一般状态马氏过程分析理论

中国科学院科学基金资助课题

胡迪鹤

湖北教育出版社

一般状态马氏过程分析理论

中国科学院科学基金资助课题

一般状态马氏过程分析理论

胡　迪　鹤

湖北教育出版社出版　新华书店湖北发行所发行
湖北教育出版社印刷厂印刷
850×1168毫米32开本　8.25印张　2插页　200,000字
1985年9月第1版　1985年9月第1次印刷
统一书号：7306·233　定价：(简精装)3.00

序

马尔可夫过程是随机过程中历史最悠久的一个分枝，也是目前发展很迅速的一个分枝。马尔可夫过程的初期研究（从二十世纪初到二十世纪五十年代），主要集中在可数状态方面。这方面奠基性的专著如〔49〕。近年来国内在这方面也出了不少专著，如〔29〕、〔31〕、〔32〕、〔33〕、〔34〕。五十年代以来，随着现代分析理论的发展，一方面可数状态的马尔可夫过程继续向纵深发展，另一方面，一般状态的马尔可夫过程得到了迅速发展。奠基性的专著如〔5〕、〔6〕。

本书主要研究一般状态的马尔可夫过程的分析理论，轨道理论基本未涉及。全书除了一小部分泛函分析方面的基本知识（如*Bochner*积分、算子半群理论、*Banach*代数）外，主要是作者近年来在马尔可夫过程的分析理论方面研究工作的小结。

全书共分三编二十七节。第一编讨论时齐的转移函数及其所产生的算子半群的性质；第二编讨论时齐的q过程的构造理论；第三编讨论非时齐的转移函数的各种分析性质。

作者力图把本书写得通俗易读。对于掌握“测度论”、“泛函分析”和“点集拓扑”初步知识的读者，阅读此书，不会产生多大困难。

限于作者学识浅薄，本书缺点错误定然不少，敬希不吝指正。

胡迪鹤

1984年于武汉大学

目　　录

第　一　编

时齐的准转移函数及算子半群的分析理论

本书符号及术语，多沿袭近代随机过程理论中所通用者．例如从集合E_1到E_2中的变换f，记作f：$E_1 \to E_2$，为了突出自变量及对应关系有时也记作$t \to f(t)$或$t \to f_t$．如E_i中还有σ代数$\mathscr{E}_i$，f关于$\mathscr{E}_1$和$\mathscr{E}_2$可测，则记作$f \in \mathscr{E}_1/\mathscr{E}_2$．特别地，若$E_2 = R^1 = (-\infty, \infty)$，$\mathscr{E}_2$是$R^1$中的全体Borel集合，则简记为$f \in \mathscr{E}_1$．而$f \in b\mathscr{E}_1$表$f \in \mathscr{E}_1$且有界，$f \in \mathscr{E}_1^+$表$f \in \mathscr{E}_1$且非负．对任何$A \in \mathscr{E}_1$，$I_A$表$A$的示性函数，即$I_A(x) = 1$或0视$x$属于$A$或不属于$A$而定．有时记$I_A(x)$为$\varepsilon_x(A)$或$\delta(x, A)$．本书所言测度均非负．若$(E_1, \mathscr{E}_1, \mu)$是测度空间，$f \in \mathscr{E}_1$，$A \in \mathscr{E}_1$，$f$在$A$上关于$\mu$的积分记作$\int_A f d\mu$或$\int_A f(x)\mu(dx)$．若$\mathscr{M}$是集合$E$上的集合系，则记$\sigma(\mathscr{M})$为由$\mathscr{M}$所产生的$\sigma$代数．$a \wedge b = \min(a, b)$，$a \vee b = \max(a, b)$，$\mathscr{B}^0_\infty$表$[0, \infty)$中的全体Borel集合．

§1　准转移函数及算子半群

设$\boldsymbol{T} \subset (-\infty, \infty)$，$(E, \mathscr{E})$是可测空间．

定义1.1　称$p(s, t, x, A)$　$(s \leqslant t, s, t \in \boldsymbol{T}, x \in E, A \in \mathscr{E})$是准转移函数，如果

