北京师范大学现代数学丛书

无穷粒子马尔可夫过程引论

严士健 著

北京师范大学出版社

内 容 简 介

本书介绍了无穷粒子马尔可夫过程的基本理论。包括过程的存在唯一性定理及其对过程遍历性的应用；目前研究此类过程的一些常用方法——可逆性，耦合与对偶；结合这些方法讨论一些典型模型的基本性质：(1) 吉布斯 (Gibbs) 随机场与可逆测度的关系，(2)伊辛 (Ising) 模型的相变，(3)基本接触过程的临界值的存在及估计，(4)选举过程的不变概率测度的构造及遍历理论。

本书可供概率论、数学物理与统计物理专业研究生及有关专业的教师及科学技术工作者参考。

北京师范大学现代数学丛书
无穷粒子马尔可夫过程引论
严士健 著
*
北京师范大学出版社出版发行
全 国 新 华 书 店 经 销
中国科学院印刷厂印刷

开本：850×1168 1/32 印张：9 875 字数：239 千
1989 年 6 月第 1 版 1989 年 6 月第 1 次印刷
印数：1—2 000

ISBN 7-303-00491-2/O·98

定价：(平) 6.20元
(精) 8.20元

序　言

很早(1980)就想写一本关于无穷粒子马尔可夫过程的书，向我国读者介绍概率论的这一分支，几经寒暑，数易其稿，虽然未尽如意，总算和大家见面了。

无穷粒子马尔可夫过程 Gibbs 随机场以及有关的一些概率论分支(如渗流，随机介质等)是近二十年国际概率论界、数学物理学家十分关注的一些新研究领域。它们的共同特点是一方面有物理、化学、生物等方面的深刻客观背景，另一方面又以近代概率论为工具并且向它提出了挑战性的数学问题。因此引起国际上的广泛兴趣。

我注意到这个方向并对之发生兴趣是在 1977 年，当时正在考虑如何恢复已停顿了十三年之久的概率论科学研究的问题。我一方面在我校量子力学小组的讨论班上，听方福康同志介绍 I. Prigogine 关于非平衡统计物理研究的一些进展，并对一些概率模型进行了一些分析[14]；另一方面又从国外来访学者那里听到了 Dobrushin 有关 Gibbs 随机场的理论和平衡态统计物理中相变的概率论研究。当时我就萌发了一种想法：在相变的概率论研究与非平衡相变研究之间能否有某种联系与沟通。随后在 1978 年我们组织了讨论班，开始学习关于 Gibbs 随机场(态)的理论[22]。稍后于 1979 年看到了 T. M. Liggett 关于无穷粒子马尔可夫过程的综合性文章[38]，感觉到它所讨论的内容也许与上述想法和我们的基础更加接近。我们在讨论班上认真学习和讨论了这篇文章，我报告了其中的大部分。由于它写得十分简练，在集体的努力下补充了它的证明细节，并由此逐步开展了一些科学研究，特别是在

侯振挺与陈木法提出的场论的基础上，开展了速度函数的有势性与可逆性及可逆测度与 Gibbs 随机场的关系的研究。这就是本书内容的最初维型。

随着学习的逐步深入，我觉得向我国的概率论同行特别是年青的同志介绍和推荐这一新的概率论分支是值得的和必要的。于是在 1981 学年度，结合研究生的教学，由我将上述内容加以整理由北京师大数学系油印成讲义。这份讲义在国内一些兄弟单位也使用过。本来希望在这个基础上整理出版，但是由于种种原因延搁下来了。近三年来，在北京师范大学出版社的同志以及我们小组的同志的支持与鼓励下，才得以完成。在整理的过程中，我参考了新近出版的一些专著，对讲义作了一些补充与修改。

本书的目的是向读者介绍无穷粒子马尔可夫过程的一些最基本的内容。以期读者通过本书能对它的一些基本问题和某些研究方法有所了解和掌握，为进一步学习与研究打一个基础。具体点说，第一章介绍了紧空间上无穷粒子马尔可夫过程存在唯一性定理，方法采用的是半群方法。第二章讨论了速度函数的可逆性与有势性，可逆测度与 Gibbs 随机场的一些基本问题，方法上采用了场论方法。第三章主要是介绍了基本耦合方法及其对吸引模型的遍历性的应用，还介绍了应用一种三元耦合使一般自旋模型归结为吸引的情形。第四章介绍了对偶方法及其应用。书中所介绍的各种方法落实到了几个典型模型的重要问题：(1) 伊辛模型的相变存在问题(§3.4)。(2) 选举模型的不变概率测度集的构造及其极点的吸引场的刻划(§4.3)。(3) 基本接触过程的临界值的存在及上、下方估计问题(§3.3，§4.4)。此外还列举了一些模型作为例子。

在本书正文之后，我还写了一个后记。一方面介绍了与无穷粒子马尔可夫过程有关的国外文献；另一方面，着重介绍了我国从 1983 年来关于无穷维反应扩散模型的研究现状及有关文献。这

