

椭圆型方程新解法

(苏联) И. Н. 维库阿 著

侯宗义 译

陈传璋 校



上海科学技术出版社

橢圓型方程新解法

〔苏联〕И. Н. 維庫阿 著

侯宗义 譯

陈傳璋 校

上海科学技术出版社

內 容 提 要

本書內容是應用復變函數理論研究帶兩個自變量的解析系數的綫性橢圓型偏微分方程。內容包括：以單個復變量的解析函數給出表示的二階橢圓型微分方程的所有正規解的表達公式，解的逼近和展開為級數的問題，邊值問題，方程組的求積問題和解的一般表達式，高階方程的研究和應用以及總結以上的結果給出了在彈性理論中的應用。附錄給出借助 Green 函數表示的方程的解的表達式。

本書可作為綜合大學數學專業師生的教學參考書，也可供物理、力學系師生以及工程和研究單位的研究人員參考。

НОВЫЕ МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ ЭЛЛИПТИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ

И. Н. Векуа

Огиз • Гостехиздат • 1948

橢圓型方程新解法

侯宗義 譯 陳傳璋 校

上海科學技術出版社出版 (上海瑞金二路 450 號)

上海市書刊出版業營業許可證出 093 號

商務印書館上海廠印刷 新華書店上海發行所發行

開本 80×1168 1/32 印張 10 24/32 插版字數 262,000
1963 年 12 月第 1 版 1963 年 12 月第 1 次印刷 印數 1—3,500

統一書號 13119·543 定價(十四) 1.80 元

在第四章里研究了一定形式的二阶椭圆型微分方程组的求积问题和导出了其解的一般表达式，借助于这个一般表达式研究了边值问题。

第五章致力于一类特殊的高于二阶的微分方程的研究，它在应用观点上非常重要，因为许多数学物理问题，例如弹性薄板理论和薄壳理论，就化为我们要研究的这类方程。在这里引进了以复变量的解析函数表示的上面所提到的一类微分方程的所有正规解的一般表达式，利用这些表达式证明了解的各种性质。特别是，可应用这些公式去研究边值问题。

最后，在第六章给出了上述各章的结果到弹性理论上的某些应用。这里考虑了弹性柱体的平面稳定的振动方程，薄板的弯曲和稳定性方程，球形薄壳和弹性扁壳方程并且导出了它们的解以复变量的解析函数表示的一般表达式。借助于所得到的一般公式，解决了对单连通区域在柱体的平面振动情形下的主要边值问题；也解决了具有固定边缘的球形段的边值问题。

目 录

序 引 言

第一章 具有两个自变量的二阶线性椭圆 型微分方程的解的一般表达式

§1	某些基本概念、术语和记号	1
§2	标准形式的二阶线性椭圆型微分方程 化为规范形式	5
§3	在复区域内的 Volterra 型的积分方程	11
§4	方程 (E_0) 的 Riemann 函数	17
§5	若干特例	21
§6	方程 (E_0) 的解析解 Goursat 问题的解	26
§7	基本解	31
§8	方程 (E_0) 的解的解析特性	35
§9	方程 (E_0) 的解在变元复值区域内的解析延拓	37
§10	方程 (E_0) 的在单连通区域内的解的一般表达式	41
§11	方程 (E_0) 的在多连通区域内的所有解的一般表达式	54
§12	实系数的方程	67
§12*	方程 $\Delta u + \lambda^2 u = 0$ 的解的一般表达式	71
§12°	方程 $(1+x^2+y^2)^2 \Delta u + 4n(n+1)u = 0$ 的解的一般表达式	76

第二章 方程 (E_0) 的解的展开和逼近

§13	某些定义和辅助命题	81
§14	方程 (E_0) 在单连通区域内的解的展开和逼近	86
§15	方程 (E_0) 在圆内的解的展开	89
§16	对于 Riemann 函数和标准基本解的加公式	94
§17	方程 (E_0) 的解在圆环内的级数展开	98
§18	方程 (E_0) 在多连通区域内的解的逼近	100
§19	在 Bessel 函数理论中的应用	103