(i) 对任意的$s\leqslant t$, s, $t\in\boldsymbol{T}$, $x\in E$, $P(s, t, x, \cdot)$是$\mathcal{E}$上的测度，且$P(s, t, x, E)\leqslant 1$;

(ii) 对任意的$s\leqslant t$, s, $t\in\boldsymbol{T}$, $A\in\mathcal{E}$,有

$$P(s, t, \cdot, A)\in\mathcal{E},\ P(s, s, x, A)=I_A(x);$$

(iii) 满足$(K-C)$方程式，即是对任意的$s\leqslant t\leqslant u$, s, t, $u\in\boldsymbol{T}$, $x\in E$, $A\in\mathcal{E}$, 都有

$$P(s, u, x, A)=\int_E P(s, t, x, dy)P(t, u, y, A).$$

特别地，满足$P(s, t, x, E)\equiv 1$的准转移函数称为转移函数，满足 $P(s+h, t+h, x, A)\equiv P(s, t, x, A)$ $(s\leqslant t, s, t, s+h, t+h\in\boldsymbol{T}, x\in E, A\in\mathcal{E})$的（准）转移函数称为时齐的(准)转移函数。对时齐的（准）转移函数，$(K-C)$方程式变为：

$$P(s+t, x, A)=\int_E P(s, x, dy)P(t, y, A)$$

$(s, t\in\boldsymbol{T}, x\in E, A\in\mathcal{E})$.

本编所讨论的（准）转移函数，都是时齐的，如不特别申明，总令$\boldsymbol{T}=[0, \infty)$.

定义1.2 由 *Banach* 空间$\boldsymbol{B}$到$\boldsymbol{B}$的有界线性算子族$\{F_t; t\in\boldsymbol{T}\}$称为一个半群，如果

$F_{s+t}=F_s\circ F_t$, $(s, t\in\boldsymbol{T}$, $F_0=I$是恒等算子，$F_s\circ F_t$表复合算子)。特别地，如果还有正实数β，使

$$\|F_t\|\leqslant e^{\beta t},\ (t\in\boldsymbol{T}),$$

则称此半群是标准型的，更特别地，若

$$\|F_t\|\leqslant 1,\ (t\in\boldsymbol{T}),$$

则称此半群是压缩型的。(此处$\|F_t\|$表算子F_t的范数。)

下面我们给出两个 *Banach* 空间，并给出由准转移函数所产生的两个半群。

(1) $\mathscr{M}=\{f: f\in b\mathcal{E},\}$，在$\mathscr{M}$中按函数的普通加法与数量乘法来定义线性运算，并定义范数$\|f\|=\sup\limits_{x\in E}|f(x)|$, $(f\in\mathscr{M})$，则$\mathscr{M}$构

成Banach 空间。

(2) $\mathscr{L}=\{\varphi:\varphi$是$\mathscr{E}$上完全可加的实值的集合函数$\}$. 在$\mathscr{L}$中定义线性运算如下：

$$(c_1\varphi_1+c_2\varphi_2)(\mathrm{A})=c_1\varphi_1(\mathrm{A})+c_2\varphi_2(\mathrm{A}),$$

$(\varphi_1,\ \varphi_2\in\mathscr{L},\ c_1,\ c_2$是实数，$\mathrm{A}\in\mathscr{E})$,

再定义范数

$$\|\varphi\|=|\varphi|(E),\ (\varphi\in\mathscr{L}),$$

$|\varphi|=\varphi^++\varphi^-,\ \varphi^+(\mathrm{A})=\varphi(\mathrm{A}F),\ \varphi^-(\mathrm{A})=-\varphi(\mathrm{A}G)$,

$(\mathrm{A}\in\mathscr{E},\ (F,\ G)$是$\varphi$的一组Hahn分解)。则$\mathscr{L}$亦为一Banach 空间.

下面我们从准转移函数$\mathrm{P}(t,\ x,\mathrm{A})$在$\mathscr{M}$和$\mathscr{L}$上分别构造两个算子半群。

(1) $\{\mathrm{P}_t:\ t\in\boldsymbol{T}\}$.

