椭圆型方程新解法

〔苏联〕И. Н. 维库阿 著

侯 宗 义 译

陈 传 璋 校

上海科学技术出版社

椭圓型方程新解法

〔苏联〕И. Н. 維庫阿 著

侯 宗 义 譯

陈 傳 璋 校

上海科学技术出版社

內 容 提 要

本书內容是应用复变数函数理論研究带有两个自变量的解析系数的綫性椭圓型偏微分方程。內容包括：以单个复变量的解析函数給出表示的二阶椭圓型微分方程的所有正規解的表达公式，解的逼近和展开为級数的問題，边值問題，方程組的求积問題和解的一般表达式，高阶方程的研究和应用以及总結以上的結果給出了在彈性理論中的应用。附录給出借助 Green 函数表示的方程的解的表达式。

本书可作为綜合大学数学专业师生的教学参考书，也可供物理、力学系师生以及工程和研究单位的研究人員参考。

НОВЫЕ МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ
ЭЛЛИПТИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ
И. Н. Векуа
Огиз • Гостехиздат • 1948

椭圓型方程新解法

侯宗义 譯 陈傳璋 校

上海科学技术出版社出版（上海瑞金二路 450 号）
上海市书刊出版业营业许可証出 093 号

商务印书館上海厂印刷 新华书店上海发行所发行

开本 850×1168 1/32 印張 10 24/32 插版字数 262,000
1963 年12月第 1 版 1963 年12月第 1 次印刷 印数 1—3,500

統一书号 13119·543 定价（十四）1.80 元

在第四章里研究了一定形式的二阶椭圓型微分方程組的求积問題和导出了其解的一般表达式，借助于这个一般表达式研究了边值問題。

第五章致力于一类特殊的高于二阶的微分方程的研究，它在应用观点上非常重要，因为許多数学物理問題，例如彈性薄板理論和薄壳理論，就化为我們所要研究的这类方程。在这里引进了以复变量的解析函数表示的上面所提到的一类微分方程的所有正規解的一般表达公式，利用这些表达式証明了解的各种性质。特別是，可应用这些公式去研究边值問題。

最后，在第六章給出了上述各章的結果到彈性理論上的某些应用。这里考虑了彈性柱体的平面稳定的振动方程，薄板的弯曲和稳定性方程，球形薄壳和彈性扁壳方程并且导出了它們的解以复变量的解析函数表示的一般表达式。借助于所得到的一般公式，解决了对单連通区域在柱体的平面振动情形下的主要边值問題；也解决了具有固定边緣的球形段的边值問題。

目　　录

第三章　边值問題

第四章　二阶椭圓型微分方程組的解的一般表达式及其应用

第五章　一类高阶椭圓型微分方程的解的一般表达式及其应用

第六章 在彈性理論中的应用

第一章

具有两个自变量的二阶綫性椭圆型微分方程的解的一般表达式

在这一章里导出了形如

$$E(u)=\Delta u+a(x, y)\frac{\partial u}{\partial x}+b(x, y)\frac{\partial u}{\partial y}+c(x, y)u=f(x, y)$$

的方程的解以单个复变量的全純函数表示的一般表达式，这里 $\Delta=\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}$ 是 Laplace 算子，a, b, c, f 都是变量 x, y 的在平面 oxy 的某一区域 $\mathfrak{T}$ 内給定的解析函数。在前三节中我們叙述对今后有輔助作用的材料。

§1 某些基本概念、术語和記号

在这一节，我們給出在后面常要利用到的某些基本概念、术語和記号的解释。

1° 我們称有次序的数 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 的全体为点 $(x_1, x_2, \cdots, x_n)$. 这些数一般能取为复値，称为点的坐标。点常用一个字母表示。

滿足条件

$$|x_1-x_1^0|<\rho,\ |x_2-x_2^0|<\rho,\ \cdots,\ |x_n-x_n^0|<\rho \tag{1.1}$$

的点 $(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ 的集合称为点 $(x_1^0, x_2^0, \cdots, x_n^0)$ 的 ρ-邻域，这里 $(x_1^0, x_2^0, \cdots, x_n^0)$ 是某个固定的点，而 ρ 是某个正数。