§ 20 在 Legendre 函数理論中的应用	111
--------------------------	-----

第三章 边值問題

§ 21 边值問題的一般提法	122
§ 22 对于单連通区域的問題 D 的求解	124
§ 23 問題 D 的可解性准則	138
§ 24 对于多連通区域的問題 D 的求解 Green 函数	142
§ 25 在单連通区域情形下問題 A 的求解	152
§ 26 关于多連通区域情形問題 A 的求解	162
§ 27 关于方程 (E_0) 的在閉区域上的解的逼近 任意函数展开为方 程 (E_0) 的在圓上的特解的級数展开式	164

第四章 二阶椭圆型微分方程組的解的一般表达式及其应用

§ 28 方程組 (S_0) 的矩陣写法 共軛方程組 Riemann 函数矩陣	169
§ 29 基本解 方程組 (S_0) 的解的解析特征	175
§ 30 方程組 (S_0) 的正規解的一般表达式	179
§ 31 关于方程組 (S_0) 的边值問題的求解的注	181

第五章 一类高阶椭圆型微分方程的解的一般表达式及其应用

I. 方程 (M) 的解的一般表达式	188
§ 32 方程 $\Delta^n u = 0$ 的解的一般表达式	188
§ 33 方程 $\Delta^n u = 0$ 的基本解和 Green 函数	196
§ 34 方程 (M_0) 的解的一般表达式	199
§ 35 基本解	209
§ 36 常系数方程	213
§ 37 特例	221
§ 38 关于方程 (M_0) 的解的展开和逼近	227
II. 边值問題	231
§ 39 边值問題 B	231
§ 40 边界条件的积分写法	233
§ 41 化边值問題 B 为积分方程	236
§ 42 对于方程 $\Delta^n u = 0$ 的問題 B 唯一性定理	246
§ 43 在一般情形下对于問題 B 的新的积分方程	247

§ 44 对于方程 $\Delta^n u = 0$ 在圆的情形下问题 B 的求解 对于圆域的 Green 函数	248
--	-----

第六章 在弹性理论中的应用

I. 弹性柱体的定常振动的平面问题	250
§ 45 平面问题的方程的解的一般表达式	250
§ 46 位移分量以全纯函数表示的一般表达式	252
§ 47 对于圆域的边值问题的求解	255
§ 48 对于圆环的边值问题的求解	259
§ 49 应用积分方程的方法求解第一基本边值问题	262
§ 50 应用积分方程的方法求解第二基本边值问题	266
II. 薄板的弯曲	271
§ 51 薄板弯曲的基本微分方程	271
§ 52 基本微分方程的一般解	273
§ 53 关于边值问题的注	278
III. 在球形薄壳理论中的应用	280
§ 54 球形薄壳的微分方程组	280
§ 55 方程组 (54.15) ~ (54.21) 的一般解	284
§ 56 对于应力、力矩和位移分量的其他表示式	289
§ 57 位移的分量 u, v, w 以复变量的解析函数表示的一般表达式	293
§ 58 在具有球形段形式的固定边缘壳体情形下边值问题的求解	295
§ 59 球形扁壳	300
§ 60 在具有球形段形式的固定边缘扁壳情形下边值问题的求解	303
IV. 在弹性扁壳的理论中的应用	306
§ 61 基本方程组	306
§ 62 把方程 (61.5) 化为在复区域内的 Volterra 型积分方程	307
§ 63 球形壳体和圆柱形壳体	312
附录 关于方程 (E_0) 的解借助于 Green 函数表示的表达式及其在闭区域上的性质	316
参考文献	324
补充参考文献	331

第一章

具有两个自变量的二阶线性椭圆型微分方程的解的一般表达式

在这一章里导出了形如

$$E(u) = \Delta u + a(x, y) \frac{\partial u}{\partial x} + b(x, y) \frac{\partial u}{\partial y} + c(x, y)u = f(x, y)$$

的方程的解以单个复变量的全纯函数表示的一般表达式, 这里 $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$ 是 Laplace 算子, a, b, c, f 都是变量 x, y 的在平面 oxy 的某一区域 $\mathfrak{R}$ 内给定的解析函数。在前三节中我们叙述对今后有辅助作用的材料。

§1 某些基本概念、术语和记号

在这一节, 我们给出在后面常要利用到的某些基本概念、术语和记号的解释。

1° 我们称有次序的数 $x_1, x_2, \dots, x_n$ 的全体为点 $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ 。这些数一般能取为复值, 称为点的坐标。点常用一个字母表示。