任取$f\in\mathscr{M}$，定义

$$(\mathrm{P}_tf)(x)=\int_E\mathrm{P}(t,\ x,\ dy)f(y),\quad (t\in\boldsymbol{T},\ x\in E),$$

显然，P_t是定义在$\mathscr{M}$上取值于$\mathscr{M}$中的有界线性算子. 由$\mathrm{P}(t,x,\ \mathrm{A})$满足$(K-C)$方程式可知：$\mathrm{P}_s\cdot\mathrm{P}_t=\mathrm{P}_t\cdot\mathrm{P}_s=\mathrm{P}_{s+t}$，$(s,\ t\in\boldsymbol{T})$，再注意$\mathrm{P}(t,\ x,\ E)\leqslant1$，$(t\in\boldsymbol{T},x\in E)$可知$\{\mathrm{P}_t:\ t\in\boldsymbol{T}\}$是压缩型的半群。

(2) $\{V_t:\ t\in\boldsymbol{T}\}$.

任取$\varphi\in\mathscr{L}$，定义

$$(V_t\varphi)(\mathrm{A})=\int_E\varphi(dx)\,\mathrm{P}(t,\ x,\ \mathrm{A}),\ (t\in\boldsymbol{T},\quad \mathrm{A}\in\mathscr{E}).$$

显然，V_t是定义在$\mathscr{L}$上取值于$\mathscr{L}$中的有界线性算子，而由$\mathrm{P}(t,x,\mathrm{A})$ 满足$(K-C)$方程式可得：

$$(V_{s+t}\varphi)(\mathrm{A})=\int_E\varphi(dx)\mathrm{P}(s+t,\ x,\ \mathrm{A})$$

$$=\int_E\varphi(dx)\int_E\mathrm{P}(s,\ x,\ dy)\mathrm{P}(t,\ y,\ \mathrm{A})$$

$$=(V_t \circ V_s \varphi)(\mathrm{A}),\quad (s,\ t\in \boldsymbol{T},\ \mathrm{A}\in\varepsilon).$$

显然$\|V_t\varphi\|\leqslant\|\varphi\|$，$(\varphi\in\mathscr{L},t\in\boldsymbol{T})$，所以$\{V_t;\ t\in\boldsymbol{T}\}$是压缩型半群。

命题1.1 任取$f\in\mathscr{M}$，$\varphi\in\mathscr{L}$，定义

$$(f,\ \varphi)=\int_E\varphi(dx)f(x),$$

则$(\mathrm{P}_tf,\ \varphi)=(f,\ V_t\varphi)$。

证：$(\mathrm{P}_tf,\ \varphi)=\int_E\varphi(dx)\int_E\mathrm{P}(t,\ x,\ dy)f(y)=(f,\ V_t\varphi)$.

由命题1.1看出：$\{\mathrm{P}_t:\ t\in\boldsymbol{T}\}$与$\{V_t:t\in\boldsymbol{T}\}$ 相互唯一决定。事实上，若令$I_A(x)$是A上的示性函数，ε_x是$\mathscr{E}$上的测度值集中在$\{x\}$的概率测度，则

$$(V_t\varphi)(\mathrm{A})=(I_A,\ V_t\varphi)=(\mathrm{P}_tI_A,\ \varphi),$$

$$(\mathrm{P}_tf)(x)=(\mathrm{P}_tf,\ \varepsilon_x)=(f,\ V_t\varepsilon_x).$$

现在我们来看一个特殊情形。若E是非负整数集，记$p_{i,j}(t)=\mathrm{P}(t,\ i,\ \{j\})$，则$\mathrm{P}(t,\ x,\ \mathrm{A})$由$p_{i,j}(t)$ 所唯一决定。这时，$\mathscr{M}$为

$$(m)=\left\{y:\ y=\begin{pmatrix}y_0\\ y_1\\ \vdots\end{pmatrix},\ \sup_{j>0}|y_j|<\infty\right\},$$

$\mathscr{L}$为

$$(l)=\left\{\alpha':\ \alpha'=(\alpha_0,\ \alpha_1,\ \alpha_2,\ \cdots),\ \sum_{j=0}^{\infty}|\alpha_j|<\infty\right\}.$$