称这样的点为集合 $\mathfrak{M}$ 的极限点，它的任何 ρ-邻域含有集合 $\mathfrak{M}$ 的无穷点集。我們以 $\mathfrak{M}'$ 表示集合 $\mathfrak{M}$ 的极限点集。集合 $\mathfrak{M}+\mathfrak{M}'$

称为集合 $\mathfrak{M}$ 的閉包。如果 $\mathfrak{M}'\subset\mathfrak{M}$，則集合 $\mathfrak{M}$ 称为閉的，而如果 $\mathfrak{M}'\supset\mathfrak{M}$，則 $\mathfrak{M}$ 称为自身稠密的。同时是閉的和自身稠密的集合称为完备的。

閉集称为連通的，如果不能把它分解为两个沒有公共点的非空閉集合。閉的連通集称为連續統。特別是，一个点是連續統。如果連續統含有的点多于一个，則它是完备的連通集合。

称集合的这样的点为它的內点，对于这点存在着整个由原先給定的集合的点所組成的 ρ-邻域。

称这样的点为集合的外点，它具有不包含原先給定集合的任何一个点的 ρ-邻域。

既不是原先給定的集合的內点，又不是它的外点的点称为这个集合的边界点。集合的边界点的全体称为它的边界。不难証明，边界是閉集合。

点集合 $\mathfrak{M}$ 称为开的，如果它的每一点都是內点。

开集合称为連通的，如果它不能表为两个不相交的开集的和的形式。連通的开集称为区域。

显然，任意一点的任何 ρ-邻域是区域。点 $(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ 当变量 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 彼此独立地分别在复平面区域 $T_1, T_2, \cdots, T_n$ 內变化时的集合也是区域。这样的区域称为柱域且通常記为 $(T_1, T_2, \cdots, T_n)$. 例如，点$(x_1^0, x_2^0, \cdots, x_n^0)$的 ρ-邻域是柱域；这时 T_k 是圓

$$|x_k-x_k^0|<\rho \quad (k=1, 2, \cdots, n). \tag{1.2}$$

平面，附加无穷远点后称为全平面。借助于测地投影可把全平面相互单値和保角地映射到单位球面上。

2°　假設在点 $(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ 的集合 $\mathfrak{M}$ 上給定某个函数 $f(x_1, x_2, \cdots, x_n)$. 我們說函数 f 在 $\mathfrak{M}$ 上满足 Hölder 条件，如果对于集合 $\mathfrak{M}$ 的任意两点 $(x_1, x_2, \cdots, x_n)$，$(x_1', x_2', \cdots, x_n')$，成立着不等式：

$$|f(x_1', x_2', \cdots, x_n') - f(x_1, x_2, \cdots, x_n)| < K\sum_{k=1}^{n}|x_k' - x_k|^\alpha, \tag{1.3}$$

其中 K 和 α 都是正的常数，$0<\alpha\leqslant 1$，它們不依賴于点$(x_1', \cdots, x_n')$, $(x_1, \cdots, x_n)$的选擇。

满足条件(1.3)的函数显然是 $\mathfrak{M}$ 上的連續函数。我們也称这样的函数为在 $\mathfrak{M}$ 上 Hölder 意义下的連續函数。在后面我們所需要用到的这样函数的性质，在 Н. И. Мусхелишвили 院士的书[1]（参閱第一章）中已有叙述。

3° 設 L 是簡单的（閉的或截断的）平面曲綫，由方程

$$x=x(s), \quad y=y(s) \quad (0\leqslant s\leqslant l) \tag{1.4}$$

給定，这里 $x(s)$, $y(s)$ 都是連續函数，并且如果

$$0<|s_1-s_2|<l, \quad 0\leqslant s_1\leqslant l, \quad 0\leqslant s_2\leqslant l,$$

有 $x(s_1)+iy(s_1)\neq x(s_2)+iy(s_2)$.

此外，在閉曲綫的情形下，有：$x(s+l)=x(s)$, $y(s+l)=y(s)$.