满足条件

$$|x_1 - x_1^0| < \rho, |x_2 - x_2^0| < \rho, \dots, |x_n - x_n^0| < \rho \quad (1.1)$$

的点 $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ 的集合称为点 $(x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0)$ 的 ρ -邻域, 这里 $(x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0)$ 是某个固定的点, 而 ρ 是某个正数。

称这样的点为集合 $\mathfrak{M}$ 的极限点, 它的任何 ρ -邻域含有集合 $\mathfrak{M}$ 的无穷点集。我们以 $\mathfrak{M}'$ 表示集合 $\mathfrak{M}$ 的极限点集。集合 $\mathfrak{M} + \mathfrak{M}'$

称为集合 $\mathfrak{M}$ 的闭包。如果 $\mathfrak{M}' \subset \mathfrak{M}$, 则集合 $\mathfrak{M}$ 称为闭的, 而如果 $\mathfrak{M}' \supset \mathfrak{M}$, 则 $\mathfrak{M}$ 称为自身稠密的。同时是闭的和自身稠密的集合称为完备的。

闭集称为连通的, 如果不能把它分解为两个没有公共点的非空闭集合。闭的连通集称为连续统。特别是, 一个点是连续统。如果连续统含有的点多于一个, 则它是完备的连通集合。

称集合的这样的点为它的内点, 对于这点存在着整个由原先给定的集合的点所组成的 ρ -邻域。

称这样的点为集合的外点, 它具有不包含原先给定集合的任何一个点的 ρ -邻域。

既不是原先给定的集合的内点, 又不是它的外点的点称为这个集合的边界点。集合的边界点的全体称为它的边界。不难证明, 边界是闭集合。

点集合 $\mathfrak{M}$ 称为开的, 如果它的每一点都是内点。

开集合称为连通的, 如果它不能表为两个不相交的开集的和的形式。连通的开集称为区域。

显然, 任意一点的任何 ρ -邻域是区域。点 $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ 当变量 $x_1, x_2, \dots, x_n$ 彼此独立地分别在复平面区域 $T_1, T_2, \dots, T_n$ 内变化时的集合也是区域。这样的区域称为柱域且通常记为 $(T_1, T_2, \dots, T_n)$ 。例如, 点 $(x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0)$ 的 ρ -邻域是柱域; 这时 T_k 是圆

$$|x_k - x_k^0| < \rho \quad (k=1, 2, \dots, n). \quad (1.2)$$

平面, 附加无穷远点后称为全平面。借助于测地投影可把全平面相互单值和保角地映射到单位球面上。

2° 假设在点 $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ 的集合 $\mathfrak{M}$ 上给定某个函数 $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ 。我们说函数 f 在 $\mathfrak{M}$ 上满足 Hölder 条件, 如果对于集合 $\mathfrak{M}$ 的任意两点 $(x_1, x_2, \dots, x_n), (x'_1, x'_2, \dots, x'_n)$, 成立着不等式:

$$|f(x'_1, x'_2, \dots, x'_n) - f(x_1, x_2, \dots, x_n)| < K \sum_{k=1}^n |x'_k - x_k|^\alpha, \quad (1.3)$$

其中 K 和 α 都是正的常数, $0 < \alpha \leq 1$, 它們不依賴于点 $(x'_1, \dots, x'_n)$, $(x_1, \dots, x_n)$ 的選擇。

滿足条件(1.3)的函数显然是 $\mathbb{M}$ 上的連續函数。我們也称这样的函数为在 $\mathbb{M}$ 上 Hölder 意义下的連續函数。在后面我們所需要用到的这样函数的性质, 在 Н. И. Мусхелишвили 院士的书[1] (參閱第一章)中已有叙述。