而$\{\mathrm{P}_t:\ t\in\boldsymbol{T}\}$和$\{V_t:\ t\in\boldsymbol{T}\}$分别由下式决定：

$$\mathrm{P}_ty=\mathrm{P}(t)y,\quad (t\in\boldsymbol{T},\ y\in(m)),$$

$$V_t\alpha'=\alpha'\mathrm{P}(t),\quad (t\in\boldsymbol{T},\ \alpha'\in(l)),$$

其中 $\mathrm{P}(t)=(p_{i,j}(t),\ i,\ j\geqslant0)$是由$p_{i,j}(t)$为元素构成的矩阵，而上述两式右端是普通的矩阵乘法。

§2 强极限与Bochner积分

定义2.1 设$\boldsymbol{B}$是一个Banach空间，

(1) 设f_n，$f\in\boldsymbol{B}$，若$\lim\limits_{n\to\infty}\|f_n-f\|=0$，则称$\{f_n\}$强收敛到$f$，或称$f$是$\{f_n\}$的强极限，记之为$f=(s)\lim\limits_{n\to\infty}f_n$，或$f_n\xrightarrow{(S)}f$，（当$n\to\infty$）。

(2) 设$t\to f_t$是定义在$[a,b]$上取值于$\boldsymbol{B}$的抽象函数，$t_0\in[a,b]$。若

$$(s)\lim_{t\to t_0}\ f_t=f_{t_0},$$

则称f_t在t_0强连续。如果f_t在$[a,b]$上每一点都强连续，则说f_t在$[a,b]$上强连续。

若存在$g_{t_0}\in\boldsymbol{B}$，使

$$(s)\lim_{h\to 0}\frac{f_{t_0+h}-f_{t_0}}{h}=g_{t_0},$$

则称f_t在t_0是强可导的，g_{t_0}称为f_t在t_0的强导数，记之为$f'_{t_0}=g_{t_0}$或$(s)\left.\dfrac{df_t}{dt}\right|_{t=t_0}=g_{t_0}$。如果$f_t$在$[a,b]$上每一点都是强可导的，则说$f_t$在$[a,b]$上强可导。

例如，若$\boldsymbol{B}=\mathscr{M}$，$\mathscr{M}$的定义如§1，则$\mathscr{M}$中之强收敛即数学分析中的一致收敛。

定义2.2 设$\mathscr{F}^1$为R^1中一切Lebesgue可测集，μ^*是$\mathscr{F}^1$上的Lebesgue测度，遂得完备测度空间$(R^1,\mathscr{F}^1,\mu^*)$。$\boldsymbol{B}$是Banach空间，$S\in\mathscr{F}^1$，$f_t$: $S\to\boldsymbol{B}$，称f_t在S上关于$\mathscr{F}^1$强可测（简称强可测），如果存在简单抽象函数列$\{f_t^{(n)}\}$，使

$$f_t=(s)\lim_{n\to\infty}f_t^{(n)},\ [a.e.]\text{in }S(\mu^*).$$

（所谓g_t是简单抽象函数，意即$g_t=\sum_{i=1}^{k}c_i I_{A_i}(t)$，$c_i\in \boldsymbol{B}$，$A_i$是$S$中的可测子集，$A_1$，…，$A_k$两两不交，$\bigcup_{i=1}^{k}A_i=S$。）

命题2.1 （甲）若$\{g_t^{(n)}\}$是强可测函数列，且

$g_t=(s)\lim\limits_{n\to\infty}g_t^{(n)}$，$[a.e.]\text{in}\,S\ (\mu^*)$，则$g_t$亦为强可测函数。