如果函数 $x(s)$和 $y(s)$在区間$[0, l]$上有不同时为零的連續导数$x'(s)$和$y'(s)$，則曲綫 L 称为光滑的。如果 L 是簡单的光滑曲綫，則由 L 在点$(x(s), y(s))$的切綫和任意固定的方向所組成的角 $\theta(s)$ 是在区間$[0, l]$上的連續函数。如果 $x'(s)$ 和 $y'(s)$ 在区間$[0, l]$ 上是 Hölder 意义下連續的，則 $\theta(s)$ 在 L 上也是在 Hölder 意义下連續的。今后称这样的曲綫为在 Hölder 意义下的光滑曲綫。

在后面我們也要利用到术語"分段光滑曲綫"和"分段 Hölder 意义下光滑的曲綫"，它們的意义是明显的，无庸說明。

4° 設 T 是平面区域，它至全平面的补集由 $m+1$ 个互不相交的連續統 $C_0, C_1, \cdots, C_m$ 組成，并且 C_0 含有无穷远点，而 $C_1, \cdots, C_m$ 都是有界集合；特別，C_0 可能仅由一个无穷远点构成；也可能 $C_1, \cdots, C_m$ 中的若干个或者它們的全部都只含有一个点。我們称这样的区域为 $(m+1)$-連通区域。当 $m=0$ 时，区域 T 称为单

連通的，而当 $m>0$ 时，称为多連通的。

設 $L_0, L_1, \cdots, L_m$ 相应地是 $C_0, C_1, \cdots, C_m$ 的边界。那末，集合 $L=L_0+L_1+\cdots+L_m$ 是区域 T 的边界。

如果 $L_0, L_1, \cdots, L_m$ 都是簡单的光滑曲綫，則区域 T 称为类 A 的区域，而如果 $L_0, L_1, \cdots, L_m$ 都是在 Hölder 意义下的簡单光滑曲綫，則区域 T 称为类 Ah 的区域。

5° 变量 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 的函数 $f(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ 在点 $(x_1^0, x_2^0, \cdots, x_n^0)$ 处称为解析的，如果存在着此点的这样的 ρ-邻域，在它的內部成立着展开式

$$f(x_1, \cdots, x_n)=\sum_{k_1, \cdots, k_n=0}^{\infty} a_{k_1\cdots k_n}(x_1-x_1^0)^{k_1}\cdots(x_n-x_n^0)^{k_n}, \quad (1.5)$$

其中 $a_{k_1\cdots k_n}$ 都是常数。不难証明，这个級数在所指出的邻域的內部是絕对和一致收斂的❶，并且

$$a_{k_1\cdots k_n}=\frac{1}{k_1!\cdots k_n!}\left(\frac{\partial^{k_1+\cdots+k_n} f(x_1, \cdots, x_n)}{\partial x_1^{k_1}\cdots\partial x_n^{k_n}}\right)_{\substack{x_1=x_1^0\\ \cdots\cdots\\ x_n=x_n^0}}, \quad (1.6)$$

即 (1.5) 是函数 $f(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ 的 Taylor 級数。

如果函数 $f(x_1, \cdots, x_n)$ 在集合 $\mathfrak{M}$ 的任何点处是解析的，則說，它在这个集合 $\mathfrak{M}$ 上是解析的。

設 $f(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ 是实变量 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 的在 n 維空間的某个区域 D 內的解析函数。那末，存在着唯一的复变量 $z_1=x_1+iy_1, \cdots, z_n=x_n+iy_n$ 的函数 $f^*(z_1, \cdots, z_n)$，它在 $2n$ 維空間的某个区域 D^* 內是解析的，当 $y_1=y_2=\cdots=y_n=0$ 时与 $f(x_1, \cdots, x_n)$ 相重合，并且，显然 $D\subset D^*$. 称函数 $f^*(z_1,\cdots,z_n)$ 为函数 $f(x_1,\cdots,x_n)$ 的从变元 $x_1,\cdots, x_n$ 的实值区域到它們的复值区域內的解析延拓。