3° 設 L 是简单的(閉的或截断的)平面曲綫, 由方程

$$x = x(s), \quad y = y(s) \quad (0 \leq s \leq l) \quad (1.4)$$

給定, 这里 $x(s)$, $y(s)$ 都是連續函数, 并且如果

$$0 < |s_1 - s_2| < l, \quad 0 \leq s_1 \leq l, \quad 0 \leq s_2 \leq l,$$

有 $x(s_1) + iy(s_1) \neq x(s_2) + iy(s_2)$ 。

此外, 在閉曲綫的情形下, 有: $x(s+l) = x(s)$, $y(s+l) = y(s)$ 。

如果函数 $x(s)$ 和 $y(s)$ 在区間 $[0, l]$ 上有不同时为零的連續导数 $x'(s)$ 和 $y'(s)$, 則曲綫 L 称为光滑的。如果 L 是简单的光滑曲綫, 則由 L 在点 $(x(s), y(s))$ 的切綫和任意固定的方向所組成的角 $\theta(s)$ 是在区間 $[0, l]$ 上的連續函数。如果 $x'(s)$ 和 $y'(s)$ 在区間 $[0, l]$ 上是 Hölder 意义下連續的, 則 $\theta(s)$ 在 L 上也是在 Hölder 意义下連續的。今后称这样的曲綫为在 Hölder 意义下的光滑曲綫。

在后面我們也要利用到術語“分段光滑曲綫”和“分段 Hölder 意义下光滑的曲綫”, 它們的意义是明显的, 无庸說明。

4° 設 T 是平面区域, 它至全平面的补集由 $m+1$ 个互不相交的連續統 $C_0, C_1, \dots, C_m$ 組成, 并且 C_0 含有无穷远点, 而 $C_1, \dots, C_m$ 都是有界集合; 特別, C_0 可能仅由一个无穷远点构成; 也可能 $C_1, \dots, C_m$ 中的若干个或者它們的全部都只含有一个点。我們称这样的区域为 $(m+1)$ -連通区域。当 $m=0$ 时, 区域 T 称为单

連通的, 而当 $m > 0$ 时, 称为多連通的。

設 $L_0, L_1, \dots, L_m$ 相应地是 $C_0, C_1, \dots, C_m$ 的边界。那末, 集合 $L = L_0 + L_1 + \dots + L_m$ 是区域 T 的边界。

如果 $L_0, L_1, \dots, L_m$ 都是简单的光滑曲线, 則区域 T 称为类 A 的区域, 而如果 $L_0, L_1, \dots, L_m$ 都是在 Hölder 意义下的简单光滑曲线, 則区域 T 称为类 Ah 的区域。

5° 变量 $x_1, x_2, \dots, x_n$ 的函数 $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ 在点 $(x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0)$ 处称为解析的, 如果存在着此点的这样的 ρ -邻域, 在它的内部成立着展开式

$$f(x_1, \dots, x_n) = \sum_{k_1, \dots, k_n=0}^{\infty} a_{k_1, \dots, k_n} (x_1 - x_1^0)^{k_1} \dots (x_n - x_n^0)^{k_n}, \quad (1.5)$$

其中 $a_{k_1, \dots, k_n}$ 都是常数。不难証明, 这个級数在所指出的邻域的内部是绝对和一致收敛的^①, 并且

$$a_{k_1, \dots, k_n} = \frac{1}{k_1! \dots k_n!} \left(\frac{\partial^{k_1 + \dots + k_n} f(x_1, \dots, x_n)}{\partial x_1^{k_1} \dots \partial x_n^{k_n}} \right)_{\substack{x_1 = x_1^0 \\ \dots \\ x_n = x_n^0}}, \quad (1.6)$$

即(1.5)是函数 $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ 的 Taylor 級数。

如果函数 $f(x_1, \dots, x_n)$ 在集合 M 的任何点处是解析的, 則說, 它在这个集合 M 上是解析的。

設 $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ 是实变量 $x_1, x_2, \dots, x_n$ 的在 n 維空間的某个区域 D 內的解析函数。那末, 存在着唯一的复变量 $z_1 = x_1 + iy_1, \dots, z_n = x_n + iy_n$ 的函数 $f^*(z_1, \dots, z_n)$, 它在 $2n$ 維空間的某个区域 D^* 內是解析的, 当 $y_1 = y_2 = \dots = y_n = 0$ 时与 $f(x_1, \dots, x_n)$ 相重合, 并且, 显然 $D \subset D^*$ 。称函数 $f^*(z_1, \dots, z_n)$ 为函数 $f(x_1, \dots, x_n)$ 的从变元 $x_1, \dots, x_n$ 的实值区域到它們的复值区域內的解析延拓。

