一阶偏微分方程手册

E. 卡姆克 著

科 学 出 版 社

Y2293

一阶偏微分方程手册

E. 卡姆克 著

李鸿祥 译

黄克欧 校

科 学 出 版 社

1 9 8 3

内 容 简 介

本手册是作者的《常微分方程手册》一书的姊妹篇，专讲一个未知函数的一阶偏微分方程．其中第一部分简要地叙述了关于一阶偏微分方程(组)的一些基本概念、一般解法和许多重要结果；第二部分收集了附有解和解法(或解法提要)的近 400 个一阶偏微分方程(组)．

本手册是根据俄译本翻译的；可供数学、力学、物理学等方面的研究人员、工程技术人员和高等院校有关专业的教师、学生使用．

E. Kamke

DIFFERENTIALGLEICHUNGEN

LÖSUNGSMETHODEN UND

LÖSUNGEN

II

PARTIELLE

DIFFERENTIALGLEICHUNGEN

ERSTER ORDNUNG

FÜR EINE GESUCHTE FUNKTION

一阶偏微分方程手册

E. 卡姆克 著

李鸿祥 译

黄克欧 校

责任编辑 张鸿林

科学出版社出版

北京朝阳门内大街 137 号

中国科学院印刷厂印刷

新华书店北京发行所发行 各地新华书店经售

*

1983 年 6 月第 一 版　　开本：787×1092 1/32

1983 年 6 月第一次印刷　　印张：11　　插页：精 3

印数：0001— 12,400　　字数：246,000

统一书号：13031—2239

本社书号：3062·13—1

定价：2.30 元

译　　序

E. 卡姆克著《微分方程(解法和解)》一书的内容非常丰富，是数学方面的重要工具书. 第一卷讲述常微分方程，1977 年科学出版社出版了张鸿林译的中文本，名为《常微分方程手册》；本手册为该书的第二卷，它是前一手册的姊妹篇，专讲一个未知函数的一阶偏微分方程. 其中第一部分简要地叙述了关于一阶偏微分方程(组)的一些基本概念，一般解法和许多重要结果；第二部分收集了附有解和解法(或解法提要)的近 400 个一阶偏微分方程(组).

因为求一阶偏微分方程的积分，原则上归结为求某个常微分方程组的积分，所以在许多常微分方程教程或专著中都附有偏微分方程的这部分内容. 一阶偏微分方程早先主要出现在几何问题中，这方面的一些必要的理论结果早已得到. 因此，对于这种方程的研究曾一度低落下来. 后来由于一阶拟线性方程的所谓广义解激起了人们对于应用方面（例如在气体动力学的冲击波理论中，等等)的特别兴趣，关于这种方程的研究又活跃起来. 但是，就汇集和叙述在一阶偏微分方程的理论和求解方法方面的成果来说，国内尚无这样的专著，国外也很少见. 本手册在某种程度上填补了这个空白. 由于本手册是在四十年代初期编著的，所以关于拟线性方程的广义解理论在手册中没有任何反映；另外，在本手册中也没有阐明波发夫方程理论. 虽然如此，本手册仍不失为一本关于一阶偏微分方程古典理论的有益指南.

本手册是根据其 1966 年的俄译本（译自 1959 年德文第

四版)翻译并参照1956年的德文第三版校订的．关于参考文献，在俄译本中列出或增加的，均已收入，其中有中译本者也予注明；被俄译者删去或以俄译本代替的，凡属重要者，都据德文版补上．特别地，补上了多处引用的R．柯朗和D．希尔伯特的经典名著《数学物理方法II》(目前国内已有该书1962年英文改写版的中译本)．参考文献中采用的缩写列于书末．在手册中一些费解或交待不清之处，添加了译(校)者注．俄译本中的印刷错误和其它错误较多，除与德文版一起都错的地方加注指出外，其它就不再一一说明．

本手册在翻译过程中，黄克欧教授给予译者许多指导，并在暑假中校订本手册；母校的叶彦谦教授在百忙之中及时回答了译者向他请教的问题；俞兰芳同志校读了全部译稿，并编制了索引．这里谨向他们表示衷心的感谢．

限于译者水平，译文中可能存在不少缺点和错误．欢迎读者批评指正．

译　者

试读结束，需要全本PDF请购买 www.ertongbook.com

某些记号与缩写

x, y; x_1, $\cdots$, x_n; y_1, $\cdots$, y_n 表示自变量.