我們这里不引进它的証明，这种情况允許实变量的解析函数的变元也具有复值。当然，这些复变元有确定的变化区域，它們依

❶ 当我們說級数在区域內部是一致收斂的，这意味着，此級数在这区域的每个閉子区域上是一致收斂的。

賴于所給定的函数的性质；一般，这些复变元的虚部应該是充分小的。但如果函数 $f(x_1, \cdots, x_n)$ 是这样的，它的 Taylor 級数对变元的所有实值收斂，則这时能賦予它的变元以任意的复值。我們称这样的函数为**整函数**。

6° 設 T 是复变量 z 平面內的区域。今后以 $\overline{T}$ 表示区域 T 关于实軸的鏡面映射。如果 T 对于这軸是对称的，則显然 T 和 $\overline{T}$ 重合。

設变量 z 在 T 內变化。那末，共軛变量 $\bar{z}$ 就在 $\overline{T}$ 內变化。如果 $f(z)$ 是在 T 內的全純函数，則同它共軛的函数 $\overline{f(z)}$ 显然是 $\bar{z}$ 的在 $\overline{T}$ 內的全純函数。

§2 标准形式的二阶綫性椭圓型微分方程 化为规范形式

1° 众所周知，两个自变量的二阶綫性椭圓型微分方程总能化为下列的所謂**标准形式**：

$$E(u) = \Delta u + a(x, y)\frac{\partial u}{\partial x} + b(x, y)\frac{\partial u}{\partial y} + c(x, y)u$$
$$= f(x, y), \tag{E}$$

其中 Δ 是 Laplace 算子：$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$，微分方程 (E) 的系数 a, b, c 和自由項 f 都是变量 x, y 的已給函数；$u(x, y)$ 是未知函数，它称为方程 (E) 的**解**。

今后我們将假設，方程 (E) 的系数 a, b, c 和自由項 f 都是在平面 $z = x + iy$ 的某一区域 $\mathfrak{T}$ 內的解析函数。我們称区域 $\mathfrak{T}$ 是方程 (E) 的給定区域。

当 $f(x, y) = 0$ 时，方程 (E) 称为**齐次的**且記为 (E_0).

設 T 是属于 $\mathfrak{T}$ 的某个区域。如果函数 $u(x, y)$ 在区域 T 內有連續的一阶和二阶偏导数且滿足方程 (E)，則我們称它为这个方程的**正規解**。如果方程 (E) 的解 $u(x, y)$ 是在区域 T 內的解析函数，則我們称它为**解析解**。

方程 (E) 的解 $u(x, y)$，它的系数 a, b, c 和自由項 f 一般都是实变元 x, y 的复函数。当 $u(x, y)$ 連同函数 a, b, c 对实变元 x, y 取实值的这种情形，我們总是特别声明的，并且在这种情形，我們称 $u(x, y)$ 是方程的**实解**。

除了方程(E)以外，也考察下列的方程：

$$E^*(v)=\Delta v-\frac{\partial av}{\partial x}-\frac{\partial bv}{\partial y}+cv=f^*, \qquad (E^*)$$

其中 f^* 是某个解析函数。方程 (E^*) 称为与(E)**共軛的**方程。显然，方程 (E) 和 (E^*) 的給定区域是重合的；此外，也明显地，方程 (E)也是和(E^*)共軛的。

2° 現在在研究中引进下面的变量：

$$z=x+iy, \quad \zeta=x-iy, \qquad (2.1)$$

它們显然仅当 x, y 是实值时取共軛值。在这种情形，有时将写 $\bar{z}$ 以代替 ζ. 如果变量 x, y 取独立的复値，則 z, ζ 也取独立的复値。从(2.1)，我們有

$$x=\frac{1}{2}(z+\zeta), \quad y=\frac{1}{2i}(z-\zeta). \qquad (2.2)$$

設 $f(x, y)$ 是变量 x, y 的某个解析函数。如果我們把这个函数解析延拓到变量 x, y 的复値区域内，然后置換表示式 (2.2) 以代替这些变量，則我們得到两个复变量 z, ζ 的解析函数 $F(z, \zeta)$；显然，$F(z, \zeta)=f\left(\frac{z+\zeta}{2}, \frac{z-\zeta}{2i}\right)$.