我們这里不引进它的証明, 这种情况允許实变量的解析函数的变元也具有复值。当然, 这些复变元有确定的变化区域, 它們依

① 当我们說級数在区域内部是一致收敛的, 这意味着, 此級数在这区域的每个閉子区域上是一致收敛的。

賴于所給定的函数的性质;一般,这些复变元的虛部應該是充分小的。但如果函数 $f(x_1, \dots, x_n)$ 是这样的,它的 Taylor 級数对变元的所有实值收斂,則这时能賦予它的变元以任意的复值。我們称这样的函数为整函数。

6° 設 T 是复变量 z 平面内的区域。今后以 $\bar{T}$ 表示区域 T 关于实軸的鏡面映射。如果 T 对于这軸是对称的,則显然 T 和 $\bar{T}$ 重合。

設变量 z 在 T 內变化。那末,共軛变量 $\bar{z}$ 就在 $\bar{T}$ 內变化。如果 $f(z)$ 是在 T 內的全純函数,則同它共軛的函数 $\overline{f(z)}$ 显然是 $\bar{z}$ 的在 $\bar{T}$ 內的全純函数。

§2 标准形式的二阶綫性橢圓型微分方程 化为规范形式

1° 众所周知,两个自变量的二阶綫性橢圓型微分方程总能化为下列的所謂标准形式:

$$\begin{aligned} \Delta u &= \Delta u + a(x, y) \frac{\partial u}{\partial x} + b(x, y) \frac{\partial u}{\partial y} + c(x, y)u \\ &= f(x, y), \end{aligned} \quad (\text{E})$$

其中 Δ 是 Laplace 算子: $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$, 微分方程 (E) 的系数 a, b, c 和自由項 f 都是变量 x, y 的已給函数; $u(x, y)$ 是未知函数,它称为方程 (E) 的解。

今后我們將假設,方程 (E) 的系数 a, b, c 和自由項 f 都是在平面 $z = x + iy$ 的某一区域 $\mathfrak{A}$ 內的解析函数。我們称区域 $\mathfrak{A}$ 是方程 (E) 的給定区域。

当 $f(x, y) = 0$ 时,方程 (E) 称为齐次的且記为 (E_0) 。

設 T 是属于 $\mathfrak{A}$ 的某个区域。如果函数 $u(x, y)$ 在区域 T 內有連續的一阶和二阶偏导数且滿足方程 (E), 則我們称它为这个方程的正規解。如果方程 (E) 的解 $u(x, y)$ 是在区域 T 內的解析函数,則我們称它为解析解。

方程 (E) 的解 $u(x, y)$, 它的系数 a, b, c 和自由项 f 一般都是实变元 x, y 的复函数。当 $u(x, y)$ 连同函数 a, b, c 对实变元 x, y 取实值的这种情形, 我們总是特別声明的, 并且在这种情形, 我們称 $u(x, y)$ 是方程的实解。

除了方程 (E) 以外, 也考察下列的方程:

$$L^*(v) = \Delta v - \frac{\partial av}{\partial x} - \frac{\partial bv}{\partial y} + cv = f^*, \quad (E^*)$$

其中 f^* 是某个解析函数。方程 (E*) 称为与 (E) 共轭的方程。显然, 方程 (E) 和 (E*) 的給定区域是重合的; 此外, 也明显地, 方程 (E) 也是和 (E*) 共轭的。

2° 現在在研究中引进下面的变量:

$$z = x + iy, \quad \bar{z} = x - iy, \quad (2.1)$$

它們显然仅当 x, y 是实值时取共轭值。在这种情形, 有时将写 $\bar{z}$ 以代替 $\bar{z}$ 。如果变量 x, y 取独立的复值, 則 $z, \bar{z}$ 也取独立的复值。从 (2.1), 我們有

$$x = \frac{1}{2}(z + \bar{z}), \quad y = \frac{1}{2i}(z - \bar{z}). \quad (2.2)$$