（乙）若f_t是强可测函数，则

（1）$\|f_t\|$是实变实值的 *Lebesgue* 可测函数；

（2）存在简单抽象函数列$\{f_t^{(n)}\}$，使

$$\|f_t^{(n)}\|\leqslant 2\|f_t\|,\quad (n\geqslant 1,\ t\in S),$$

$$f_t=(s)\lim_{n\to\infty}f_t^{(n)},\quad [a.e.]\text{in}\,S(\mu^*).$$

证：（甲）显然成立。下证（乙）。

（1）对简单抽象函数$f_t^{(n)}=\sum_{i=1}^{k_n}c_i^{(n)}I_{A_i^{(n)}}(t)$，总有

$$\|f_t^{(n)}\|=\sum_{i=1}^{k_n}\|c_i^{(n)}\|I_{A_i^{(n)}}(t)$$

是实变实值 *Lebesgue* 可测函数，但f_t强可测，故必存在简单抽象函数列$\{f_t^{(n)}\}$使

$$f_t=(s)\lim_{n\to\infty}f_t^{(n)},\quad [a.e.]\text{in}\,S,\ (\mu^*).$$

由范数的连续性得

$$\|f_t\|=\lim_{n\to\infty}\|f_t^{(n)}\|,\quad [a.e.]\text{in}\,S,\ (\mu^*).$$

而今$\|f_t^{(n)}\|$是 *Lebesgue* 可测的，故$\|f_t\|$亦然。

（2）设$\{g_t^{(n)}\}$是简单抽象函数列，满足

$$f_t=(s)\lim_{n\to\infty}g_t^{(n)},\quad [a.e]\text{in}\,S,\ (\mu^*),$$

取

$$f_i^{(n)}=\begin{cases}0, & \text{当}\|g_i^{(n)}\|>2\|f_i^{(n)}\|,\\ g_i^{(n)}, & \text{反之},\end{cases}$$

则$\{f_i^{(n)}\}$即为所求。

定义2.3 （*Bochner* 积分）设（R^1，$\mathscr{F}^1$，μ^*）、S、$\boldsymbol{B}$ 如定义2.2。f_t：$S\to\boldsymbol{B}$，f_t是强可测的，且$\|f_t\|$在S上 *Lebesgue* 可积。

（1）若f_t是简单抽象函数：

$$f_t=\sum_{i=1}^{n}c_iI_{A_i}(t),$$

$A_i\in\mathscr{F}^1$，$\bigcup_{i=1}^{n}A_i=S$，$A_i\cap A_j=\varnothing$，$(i\neq j)$，$c_i\in\boldsymbol{B}$，则定义f_t（在S上）的 *Bochner* 积分为

$$\sum_{i=1}^{n}c_i\mu^*(A_i),$$

记之为

$$(s)\int_S f_t\,dt=\sum_{i=1}^{n}c_i\mu^*(A_i).$$

注意：$\|f_t\|=\sum_{i=1}^{n}\|c_i\|I_{A_i}(t)$，而又设

$$\int_S\|f_t\|dt<\infty,$$

所以$\|c_i\|\mu^*(A_i)<\infty$，$(i=1,\cdots n)$。因此

$$“\mu^*(A_i)=\infty\Longrightarrow c_i=0”.$$

若约定$0\cdot\infty=0$，则上面的积分恒为$\boldsymbol{B}$中一元素。这说明对满足定义2.3中的条件的简单抽象函数f_t，其 *Bochner* 积分必存在。而积分值的唯一性是显然的。

（2）设f_t是一般的强可测函数，且$\|f_t\|$在S上 *Lebesgue* 可积。

若对任意一列简单抽象函数

$$f_t^{(n)} = \sum_{i=1}^{k_n} c_i^{(n)} I_{A_i^{(n)}}(t)$$

来说，只要$\|f_t^{(n)}\| \leqslant 2\|f_t\|$，而且

$$f_t = (s)\lim_{n\to\infty} f_t^{(n)},\ [a.e.]\ \ in\ \ S\ (\mu^*),$$

均存在$h \in \boldsymbol{B}$，使

$$h = (s)\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{k_n} c_i^{(n)}\mu^*(A_i^{(n)}) = (s)\lim_{n\to\infty}\left((s)\int_S f_t^{(n)}dt\right),$$

而且h不依赖$\{f_t^{(n)}\}$的选取，则称f_t在S上是Bochner可积的，h称为其积分值，记之为

$$h = (s)\int_S f_t dt.$$

对于任何一个可测子集$S_1 \subset S$，定义

$$(s)\int_{S_1} f_t dt = (s)\int_S I_{S_1}(t) f_t dt.$$

定理2.1 设f_t强可测，且$\|f_t\|$在S上是 Lebesgue 可积的，则f_t在S上Bochner可积.