現在考察微分算子

$$\frac{\partial}{\partial z}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x}-i\frac{\partial}{\partial y}\right) \text{ 和 } \frac{\partial}{\partial \zeta}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x}+i\frac{\partial}{\partial y}\right), \qquad (2.3)$$

不难看到，它們具有下列的性质：

$$\frac{\partial^p}{\partial z^p}\left(\frac{\partial^q}{\partial \zeta^q}\right)=\frac{\partial^q}{\partial \zeta^q}\left(\frac{\partial^p}{\partial z^p}\right) \quad (p, q=0, 1, 2, \cdots). \qquad (2.4)$$

因此，就唯一地确定了形如

$$\frac{\partial^{p+q}}{\partial z^p \partial \zeta^q} = \frac{1}{2^{p+q}}\left(\frac{\partial}{\partial x} - i\frac{\partial}{\partial y}\right)^p \left(\frac{\partial}{\partial x} + i\frac{\partial}{\partial y}\right)^q \quad (p,\ q=0,\ 1,\ 2,\ \cdots) \tag{2.5}$$

的算子。特别是，有

$$4\frac{\partial^2}{\partial z \partial \zeta} = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} = \Delta. \tag{2.6}$$

我們能够把算子 $\frac{\partial}{\partial z}$, $\frac{\partial}{\partial \zeta}$ 施行到任意的可微函数上。但是应該記得，一般来說，不能把 $\frac{\partial u}{\partial z}$, $\frac{\partial u}{\partial \zeta}$ 理解为 u 关于 z 和 ζ 的偏导数；它們仅当 u 是变量 z, ζ 的解析函数时才可能有上述那样的理解。

利用公式(2.2), (2.3)和(2.6)，我們能够把方程(E)写为形式

$$\begin{aligned} F(u) = \frac{\partial^2 u}{\partial z \partial \zeta} + A(z,\ \zeta)\frac{\partial u}{\partial z} + B(z,\ \zeta)\frac{\partial u}{\partial \zeta} + C(z,\ \zeta)u \\ = F(z,\ \zeta), \end{aligned} \tag{F}$$

其中

$$\left.\begin{aligned} A(z,\ \zeta) &= \frac{1}{4}\left[a\left(\frac{z+\zeta}{2},\ \frac{z-\zeta}{2i}\right) + ib\left(\frac{z+\zeta}{2},\ \frac{z-\zeta}{2i}\right)\right], \\ B(z,\ \zeta) &= \frac{1}{4}\left[a\left(\frac{z+\zeta}{2},\ \frac{z-\zeta}{2i}\right) - ib\left(\frac{z+\zeta}{2},\ \frac{z-\zeta}{2i}\right)\right], \\ C(z,\ \zeta) &= \frac{1}{4}c\left(\frac{z+\zeta}{2},\ \frac{z-\zeta}{2i}\right), \\ F(z,\ \zeta) &= \frac{1}{4}f\left(\frac{z+\zeta}{2},\ \frac{z-\zeta}{2i}\right). \end{aligned}\right\} \tag{2.7}$$

我們称方程(F)为方程(E)的**复式**。显然，方程(E)和(F)实质上彼此是沒有差异的，但我們还是对它們使用不同的記号：$E(u)$ 总是表示方程(E)的左端的算子，它是施加在 u 上对变量 x, y 的运算，而 $F(u)$ 是表示为变量 z, ζ 的同样的算子（精确到常数乘子），即是在方程(F)的左端所給定的算子。

显然，共轭方程(E*)的复式是

$$F^*(v) = \frac{\partial^2 v}{\partial z \partial \zeta} - \frac{\partial A v}{\partial z} - \frac{\partial B v}{\partial \zeta} + Cv = F^*(z,\ \zeta). \tag{F*}$$