設 $f(x, y)$ 是变量 x, y 的某个解析函数。如果我們把这个函数解析延拓到变量 x, y 的复值区域内, 然后置换表示式 (2.2) 以代替这些变量, 則我們得到两个复变量 $z, \bar{z}$ 的解析函数 $F(z, \bar{z})$; 显然, $F(z, \bar{z}) = f\left(\frac{z + \bar{z}}{2}, \frac{z - \bar{z}}{2i}\right)$ 。

現在考察微分算子

$$\frac{\partial}{\partial z} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x} - i\frac{\partial}{\partial y}\right) \text{ 和 } \frac{\partial}{\partial \bar{z}} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x} + i\frac{\partial}{\partial y}\right), \quad (2.3)$$

不难看出, 它們具有下列的性质:

$$\frac{\partial^p}{\partial z^p}\left(\frac{\partial^q}{\partial \bar{z}^q}\right) = \frac{\partial^q}{\partial \bar{z}^q}\left(\frac{\partial^p}{\partial z^p}\right) \quad (p, q = 0, 1, 2, \dots). \quad (2.4)$$

因此, 就唯一地确定了形如

$$\frac{\partial^{p+q}}{\partial z^p \partial \bar{\zeta}^q} = \frac{1}{2^{p+q}} \left(\frac{\partial}{\partial x} - i \frac{\partial}{\partial y} \right)^p \left(\frac{\partial}{\partial x} + i \frac{\partial}{\partial y} \right)^q \quad (p, q=0, 1, 2, \dots) \quad (2.5)$$

的算子。特别是,有

$$4 \frac{\partial^2}{\partial z \partial \bar{\zeta}} = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} = \Delta. \quad (2.6)$$

我们能够把算子 $\frac{\partial}{\partial z}, \frac{\partial}{\partial \bar{\zeta}}$ 施行到任意的可微函数上。但是应该记得,一般來說,不能把 $\frac{\partial u}{\partial z}, \frac{\partial u}{\partial \bar{\zeta}}$ 理解为 u 关于 z 和 $\bar{\zeta}$ 的偏导数; 它們仅当 u 是变量 $z, \bar{\zeta}$ 的解析函数时才可能有上述那样的理解。

利用公式(2.2), (2.3)和(2.6), 我们能够把方程(E)写为形式

$$\begin{aligned} F(u) &= \frac{\partial^2 u}{\partial z \partial \bar{\zeta}} + A(z, \bar{\zeta}) \frac{\partial u}{\partial z} + B(z, \bar{\zeta}) \frac{\partial u}{\partial \bar{\zeta}} + C(z, \bar{\zeta}) u \\ &= F(z, \bar{\zeta}), \end{aligned} \quad (F)$$

其中

$$\left. \begin{aligned} A(z, \bar{\zeta}) &= \frac{1}{4} \left[a \left(\frac{z+\bar{\zeta}}{2}, \frac{z-\bar{\zeta}}{2i} \right) + ib \left(\frac{z+\bar{\zeta}}{2}, \frac{z-\bar{\zeta}}{2i} \right) \right], \\ B(z, \bar{\zeta}) &= \frac{1}{4} \left[a \left(\frac{z+\bar{\zeta}}{2}, \frac{z-\bar{\zeta}}{2i} \right) - ib \left(\frac{z+\bar{\zeta}}{2}, \frac{z-\bar{\zeta}}{2i} \right) \right], \\ C(z, \bar{\zeta}) &= \frac{1}{4} c \left(\frac{z+\bar{\zeta}}{2}, \frac{z-\bar{\zeta}}{2i} \right), \\ F(z, \bar{\zeta}) &= \frac{1}{4} f \left(\frac{z+\bar{\zeta}}{2}, \frac{z-\bar{\zeta}}{2i} \right). \end{aligned} \right\} \quad (2.7)$$

我們称方程(F)为方程(E)的复式。显然, 方程(E)和(F)实质上彼此是没有差异的, 但我們还是对它們使用不同的記号: $E(u)$ 总是表示方程(E)的左端的算子, 它是施加在 u 上对变量 x, y 的运算, 而 $F(u)$ 是表示为变量 $z, \bar{\zeta}$ 的同样的算子 (精确到常数乘子), 即是在方程(F)的左端所給定的算子。

显然, 共轭方程(E^*)的复式是

$$F^*(v) = \frac{\partial^2 v}{\partial z \partial \bar{\zeta}} - \frac{\partial A v}{\partial z} - \frac{\partial B v}{\partial \bar{\zeta}} + C v = F^*(z, \bar{\zeta}). \quad (F^*)$$