证： 由命题2.1，可取简单抽象函数列$\{f_t^{(n)}\}$，使

$$\lim_{n\to\infty}\|f_t^{(n)} - f_t\| = 0,\ [a.e.]\ in\ S\ (\mu^*), \tag{2.1}$$

$$\|f_t^{(n)}\| \leqslant 2\|f_t\|,\quad (n \geqslant 1,\ t \in S). \tag{2.2}$$

由(2.1),(2.2)并应用控制收敛定理可得：

$$\begin{aligned}
&\lim_{n,m\to\infty}\left\|(s)\int_S f_t^{(n)}dt - (s)\int_S f_t^{(m)}dt\right\| \\
&\leqslant \lim_{n,m\to\infty}\int_S \|f_t^{(n)} - f_t^{(m)}\| dt \\
&\leqslant \lim_{n,m\to\infty}\left(\int_S \|f_t^{(n)} - f_t\| dt + \int_S \|f_t - f_t^{(m)}\| dt\right) \\
&= \left(\int_S \lim_{n\to\infty}\|f_t^{(n)} - f_t\| dt + \int_S \lim_{m\to\infty}\|f_t - f_t^{(m)}\| dt\right) \\
&= 0.
\end{aligned} \tag{2.3}$$

由Banach空间$\boldsymbol{B}$的完备性得知：存在$h\in\boldsymbol{B}$，使得：

$$h=(s)\lim_{n\to\infty}\left((s)\int_S f_t^{(n)}dt\right).$$

若有两列简单抽象函数列$\{f_t^{(n)}\}$、$\{g_t^{(n)}\}$，使得：

$\|f_t^{(n)}\|\leqslant 2\|f_t\|$，$\|g_t^{(n)}\|\leqslant 2\|f_t\|$，$(n\geqslant 1)$，

$$f_t=(s)\lim_{n\to\infty}f_t^{(n)}=(s)\lim_{n\to\infty}g_t^{(n)},\ [a.e.]\ in\ S\ (\mu^*),$$

往证：

$$(s)\lim_{n\to\infty}(s)\int_S f_t^{(n)}dt=(s)\lim_{n\to\infty}(s)\int_S g_t^{(n)}dt. \tag{2.4}$$

（注意：如前所证，(2.4)两端的极限存在。）事实上，作

$$h_t^{(n)}=\begin{cases}f_t^{(n)}, & n\text{为奇数},\\ g_t^{(n)}, & n\text{为偶数},\end{cases}$$

则$\|h_t^{(n)}\|\leqslant 2\|f_t\|$，$(n\geqslant 1)$，$\{h_t^{(n)}\}$是简单抽象函数列，且

$$f_t=(s)\lim_{n\to\infty}h_t^{(n)},\ [a.e.]\ in\ S\ (\mu^*).$$

因此，必存在$h\in\boldsymbol{B}$，使

$$h=(s)\lim_{n\to\infty}(s)\int_S h_t^{(n)}dt,$$

但是

$$\left\{(s)\int_S f_t^{(n)}dt\right\},\quad \left\{(s)\int_S g_t^{(n)}dt\right\}$$

都是

$$\left\{(s)\int_S h_t^{(n)}dt\right\}$$

的子序列，所以

$$(s)\lim_{n\to\infty}(s)\int_S f_t^{(n)}dt=(s)\lim_{n\to\infty}(s)\int_S g_t^{(n)}dt=h.$$

至此，定理2.1得证。

系1 设f_t是强可测的，则下列陈述等价：

(1) $\|f_t\|$在S上Lebesgue可积；

(2) 存在简单抽象函数列$\{f_t^{(n)}\}$，使

$\|f_t^{(n)}\|$Lebesgue可积，$(n\geqslant 1)$，

$(s)\lim\limits_{n\to\infty} f_t^{(n)}=f_t$，[$a.e.$] in S (μ^*)，

$$\lim_{n\to\infty}\int_S \|f_t^{(n)}-f_t\|dt=0,\quad \|f_t^{(n)}\|\leqslant 2\|f_t\|.$$

(3) 存在简单抽象函数列$\{f_t^{(n)}\}$，使

$(s)\lim\limits_{n\to\infty} f_t^{(n)}=f_t$，[$a.e.$] in S (μ^*)，

$$\lim_{n\to\infty}\int_S \|f_t^{(n)}-f_t\|dt=0,$$

$\|f_t^{(n)}\|$Lebesgue可积，$(n\geqslant 1)$.