3° 現在以 $\mathfrak{D}$ 表示属于 $\mathfrak{T}$ 的单連通区域，它具有下列的性质：$A(z, \zeta)$, $B(z, \zeta)$, $C(z, \zeta)$ 都是两个复变量 z, ζ 的在柱域 $(\mathfrak{D}, \overline{\mathfrak{D}})$ 內，即当 $z\in\mathfrak{D}$, $\zeta\in\overline{\mathfrak{D}}$ 时的解析函数。

我們称这样的区域为方程 (E) 的基本区域。显然，方程 (E) 的基本区域也是共軛方程 (E^*) 的基本区域，并且反之亦然。

不难看到，基本区域总是存在的。例如，能够取区域 $\mathfrak{T}$ 的任何点的任意充分小的 ρ–邻域作为这样的区域。特别是，如果方程 (E) 的系数 a, b, c 都是变量 x, y 的整函数，则函数 A, B, C 也是变量 z, ζ 的整函数，在这种情形下，可以取整个复 z 平面作为基本区域 $\mathfrak{D}$.

我們注意，如果 $\mathfrak{D}$ 是对于方程 (E) 的基本区域，则它的任何单連通子区域也是基本区域。

4° 現在考察齐次方程

$$F(u)=\frac{\partial^2 u}{\partial z\partial\zeta}+A(z, \zeta)\frac{\partial u}{\partial z}+B(z, \zeta)\frac{\partial u}{\partial \zeta}+C(z, \zeta)u=0 \tag{F_0}$$

并在这里代替 u 作函数变换

$$u=\Lambda u', \tag{2.8}$$

其中 Λ 是变量 z, ζ 的在柱域 $(\mathfrak{D}, \overline{\mathfrak{D}})$ 内的任意解析函数，并且 $\mathfrak{D}$ 是方程 (E_0) 的某个基本区域；此外，我們假設，在 $\mathfrak{D}$ 内 $|\Lambda|>0$. 那末对 u'，我們得到方程

$$\begin{aligned}F'(u')=\frac{\partial^2 u'}{\partial z\partial\zeta}&+A'(z, \zeta)\frac{\partial u'}{\partial z}+B'(z, \zeta)\frac{\partial u'}{\partial \zeta}\\&+C'(z, \zeta)u'=0,\end{aligned} \tag{F'_0}$$

其中

$$\left.\begin{aligned}&A'=A+\frac{\partial \lg\Lambda}{\partial\zeta},\ B'=B+\frac{\partial \lg\Lambda}{\partial z},\\&C'=C+A\frac{\partial \lg\Lambda}{\partial z}+B\frac{\partial \lg\Lambda}{\partial \zeta}+\frac{1}{\Lambda}\frac{\partial^2\Lambda}{\partial z\partial\zeta}.\end{aligned}\right\} \tag{2.9}$$

这样一来，变换 (2.8) 并不改变方程 (F_0) 的形式，但当然，这时

在新的方程中的系数是改变的，它們依賴于函数 Λ. 現在我們能够利用这个函数的任意性这样来选擇它，使得新方程的系数滿足这种或者另外的条件。

例如，我們要求使

$$A'B'-C'=0. \tag{2.10}$$

为此，必須而且只須使 Λ 是方程

$$\frac{\partial^2 \lg \Lambda}{\partial z \partial \zeta}=A(z,\ \zeta)B(z,\ \zeta)-C(z,\ \zeta) \tag{2.11}$$

的解。由此立得❶

$$\begin{aligned}\lg \Lambda = &\Phi(z)+\Psi(\zeta)\\ &-\int_{z_0}^{z}dt\int_{\zeta_0}^{\zeta}[C(t,\ \tau)-A(t,\ \tau)B(t,\ \tau)]d\tau,\end{aligned} \tag{2.12}$$