3° 現在以 $\mathfrak{D}$ 表示属于 $\mathfrak{X}$ 的单連通区域, 它具有下列的性质:

$A(z, \zeta)$, $B(z, \zeta)$, $C(z, \zeta)$ 都是两个复变量 z, ζ 的在柱域 $(\mathfrak{D}, \overline{\mathfrak{D}})$ 內, 即当 $z \in \mathfrak{D}$, $\zeta \in \overline{\mathfrak{D}}$ 时的解析函数。

我們称这样的区域为方程 (E) 的基本区域。显然, 方程 (E) 的基本区域也是共轭方程 (E*) 的基本区域, 并且反之亦然。

不难看出, 基本区域总是存在的。例如, 能够取区域 $\mathfrak{X}$ 的任何点的任意充分小的 ρ -邻域作为这样的区域。特别是, 如果方程 (E) 的系数 a, b, c 都是变量 x, y 的整函数, 則函数 A, B, C 也是变量 z, ζ 的整函数, 在这种情形下, 可以取整个复 z 平面作为基本区域 $\mathfrak{D}$ 。

我們注意, 如果 $\mathfrak{D}$ 是对于方程 (E) 的基本区域, 則它的任何单連通子区域也是基本区域。

4° 現在考察齐次方程

$$F(u) = \frac{\partial^2 u}{\partial z \partial \zeta} + A(z, \zeta) \frac{\partial u}{\partial z} + B(z, \zeta) \frac{\partial u}{\partial \zeta} + C(z, \zeta) u = 0 \quad (F_0)$$

并在这里代替 u 作函数变换

$$u = Au', \quad (2.8)$$

其中 A 是变量 z, ζ 的在柱域 $(\mathfrak{D}, \overline{\mathfrak{D}})$ 內的任意解析函数, 并且 $\mathfrak{D}$ 是方程 (E₀) 的某个基本区域; 此外, 我們假设, 在 $\mathfrak{D}$ 內 $|A| > 0$ 。那末对 u' , 我們得到方程

$$F'(u') = \frac{\partial^2 u'}{\partial z \partial \zeta} + A'(z, \zeta) \frac{\partial u'}{\partial z} + B'(z, \zeta) \frac{\partial u'}{\partial \zeta} + C'(z, \zeta) u' = 0, \quad (F'_0)$$

其中

$$\left. \begin{aligned} A' &= A + \frac{\partial \lg A}{\partial \zeta}, \quad B' = B + \frac{\partial \lg A}{\partial z}, \\ C' &= C + A \frac{\partial \lg A}{\partial z} + B \frac{\partial \lg A}{\partial \zeta} + \frac{1}{A} \frac{\partial^2 A}{\partial z \partial \zeta}. \end{aligned} \right\} \quad (2.9)$$

这样一来, 变换 (2.8) 并不改变方程 (F₀) 的形式, 但当然, 这时

在新的方程中的系数是改变的，它們依赖于函数 Δ 。現在我們能够利用这个函数的任意性这样来选择它，使得新方程的系数满足这种或者另外的条件。

例如，我們要求使

$$A'B' - C' = 0, \quad (2.10)$$

为此，必須而且只須使 Δ 是方程

$$\frac{\partial^2 \lg \Delta}{\partial z \partial \bar{\zeta}} = A(z, \zeta) B(z, \bar{\zeta}) - C(z, \bar{\zeta}) \quad (2.11)$$

的解。由此立得^①

$$\lg \Delta = \Phi(z) + \Psi(\bar{\zeta})$$

$$- \int_{z_0}^z dt \int_{\zeta_0}^{\bar{\zeta}} [C(t, \tau) - A(t, \tau) B(t, \bar{\tau})] d\tau, \quad (2.12)$$

其中 z_0, ζ_0 分别是区域 $\mathfrak{D}, \bar{\mathfrak{D}}$ 内的固定点，而 $\Phi(z), \Psi(\bar{\zeta})$ 分别是在 $\mathfrak{D}, \bar{\mathfrak{D}}$ 内的任意全純函数。現在选取这些函数为如下的形式：

$$\Phi'(z) = -B(z, \zeta_0), \quad \Psi'(\bar{\zeta}) = -A(z_0, \bar{\zeta}), \quad (2.13)$$