证：(1)$\Longrightarrow$(2)．设(1)成立，因f_t是强可测的，由命题2.1得知存在简单抽象函数列$\{f_t^{(n)}\}$，使

$(s)\lim\limits_{n\to\infty} f_t^{(n)}=f_t$，[$a.e.$] in S (μ^*)，

$\|f_t^{(n)}\|\leqslant 2\|f_t\|$，从而$\|f_t^{(n)}\|$Lebesgue可积．

由$\|f_t^{(n)}-f_t\|\leqslant 3\|f_t\|$．及$\|f_t\|$在$S$上Lebesgue可积，用Lebesgue控制收敛定理可得：

$$\lim_{n\to\infty}\int_S \|f_t^{(n)}-f_t\|dt=\int_S \lim_{n\to\infty}\|f_t^{(n)}-f_t\|dt=0.$$

(2)$\Longrightarrow$(3)．显然成立．

(3)$\Longrightarrow$(1)．设(3)成立．取$\{f_t^{(n)}\}$满足(3)中条件．由

$\|f_t\|\leqslant\|f_t^{(n)}\|+\|f_t^{(n)}-f_t\|$，

$\|f_t^{(n)}\|$在S上Lebesgue可积，

$$\lim_{n\to\infty}\int_S \|f_t^{(n)}-f_t\|dt=0$$

可知

$\|f_t\|$在S上Lebesgue可积．

系1得证．

命题2.2 设f_t、g_t在S上Bochner可积，则

(1) $\alpha f_t+\beta g_t$在S上Bochner可积(α, $\beta\in R^1$)，且

$$(s)\int_S(\alpha f_t+\beta g_t)dt=\alpha\cdot(s)\int_S f_t dt+\beta\cdot(s)\int_S g_t dt.$$

(2) 若$A_n\in\mathscr{F}^1$, $A_n\subset S$, $A_n\cap A_m=\emptyset(m\neq n)$，则有

$$(s)\int_{\bigcup_{n=1}^{\infty}A_n} f_t dt=\sum_{n=1}^{\infty}(s)\int_{A_n}f_t dt. \tag{2.5}$$

(3) $$\|(s)\int_S f_t dt\|\leqslant\int_S\|f_t\|dt. \tag{2.6}$$

定理2.2（控制收敛定理） 设$\{f_t^{(n)}, n\geqslant1\}$是一串定义在$S$上的Bochner可积的抽象函数，而且$\|f_t^{(n)}\|\leqslant\|g_t\|$，$\|g_t\|$ Lebesgue可积，

$$f_t=(s)\lim_{n\to\infty}f_t^{(n)},\ [a.e.]\ in\ S\ (\mu^*), \tag{2.7}$$

则f_t在S上也Bochner可积，而且

$$(s)\int_S f_t dt=(s)\lim_{n\to\infty}(s)\int_S f_t^{(n)}dt. \tag{2.8}$$

证：由(2.7)及范数的连续性有

$$\|f_t\|=\lim_{n\to\infty}\|f_t^{(n)}\|,\ [a.e.]\ in\ S\ (\mu^*), \tag{2.9}$$

由(2.7)知f_t是强可测的，从而$\|f_t\|$是Lebesgue可测的。显然，由(2.9)及$\|f_t^{(n)}\|\leqslant\|g_t\|$，$\|g_t\|$是Lebesgue可积的得知$\|f_t\|$是Lebesgue可积的。因此，由定理2.1得知$f_t$是Bochner可积的。

又因为

$$\|(s)\int_S f_t^{(n)}dt-(s)\int_S f_t dt\|\leqslant\int_S\|f_t^{(n)}-f_t\|dt,$$

$\|f_t^{(n)}-f_t\|\leqslant2\|g_t\|$，$\|g_t\|$是Lebesgue可积的，

$\lim\limits_{n\to\infty}\|f_t^{(n)}-f_t\|=0$, $[a.e.]\ in\ S\ (\mu^*)$,

所以