$\boldsymbol{r}=(x_1, \cdots, x_n)$.

a, b, c; A, B, C 表示常数,常系数.

$\mathfrak{G}$, $\mathfrak{G}(x, y)$, $\mathfrak{G}(\boldsymbol{r})$ 表示开区域, x, y 平面上的区域, 空间变量 x_1, $\cdots$, x_n 的区域[通常是系数和解的连续性区域. ——俄译本编者注.]

$\mathfrak{g}$ 表示子域.

F, f 表示一般函数.

Ω 表示任意函数.

z; $z(x, y)$; $z=\psi(x_1, \cdots, x_n)$ 表示未知函数,解.

$p=\dfrac{\partial z}{\partial x}$, $q=\dfrac{\partial z}{\partial y}$, $p_\nu=\dfrac{\partial z}{\partial x_\nu}$, $q_\nu=\dfrac{\partial z}{\partial y_\nu}$.

ν, μ, k, n 表示求和指标,足码.

$\dbinom{m}{n}=\dfrac{m!}{n!(m-n)!}$.

$\det|z_{k\nu}|$ 表示矩阵 $\begin{pmatrix} z_{11}\cdots z_{1n} \\ \cdots\cdots \\ z_{n1}\cdots z_{nn} \end{pmatrix}$ 的行列式.

目　　录

试读结束，需要全本PDF请购买 www.ertongbook.com

第二部分 各种微分方程

第一部分　一般解法[1]

第一章　线性与拟线性微分方程

§1. 引　　言

1.1. 一般概念．记号及术语． n 个自变量的一个未知函数 $z=z(x_1,\cdots,x_n)$ 的一阶偏微分方程，其一般(未解出导数)形式是

$$F\left(x_1,\cdots,x_n,z,\frac{\partial z}{\partial x_1},\cdots,\frac{\partial z}{\partial x_n}\right)=0, \qquad (1)$$

其中 F 是 $2n+1$ 个变量的已知函数．任一个函数 $z=\psi(x_1,\cdots,x_n)$，如果它在区域 $\mathfrak{G}(x_1,\cdots,x_n)$ 内具有连续的一阶偏导数[2]，而且它同它的导数能满足方程 (1)，则称它为微分方程 (1) 的解，也称它为方程 (1) 的积分或积分曲面．

所谓一阶偏微分方程的标准(或典则)形式，就是从方程 (1) 对其中一个偏导数解出的显式：

$$\frac{\partial z}{\partial x}=f\left(x,y_1,\cdots,y_n,z,\frac{\partial z}{\partial y_1},\cdots,\frac{\partial z}{\partial y_n}\right); \qquad (2)$$

---

1) [第一部分中所讨论的问题可在下列作者的著作中找到本手册参考文献中采用的缩写列于书末． Гюнтер; Степанов; Трикоми; Петровский; Курант; Смирнов; Эльсгольц; Рашевский. ——俄译本编者注]

2) 对于显式的常微分方程，从方程右端的连续性，立刻可以看出这方程的每一个解的导数的连续性；然而对于偏微分方程，这是不可能的．所以偏微分方程 (1) 或 (2) 的解的偏导数的连续性，是作为解的定义中一个特殊规定而提出的．

这里 f 是 $2n+2$ 个变量的已知函数[1]；自变量现在用 $x, y_1, \cdots, y_n$ 来表示，$z = z(x, y_1, \cdots, y_n)$ 是未知函数.

