

一阶偏微分方程手册

E. 卡姆克 著

科学出版社

y2293

一阶偏微分方程手册

E. 卡姆克 著

李鸿祥 译

黄克欧 校

科学出版社

1983

内 容 简 介

本手册是作者的《常微分方程手册》一书的姊妹篇,专讲一个未知函数的一阶偏微分方程。其中第一部分简要地叙述了关于一阶偏微分方程(组)的一些基本概念、一般解法和许多重要结果;第二部分收集了附有解和解法(或解法提要)的近400个一阶偏微分方程(组)。

本手册是根据俄译本翻译的;可供数学、力学、物理学等方面的研究人员、工程技术人员和高等院校有关专业的教师、学生使用。

E. Kamke

DIFFERENTIALGLEICHUNGEN
LÖSUNGSMETHODEN UND
LÖSUNGEN
II
PARTIELLE
DIFFERENTIALGLEICHUNGEN
ERSTER ORDNUNG
FÜR EINE GESUCHTE FUNKTION

一阶偏微分方程手册

E. 卡姆克 著

李鸿祥 译

黄克欧 校

责任编辑 张鸿林

科学出版社 出版

北京朝阳门内大街137号

中国科学院印刷厂印刷

新华书店北京发行所发行 各地新华书店经售

*

1983年6月第一版 开本:787×1092 1/32

1983年6月第一次印刷 印张:11 插页:3

印数:0001—12,400 字数:246,000

统一书号:13031—2239

本社书号:3062·13—1

定价: 2.30 元

译 序

E. 卡姆克著《微分方程(解法和解)》一书的内容非常丰富,是数学方面的重要工具书.第一卷讲述常微分方程,1977年科学出版社出版了张鸿林译的中文本,名为《常微分方程手册》;本手册为该书的第二卷,它是前一手册的姊妹篇,专讲一个未知函数的一阶偏微分方程.其中第一部分简要地叙述了关于一阶偏微分方程(组)的一些基本概念,一般解法和许多重要结果;第二部分收集了附有解和解法(或解法提要)的近400个一阶偏微分方程(组).

因为求一阶偏微分方程的积分,原则上归结为求某个常微分方程组的积分,所以在许多常微分方程教程或专著中都附有偏微分方程的这部分内容.一阶偏微分方程早先主要出现在几何问题中,这方面的一些必要的理论结果早已得到.因此,对于这种方程的研究曾一度低落下来.后来由于一阶拟线性方程的所谓广义解激起了人们对于应用方面(例如在气体动力学的冲击波理论中,等等)的特别兴趣,关于这种方程的研究又活跃起来.但是,就汇集和叙述在一阶偏微分方程的理论和求解方法方面的成果来说,国内尚无这样的专著,国外也很少见.本手册在某种程度上填补了这个空白.由于本手册是在四十年代初期编著的,所以关于拟线性方程的广义解理论在手册中没有任何反映;另外,在本手册中也没有阐明波发夫方程理论.虽然如此,本手册仍不失为一本关于一阶偏微分方程古典理论的有益指南.

本手册是根据其1966年的俄译本(译自1959年德文第

四版)翻译并参照 1956 年的德文第三版校订的. 关于参考文献, 在俄译本中列出或增加的, 均已收入, 其中有中译本者也予注明; 被俄译者删去或以俄译本代替的, 凡属重要者, 都据德文版补上. 特别地, 补上了多处引用的 R. 柯朗和 D. 希尔伯特的经典名著《数学物理方法 II》(目前国内已有该书 1962 年英文改写版的中译本). 参考文献中采用的缩写列于书末. 在手册中一些费解或交待不清之处, 添加了译(校)者注. 俄译本中的印刷错误和其它错误较多, 除与德文版一起都错的地方加注指出外, 其它就不再一一说明.

