_0^l m(s)\bar{\varphi}_k^2(s)ds.$$

这时，合成振动

$$y(x,t)=\bar{\varphi}_i(x)\sin(p_i t+\alpha_i)+\bar{\varphi}_k(x)\sin(p_k t+\alpha_k),$$

将具有动能

$$T=\frac{1}{2}\int_0^l m(s)[p_i^2\bar{\varphi}_i^2(s)\cos^2(p_i t+\alpha_i)+p_k^2\bar{\varphi}_k^2(s)\cos^2(p_k t+\alpha_k)+$$
$$+2p_ip_k\bar{\varphi}_i(s)\bar{\varphi}_k(s)\cos(p_i t+\alpha_i)\cos(p_k t+\alpha_k)]ds,$$

或

$$T=T_i+T_k+p_ip_k\cos(p_i t+\alpha_i)\cos(p_k t+\alpha_k)\int_0^l m(s)\bar{\varphi}_i(s)\bar{\varphi}_k(s)ds.$$

只有在条件