由于(2.12)，从(2.9)我們得到

$$\left. \begin{aligned} A'(z, \bar{\zeta}) &= \int_{z_0}^z h(t, \bar{\zeta}) dt, \\ B'(z, \bar{\zeta}) &= \int_{\zeta_0}^{\bar{\zeta}} k(z, \tau) d\tau, \end{aligned} \right\} \quad (2.14)$$

其中

$$\left. \begin{aligned} h(z, \bar{\zeta}) &= \frac{\partial A(z, \bar{\zeta})}{\partial z} + A(z, \bar{\zeta}) B(z, \bar{\zeta}) - C(z, \bar{\zeta}), \\ k(z, \bar{\zeta}) &= \frac{\partial B(z, \bar{\zeta})}{\partial \bar{\zeta}} + A(z, \bar{\zeta}) B(z, \bar{\zeta}) - C(z, \bar{\zeta}). \end{aligned} \right\} \quad (2.15)$$

① 因為我們所考察的是单連通区域，在这个区域内的解析函数沿此区域内任意曲綫的积分显然只与这条曲綫的端点有关，而不依赖于积分的路徑 (Cauchy 定理)。在多連通区域内情况就完全不是这样。在本书中始終要注意到这一点。——譯注

函数 h, k 称为方程 (F) 的不变量^①; 显然, 它们都是变量 z, ζ 的在柱域 $(\mathfrak{D}, \overline{\mathfrak{D}})$ 内的解析函数。

从 (2.12) 借助于条件 (2.13), 函数 A 被确定精确到仅是异于零的常数乘子。因之对于 A , 我们能取表示式

$$A = A(z, \zeta, z_0, \zeta_0) = \exp \left\{ - \int_{z_0}^z B(t, \zeta_0) dt - \int_{\zeta_0}^{\zeta} A(z_0, \tau) d\tau + \int_{z_0}^z dt \int_{\zeta_0}^{\zeta} [A(t, \tau) B(t, \tau) - C(t, \tau)] d\tau \right\}. \quad (2.16)$$

显然, $A(z, \zeta, z_0, \zeta_0)$ 是四个变量 z, ζ, z_0, ζ_0 的在柱域 $z, z_0 \in \mathfrak{D}, \zeta, \zeta_0 \in \overline{\mathfrak{D}}$ 内的解析函数。

这样一来, 我们就导致下述的结果:

如果 A 由公式 (2.16) 给定, 则借助于变换 (2.8), 方程 (F_0) 化为形式:

$$\begin{aligned} F'(u') &= \frac{\partial^2 u'}{\partial z \partial \zeta} + A'(z, \zeta) \frac{\partial u'}{\partial z} + B'(z, \zeta) \frac{\partial u'}{\partial \zeta} \\ &\quad + A'(z, \zeta) B'(z, \zeta) u' = 0, \end{aligned} \quad (2.17)$$

其中 A' 和 B' 由公式 (2.14) 表示, 而因之, 它们满足条件

$$A'(z_0, \zeta) = 0, \quad B'(z, \zeta_0) = 0. \quad (2.18)$$

所以, 在研究形如 (F_0) 的方程时, 我们总能合适地限于考察这样的情形, 即它的系数满足条件 (2.10) 和 (2.18)。

今后约定说, 方程 (F_0) 在点 (z_0, ζ_0) 处化为第一种规范形式, 如果它的系数满足条件 (2.10) 和 (2.18)。

① 方程 (F) 的不变量 $h(z, \zeta)$ 和 $k(z, \zeta)$ 在未知函数的线性变换

$$u = A(z, \zeta) u'$$

或自变量 z, ζ 的代换

$$z = z', \quad \zeta = \zeta'$$

下均保持不变。如果不变量 h, k 中有一个为零, 则方程 (F_0) 的解恒可经过积分两个常微分方程而得到。

以 $h^*(z, \zeta), k^*(z, \zeta)$ 表示方程 (F) 的共轭方程 (F^*) 的不变量, 则不难验证

$$h^* = k, \quad k^* = h.$$

——译注