本手册在翻译过程中, 黄克欧教授给予译者许多指导, 并在暑假中校订本手册; 母校的叶彦谦教授在百忙之中及时回答了译者向他请教的问题; 俞兰芳同志校读了全部译稿, 并编制了索引. 这里谨向他们表示衷心的感谢.

限于译者水平, 译文中可能存在不少缺点和错误. 欢迎读者批评指正.

译 者

某些记号与缩写

$x, y; x_1, \dots, x_n; y_1, \dots, y_n$ 表示自变量.

$\mathbf{r} = (x_1, \dots, x_n)$.

$a, b, c; A, B, C$ 表示常数, 常系数.

$\mathcal{G}, \mathcal{G}(x, y), \mathcal{G}(\mathbf{r})$ 表示开区域, x, y 平面上的区域, 空间变量 x_1, \dots, x_n 的区域 [通常是系数和解的连续性区域. ——俄译本编者注.]

g 表示子域.

F, f 表示一般函数.

Ω 表示任意函数.

$z; z(x, y); z = \psi(x_1, \dots, x_n)$ 表示未知函数, 解.

$$p = \frac{\partial z}{\partial x}, \quad q = \frac{\partial z}{\partial y}, \quad p_\nu = \frac{\partial z}{\partial x_\nu}, \quad q_\nu = \frac{\partial z}{\partial y_\nu}.$$

ν, μ, k, n 表示求和指标, 足码.

$$\binom{m}{n} = \frac{m!}{n!(m-n)!}.$$

$\det |z_{k\nu}|$ 表示矩阵 $\begin{pmatrix} z_{11} & \dots & z_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ z_{n1} & \dots & z_{nn} \end{pmatrix}$ 的行列式.

目 录

某些记号与缩写	xi
---------	----

第一部分 一般解法

第一章 线性与拟线性微分方程	1
§ 1. 引言	1
1.1. 一般概念, 记号及术语	1
1.2. 解的性态预述	3
§ 2. 两个自变量的齐次线性方程: $f(x, y)p + g(x, y)q = 0$	4
2.1. 几何解释	4
2.2. 关于积分和等高线的注记	5
2.3. 特征线与积分曲面	8
2.4. 利用特征线求方程的解	10
2.5. 借助于特征方程的组合求解方程	11
2.6. 特殊情况: $p + f(x, y)q = 0$	13
2.7. 函数相关性和雅可比行列式(附录)	18
2.8. 主积分, 存在定理, 柯西问题	24
2.9. 关于利用级数展开的注记	26
2.10. 解法概述	27
§ 3. 一般的 n 个自变量的齐次线性方程:	
$\sum_{v=1}^n f_v(\mathbf{r}) p_v = 0$	27
3.1. 定义和注记	27
3.2. 特征线与积分曲面	28

3.3.	借助于特征方程的组合求解方程	29
3.4.	积分的基本组. 柯西问题	30
3.5.	特积分已知时方程的简化	32
3.6.	特殊情况: $p + \sum_{\nu=1}^n f_{\nu}(x, y)q_{\nu} = 0$	35
3.7.	积分的存在. 柯西问题的解	39
3.8.	雅可比乘子	40
3.9.	其它注记	43
3.10.	解法概述	43
§ 4.	一般线性方程: $\sum_{\nu=1}^n f_{\nu}(\mathbf{r})p_{\nu} + f_0(\mathbf{r})z = f(\mathbf{r})$	44
4.1.	定义	44
4.2.	化一般线性方程为齐次线性方程	44
4.3.	存在性与唯一性定理	46
4.4.	哈尔不等式	47
4.5.	$n = 2$ 的情况(补充定理)	48
§ 5.	拟线性方程: $\sum_{\nu=1}^n f_{\nu}(\mathbf{r}, z)p_{\nu} = g(\mathbf{r}, z)$	50
5.1.	几何解释	50
5.2.	特征线与积分曲面	51
5.3.	利用积分曲面的几何特性求解微分方程的例子	52
5.4.	化拟线性方程为齐次线性方程	56
5.5.	特殊情况: $p + \sum_{\nu=1}^n f_{\nu}(x, y, z)q_{\nu} = g(x, y, z)$	58
5.6.	柯西问题的解	61
5.7.	展成幂级数求解	63
5.8.	解法概述	63
§ 6.	线性方程组	64
6.1.	特殊情况: $p_{\nu} = f_{\nu}(\mathbf{r}), (\nu = 1, \dots, n)$	64
6.2.	一般线性方程组: 定义和记号	65