其中 z_0, ζ_0 分别是区域 $\mathfrak{D}$, $\overline{\mathfrak{D}}$ 內的固定点，而 $\Phi(z)$, $\Psi(\zeta)$ 分别是在 $\mathfrak{D}$, $\overline{\mathfrak{D}}$ 內的任意全純函数。現在选取这些函数为如下的形式：

$$\Phi'(z)=-B(z,\ \zeta_0),\quad \Psi'(\zeta)=-A(z_0,\ \zeta), \tag{2.13}$$

由于(2.12)，从(2.9)我們得到

$$\left.\begin{aligned}A'(z,\ \zeta)&=\int_{z_0}^{z}h(t,\ \zeta)dt,\\ B'(z,\ \zeta)&=\int_{\zeta_0}^{\zeta}k(z,\ \tau)d\tau,\end{aligned}\right\} \tag{2.14}$$

其中

$$\left.\begin{aligned}h(z,\ \zeta)&=\frac{\partial A(z,\ \zeta)}{\partial z}+A(z,\ \zeta)B(z,\ \zeta)-C(z,\ \zeta),\\ k(z,\ \zeta)&=\frac{\partial B(z,\ \zeta)}{\partial \zeta}+A(z,\ \zeta)B(z,\ \zeta)-C(z,\ \zeta).\end{aligned}\right\} \tag{2.15}$$

---

❶ 因为我們所考察的是单連通区域，在这个区域內的解析函数沿此区域內任意曲綫的积分显然只与这条曲綫的端点有关，而不依賴于积分的路徑(Cauchy 定理)．在多連通区域內情况就完全不是这样。在本书中始終要注意到这一点。——譯注

函数 h, k 称为方程(F)的**不变量**[1];显然,它們都是变量 z, ζ 的在柱域 $(\mathfrak{D}, \overline{\mathfrak{D}})$ 内的解析函数。

从(2.12)借助于条件(2.13),函数 Λ 被确定精确到仅是异于零的常数乘子。因之对于 Λ,我們能取表示式

$$\Lambda=\Lambda(z, \zeta, z_0, \zeta_0)=\exp\left\{-\int_{z_0}^{z} B(t, \zeta_0)\,dt-\int_{\zeta_0}^{\zeta} A(z_0, \tau)\,d\tau\right.$$
$$\left.+\int_{z_0}^{z} dt\int_{\zeta_0}^{\zeta}[A(t, \tau)B(t, \tau)-C(t, \tau)]\,d\tau\right\}. \qquad (2.16)$$

显然,$\Lambda(z, \zeta, z_0, \zeta_0)$ 是四个变量 z, ζ, z_0, ζ_0 的在柱域 $z, z_0 \in \mathfrak{D}$, $\zeta, \zeta_0 \in \overline{\mathfrak{D}}$ 内的解析函数。

这样一来,我們就导致下述的結果:

如果 Λ 由公式(2.16)給定,則借助于变換(2.8),方程(F_0)化为形式:

$$F'(u')=\frac{\partial^2 u'}{\partial z\partial\zeta}+A'(z, \zeta)\frac{\partial u'}{\partial z}+B'(z, \zeta)\frac{\partial u'}{\partial\zeta}$$
$$+A'(z, \zeta)B'(z, \zeta)u'=0, \qquad (2.17)$$

其中 A' 和 B' 由公式(2.14)表示,而因之,它們滿足条件

$$A'(z_0, \zeta)=0, \quad B'(z, \zeta_0)=0. \qquad (2.18)$$

所以,在研究形如(F_0)的方程时,我們总能合适地限于考察这样的情形,即它的系数滿足条件(2.10)和(2.18).

今后約定說,方程(F_0)在点(z_0, ζ_0)处化为**第一种規范形式**,如果它的系数滿足条件(2.10)和(2.18).

---

[1] 方程(F)的不变量 $h(z, \zeta)$ 和 $k(z, \zeta)$ 在未知函数的綫性变換

$$u=\Lambda(z, \zeta)u'$$

或自变量 z, ζ 的代換

$$z=\zeta', \quad \zeta=z'$$

下均保持不变。如果不变量 h, k 中有一个为零,則方程(F_0)的解恒可經过积分两个常微分方程而得到。

以 $h^*(z, \zeta)$, $k^*(z, \zeta)$ 表示方程(F)的共軛方程(F^*)的不变量,則不难驗証

$$h^*=k, \quad k^*=h,$$

——譯注