我们将时常采用缩写记号：

$$p = \frac{\partial z}{\partial x}, \quad p_\nu = \frac{\partial z}{\partial x_\nu}, \quad q_\nu = \frac{\partial z}{\partial y_\nu}, \nu = 1, \cdots, n; \tag{3}$$

于是微分方程 (1) 和 (2) 分别呈下面形状

$$F(x_1, \cdots, x_n, z, p_1, \cdots, p_n) = 0, \tag{1'}$$

与

$$p = f(x, y_1, \cdots, y_n, z, q_1, \cdots, q_n). \tag{2'}$$

这两个方程可简写成向量形式

$$F(\boldsymbol{r}, z, \boldsymbol{p}) = 0 \tag{1''}$$

与

$$p = f(x, \boldsymbol{y}, z, \boldsymbol{q}). \tag{2''}$$

其中 $\boldsymbol{r}, \boldsymbol{p}, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{q}$ 分别表示下列向量：

$$\begin{aligned} \boldsymbol{r} &= (x_1, \cdots, x_n), \ \boldsymbol{p} = (p_1, \cdots, p_n), \\ \boldsymbol{y} &= (y_1, \cdots, y_n), \ \boldsymbol{q} = (q_1, \cdots, q_n). \end{aligned} \tag{3'}$$

一个偏微分方程，如果关于未知函数 z 及其偏导数是线性的，则称它是线性的；如果关于偏导数是线性的（这里不要求关于 z 是线性的），则称它是拟线性的. 拟线性方程的一般形式是

$$\sum_{\nu=1}^{n} f_\nu(\boldsymbol{r}, z) p_\nu = g(\boldsymbol{r}, z), \tag{4}$$

---

1) 这里把方程中的自变量分为 x 同 $y_1, \cdots, y_n$ 两类；而把解的偏导数分为 p 同 $q_1, \cdots, q_n$ 两类，其用意是为了区别在方程中已解出的那个偏导数 $p = \frac{\partial z}{\partial x}$ 同尚未解出的那些偏导数 $q_\nu = \frac{\partial z}{\partial y_\nu}$, $\nu = 1, 2, \cdots, n$. ——译者注

线性方程的一般形式是

$$\sum_{\nu=1}^{n} f_\nu(\boldsymbol{r})p_\nu + f_0(\boldsymbol{r})z = f(\boldsymbol{r}). \tag{5}$$

这里已采用了缩写记号 (3) 和 (3′). 在后一式中，如果还有 $f_0 = f = 0$，则该微分方程称为齐次的.

1.2. 解的性态预述. 每个一阶偏微分方程都同某个常微分方程组（所谓这偏微分方程的特征方程组）紧密地联系着. 偏微分方程的解是由特征方程组的解(叫做特征线)构造而成的.

当偏微分方程 (1) 的解的初始曲线

$$x_1 = x_1(t), \cdots, x_n = x_n(t), z = z(t) \tag{6}$$

已给定时，如果这曲线处处不与特征线相切[1]，而且又设在这曲线上给有各一阶偏导数

$$\frac{\partial z}{\partial x_1}, \cdots, \frac{\partial z}{\partial x_n}$$

的值,则一般说,可以确定这偏微分方程的唯一的解. 对于线性(或拟线性)方程,只须给出初始曲线 (6)，就可以定出唯一的解.

这个基本命题的严格叙述将在以后给出，其中还给出一系列的补充假设. 所考虑的区域的形状对于解的性态(尤其是解的唯一性)有重大的影响(参看 §2.6(c)). 因此在以后的一般定理中，必须同时指出所考虑的区域. 在那些定理中通常不能考虑最一般的区域，而只考虑其形状尽可能简单的区域(例如整个空间,平行带形或长方形). 对于一些特殊解法，我们将不再给出所考虑的区域，因为应用这些方法于具体例子时,比一般情况将得到更精确的区域.

---

1) "处处不与特征线相切"这句话,德文本原作"初始曲线处处横截 (*quer*) 于特征线". ——校者注

试读结束，需要全本PDF请购买 www.ertongbook.com