6.3.	对合组与完全组	68
6.4.	解雅可比组的梅耶方法	70
6.5.	完全组的性质	72
6.6.	齐次组	73
6.7.	齐次组的简化	76
6.8.	一般方程组的简化	81
6.9.	解法概述	82
§ 7.	拟线性方程组	83
7.1.	特殊情况	83
7.2.	一般拟线性方程组	85
第二章	两个自变量的非线性微分方程	87
§ 8.	一般概念、记号及术语	87
8.1.	方程的几何解释	87
8.2.	特征(条)的几何解释	89
8.3.	条形的定义	91
8.4.	特征方程组的导出	91
8.5.	推导特征方程组的其它方法	93
8.6.	正常面元素, 奇异面元素	97
8.7.	特征条, 积分条与积分曲面	98
8.8.	特积分, 奇积分, 全积分, 通积分	99
§ 9.	拉格朗日方法	101
9.1.	首次积分	101
9.2.	由两个非显见的首次积分求全积分	104
9.3.	由一个非显见的首次积分求全积分	107
9.4.	由两个非显见的首次积分求单参数积分族	109
9.5.	由一个全积分求其它积分	110
9.6.	通过已给定的初始条形的积分曲面(柯西问题)	112
§ 10.	存在定理和某些其它解法	115
10.1.	正规柯西问题	115

10.2.	一般存在定理. 柯西特征方法	117
10.3.	特殊情况: $p=f(x, y, z, q)$	119
10.4.	解析函数情况下用幂级数求解	121
10.5.	用更一般的级数求解	122
10.6.	不等式与估值	126
10.7.	解法概述	126
§11.	两个自变量的特殊形状的非线性方程的解法	127
11.1.	$F(x, y, z, p) = 0$ 或 $F(x, y, z, q) = 0$	127
11.2.	$F(p, q) = 0$	127
11.3.	$F(z, p, q) = 0$	129
11.4.	$p = f(x, q)$ 或 $q = g(y, p)$	130
11.5.	$f(x, p) = g(y, q)$ 与 $F[f(x, p\varphi(z)), g(y, q\varphi(z))]$ $= 0$	130
11.6.	$f(x, p) + g(y, q) = z$	130
11.7.	$p = f\left(\frac{y}{x}, q\right), F\left(\frac{y}{x}, p, q, xp + yq - z\right) = 0$	131
11.8.	$F(xp + yq, z, p, q) = 0$	131
11.9.	$p^2 + q^2 = f(x^2 + y^2, yp - xq)$	131
11.10.	$F[f(x)p, g(y)q, z] = 0$	132
11.11.	$f(p, q) = xp + yq$; f 关于 p 及 q 是齐次的	133
11.12.	$z = xp + yq + f(p, q)$ 与 $F(p, q, z - xp - yq)$ $= 0$. 克莱罗方程	134
11.13.	$F(x, y, p, q) = 0$	136
11.14.	$F(x, y, z, p, q) = 0$. 勒让德变换	137
11.15.	$F(x, y, z, p, q) = 0$. 欧拉变换	138
11.16.	$F(xp - z, y, p, q) = 0$	139
11.17.	$xf(y, p, xp - z) + qg(y, p, xp - z) = h(y, p,$ $xp - z)$	139
11.18.	$qf(u) = xp - yq, xqf(u) = xp - yq, xf(u, p, q) +$ $yg(u, p, q) = h(u, p, q)$, 其中 $u = xp + yq -$	

第三章 n 个自变量的非线性微分方程与方程组 141

§ 12. n 个自变量的非线性方程: $F(\mathbf{r}, \mathbf{z}, \mathbf{p}) = 0$... 141

12.1 一般概念, 记号及术语..... 141

12.2 特征条形与积分曲面..... 143

12.3. 化方程为仅含有未知函数的导数的方程 145

12.4. 在解析函数情况下用幂级数求解 147

12.5. 一般存在定理, 柯西特征方法 147

12.6. 显式微分方程的解的存在性与唯一性定理, 存在
区域的估计..... 150

12.7. 全积分的存在定理, 由全积分求其它的积分..... 152

12.8. 雅可比解法 155

12.9. 特殊情况: $p = f(x, y, q)$ 156

12.10. 在力学中的应用 158

12.11. 不等式与估计 161

§ 13. n 个自变量的特殊形状的非线性方程的解法 ... 162

13.1. $F(\mathbf{p}) = 0$ 162

13.2. $F(\mathbf{z}, \mathbf{p}) = 0$ 163

13.3. $F[f_1(x_1, p_1\varphi(x)), \dots, f_n(x_n, p_n\varphi(x))] = 0$, 可
分离变量方程 163

13.4. 齐次方程 164

13.5. $F(\mathbf{r}, \mathbf{z}, \mathbf{p}) = 0$. 勒让德变换..... 165

13.6. $\sum_{\nu=1}^{k-1} p_\nu f_\nu = \sum_{\nu=k}^n x_\nu f_\nu - f_{n+1}$, 其中 $1 \leq k \leq n, f_\nu =$

$$f_\nu \left(x_1, \dots, x_{k-1}, p_k, \dots, p_n, \sum_{\nu=k}^n x_\nu p_\nu - z \right) \dots 166$$

13.7. $z = x_1 p_1 + \dots + x_n p_n + f(p_1, \dots, p_n)$.
克莱罗方程 167

§ 14. 非线性方程组..... 167

14.1.	显式方程组. 可积性条件	167
14.2.	解析函数范围内雅可比组的解的存在与唯一性定理	168
14.3.	雅可比组在实函数范围内的解的存在与唯一性定理. 用梅耶变换化雅可比组为一个方程	168
14.4.	雅可比括号, 泊松括号	171
14.5.	一般非线性方程组	172
14.6.	对合组与完全组	173
14.7.	不依赖于 z 的对合组的雅可比解法	174
14.8.	勒让德变换的应用	177
14.9.	一般方程组的雅可比解法	179

第二部分 各种微分方程

引言	183
第一章 仅含一个偏导数的微分方程	185
第二章 两个自变量的线性与拟线性微分方程	187
1—12. $f(x, y)p + g(x, y)q = 0$	187
13—19. $f(x, y)p + g(x, y)q = h(x, y)$	192
20—31. $f(x, y)p + g(x, y)q = h_1(x, y)z + h_0(x, y)$	194
32—43. $f(x, y)p + g(x, y)q = h(x, y, z)$	198
44—59. $f(x, y, z)p + g(x, y, z)q = h(x, y, z)$, 函数 f, g 关于 z 是线性的	203
60—65. $f(x, y, z)p + g(x, y, z)q = h(x, y, z)$, 函数 f, g 关于 z 不高于二次	209
66—71. 其它拟线性方程	210
第三章 三个自变量的线性与拟线性微分方程	213
1—19. $f(x, y, z)w_x + g(x, y, z)w_y + h(x, y, z)w_z$ $= 0$, 函数 f, g, h 的次数不超过 1	213
1—6. 单项系数	213

7—11. 二项系数	214
12—19. 三项系数	215
20—41. $f(x, y, z)w_x + g(x, y, z)w_y + h(x, y, z)w_z = 0$, 函数 f, g, h 的次数不超过 2	220
20—27. 单项系数	220
28—38. 二项系数	221
39—41. 三项系数	223
42—59. $f(x, y, z)w_x + g(x, y, z)w_y + h(x, y, z)w_z = 0$, 其它情况	223
60—64. 一般线性与拟线性微分方程	230
第四章 四个和更多个自变量的线性与拟线性微分方程	233
第五章 线性与拟线性微分方程组	240
1—2. 两个自变量	240
3—9. 三个自变量	241
10—17. 四个自变量, 两个方程	244
18—23. 四个自变量, 三个方程	247
24—29. 五个自变量, 两个方程	250
30—32. 五个自变量, 三个或四个方程	254
33—36. 其它方程组	255
第六章 两个自变量的非线性微分方程	259
1—13. $ap^2 + \dots$	259
14—20. $f(x, y, z)p^2 + \dots$	262
21—33. $apq + \dots$	265
34—42. $f(x, y)pq + \dots$	269
43—48. $f(z)pq + \dots$	276
49—54. $(\dots)p^2 + (\dots)pq + \dots$	277
55—68. $ap^2 + bq^2 = f(x, y), f(x, y, z)$	279
69—74. $f(x, y)p^2 + g(x, y)q^2 = h(x, y, z)$	284
75—80. $f(x, y, z)p^2 + g(x, y, z)q^2 = h(x, y, z)$	289

81—88.	$(\dots)p^2 + (\dots)q^2 + (\dots)p + (\dots)q + \dots$	291
89—111.	$(\dots)p^2 + (\dots)q^2 + (\dots)pq + \dots$	294
112—127.	关于 p, q 为三次与四次的方程	304
128—139.	其它非线性方程	307
第七章	三个自变量的非线性微分方程	311
1—7.	含有一个或两个导数二次项的方程	311
8—14.	含有多于两个导数二次项且有常系数的方程	313
15—21.	含有导数二次项的其它方程	315
22—31.	含有更高次导数的方程	318
第八章	多于三个自变量的非线性微分方程	322
第九章	非线性微分方程组	329
	参考文献中采用的缩写	333
	部分外国人姓氏中外文对照表	336
	索引	337

第一部分 一般解法^D

第一章 线性与拟线性微分方程

§1. 引言

1.1. 一般概念. 记号及术语. n 个自变量的一个未知函数 $z = z(x_1, \dots, x_n)$ 的一阶偏微分方程, 其一般(未解出导数)形式是

$$F\left(x_1, \dots, x_n, z, \frac{\partial z}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial z}{\partial x_n}\right) = 0, \quad (1)$$

其中 F 是 $2n + 1$ 个变量的已知函数. 任一个函数 $z = \psi(x_1, \dots, x_n)$, 如果它在区域 $\mathcal{G}(x_1, \dots, x_n)$ 内具有连续的一阶偏导数²⁾, 而且它同它的导数能满足方程 (1), 则称它为微分方程 (1) 的解, 也称它为方程 (1) 的积分或积分曲面.

所谓一阶偏微分方程的标准(或典则)形式, 就是从方程 (1) 对其中一个偏导数解出的显式:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = f\left(x, y_1, \dots, y_n, z, \frac{\partial z}{\partial y_1}, \dots, \frac{\partial z}{\partial y_n}\right); \quad (2)$$

1) [第一部分中所讨论的问题可在下列作者的著作中找到本手册参考文献中采用的缩写列于书末. Гюнтер; Степанов; Трикоми; Петровский; Курант; Смирнов; Эльсгольц; Рашевский. —俄译本编者注]

2) 对于显式的常微分方程, 从方程右端的连续性, 立刻可以看出这方程的每一个解的导数的连续性; 然而对于偏微分方程, 这是不可能的. 所以偏微分方程 (1) 或 (2) 的解的偏导数的连续性, 是作为解的定义中一个特殊规定而提出的.

这里 f 是 $2n + 2$ 个变量的已知函数¹⁾；自变量现在用 x, y_1, \dots, y_n 来表示, $z = z(x, y_1, \dots, y_n)$ 是未知函数。

我们将时常采用缩写记号:

$$p = \frac{\partial z}{\partial x}, \quad p_\nu = \frac{\partial z}{\partial x_\nu}, \quad q_\nu = \frac{\partial z}{\partial y_\nu}, \quad \nu = 1, \dots, n; \quad (3)$$

于是微分方程 (1) 和 (2) 分别呈下面形状

$$F(x_1, \dots, x_n, z, p_1, \dots, p_n) = 0, \quad (1')$$

与

$$p = f(x, y_1, \dots, y_n, z, q_1, \dots, q_n). \quad (2')$$

这两个方程可简写成向量形式

$$F(\mathbf{r}, z, \mathbf{p}) = 0 \quad (1'')$$

与

$$\mathbf{p} = f(x, \mathbf{y}, z, \mathbf{q}). \quad (2'')$$

其中 $\mathbf{r}, \mathbf{p}, \mathbf{y}, \mathbf{q}$ 分别表示下列向量:

$$\mathbf{r} = (x_1, \dots, x_n), \quad \mathbf{p} = (p_1, \dots, p_n), \quad (3')$$

$$\mathbf{y} = (y_1, \dots, y_n), \quad \mathbf{q} = (q_1, \dots, q_n).$$

一个偏微分方程, 如果关于未知函数 z 及其偏导数是线性的, 则称它是线性的; 如果关于偏导数是线性的(这里不要关于 z 是线性的), 则称它是拟线性的。拟线性方程的一般形式是

$$\sum_{\nu=1}^n f_\nu(\mathbf{r}, z) p_\nu = g(\mathbf{r}, z), \quad (4)$$

1) 这里把方程中的自变量分为 x 同 y_1, \dots, y_n 两类; 而把解的偏导数分为 p 同 q_1, \dots, q_n 两类, 其用意是为了区别在方程中已解出的那个偏导数

$p = \frac{\partial z}{\partial x}$ 同尚未解出的那些偏导数 $q_\nu = \frac{\partial z}{\partial y_\nu}, \nu = 1, 2, \dots, n$ 。——译者注

者注

线性方程的一般形式是

$$\sum_{\nu=1}^n f_{\nu}(\mathbf{r})p_{\nu} + f_0(\mathbf{r})z = f(\mathbf{r}). \quad (5)$$

这里已采用了缩写记号(3)和(3')。在后一式中,如果还有 $f_0 = f = 0$, 则该微分方程称为齐次的。

1.2. 解的性态预述. 每个一阶偏微分方程都同某个常微分方程组(所谓这偏微分方程的特征方程组)紧密地联系着。偏微分方程的解是由特征方程组的解(叫做特征线)构造而成的。

当偏微分方程(1)的解的初始曲线

$$x_1 = x_1(t), \dots, x_n = x_n(t), z = z(t) \quad (6)$$

已给定时,如果这曲线处处不与特征线相切¹⁾,而且又设在这曲线上给有各一阶偏导数

$$\frac{\partial z}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial z}{\partial x_n}$$

的值,则一般说,可以确定这偏微分方程的唯一的解。对于线性(或拟线性)方程,只须给出初始曲线(6),就可以定出唯一的解。

这个基本命题的严格叙述将在以后给出,其中还给出一系列的补充假设。所考虑的区域形状对于解的性态(尤其是解的唯一性)有重大的影响(参看 § 2.6(c))。因此在以后的一般定理中,必须同时指出所考虑的区域。在那些定理中通常不能考虑最一般的区域,而只考虑其形状尽可能简单的区域(例如整个空间,平行带形或长方形)。对于一些特殊解法,我们将不再给出所考虑的区域,因为应用这些方法于具体例子时,比一般情况将得到更精确的区域。

1) “处处不与特征线相切”这句话,德文本原作“初始曲线处处横截(quer)于特征线”。——校者注