些成果也许可以印证我以前的想法，即在相变的概率论研究与非平衡相变(分岔现象)之间确有联系并还有许多事情可作。希望这些介绍能引起读者的兴趣。

如前所述，本书的完成实际上是我们集体一个阶段工作的产物，其中陈木法、丁万鼎、刘秀芳、郑小谷、唐守正诸位同志自始至终参加了本书的讨论班并且在补充证明细节上都尽了努力，书中有些内容就是他们的科研成果。以后历届的无穷粒子系统方向的研究生中都对本书的初稿提出各种修改意见。在本书即将出版的时候，我向他们表示由衷的谢意。我还要衷心感谢柳藩同志在整理书稿的各方面做了很多工作。最后，我衷心感谢北京师范大学出版社在本书出版过程中对我的全力支持并且给予了多方面的帮助，没有这些，本书是不可能出版的。

由于作者水平有限，错误和不妥之处在所难免，衷心欢迎同行及读者的各种批评和建议。

严士健

1989春节于北京师范大学

目　　录

导言　问题的提出

无穷粒子马尔可夫过程是从 70 年代开始发展起来的一个新的概率论分支，它有深刻的统计物理背景。在发展过程中，又发现它与其他科学的一些问题有联系，陆续提出了一大批各种各样的模型。对概率论（特别是随机过程）提出了一系列深刻的需要解决的问题。因此受到国际上概率论学者的普遍重视，也引起其他学科的部分专家的兴趣。在这里我们将从介绍伊辛模型与接触模型出发，引出无穷粒子马尔可夫过程的概念和它的一些主要问题，希望使读者对它有一个初步的具体印象并引起兴趣。

1. 伊辛（Ising）模型是为了讨论铁磁体的性质（特别是相变现象）而引入的，是统计物理中最著名的模型之一。我们先介绍它的最简单情形，即紧邻模型。

用 Z^d 表示 d 维整点（即 d 维空间中坐标为整数的点）全体组成的集。设想有一个粒子系统，它在每一整点 $u\in Z^d$ 上有一粒子，每个粒子有两个可能的状态——正自旋与负自旋——分别用 $+1$ 与 -1 表示。对于任意两个位置 $u,v\in Z^d$ 上的粒子，有一个交互作用强度

$$(1.1)\qquad J(u,\ v)=\begin{cases}1, & |u-v|=1,\\ 0, & |u-v|\neq 1,\end{cases}$$

其中 $|u|,u\in Z^d$，表示向量 u 的欧几里得长度，即若 $u=(u_1,\cdots,u_d)$，则

$$|u|=\left[\sum_{i=1}^{d}u_i^2\right]^{1/2}.$$

条件(1.1)便是紧邻性，即只有相邻的粒子才有交互作用。这便是 d 维铁磁体(紧邻)**伊辛模型**.

我们用 $\xi(u)$ (或 ξ_u), $u\in Z^d$, 表示位于 u 处的粒子的状态(当然 $\xi(u)=1$ 或 -1),那么集 $\xi=\{\xi(u): u\in Z^d\}$ 自然就表示整个粒子系统的一个状态，按照物理的习惯称之为组态. 考虑系统随时间发展的演化过程. 记系统在时刻 $t\in[0,\infty)$ 的组态为 $\xi_t=\{\xi_t(u):u\in Z^d\}$, 问对任何 $\beta>0$, 是否有一马尔可夫过程使对任何 u, $v\in Z^d$, $u\neq v$, 及任何初始组态 $\xi=\{\xi(u): u\in Z^d\}$ 满足: 当 $t\to 0$ 时有

$$(1.2)\quad \begin{aligned} &P_\xi(\xi_t(u)\neq\xi(u))=\left(\exp\left\{-\beta\sum_{v:|v-u|=1}\xi(u)\xi(v)\right\}\right)t+o(t),\\ &P_\xi(\xi_t(u)\neq\xi(u),\xi_t(v)\neq\xi(v))=o(t).\end{aligned}$$

易见这个过程是与 β 有关的. (1.2) 的含意是在 $t=0$ 这一瞬间, $u\in Z^d$ 的粒子的状态改变的概率速率是

$$\exp\left\{-\beta\sum_{v:|v-u|=1}\xi(u)\xi(v)\right\},$$

两个粒子同时改变状态的概率速率是 0. 这个过程称之为具参数 β 的 **d 维紧邻伊辛过程**.

可以证明 d 维紧邻伊辛过程总是存在的. 并且当 $d=1$ 时，对任何 $\beta>0$, 它的不变测度(即平稳分布)是唯一的;当 $d\geqslant 2$ 时存在 $\beta_c^{(d)}\in(0,\infty)$ 使当 $\beta<\beta_c^{(d)}$ 时不变测度唯一，当 $\beta>\beta_c^{(d)}$ 时不变测度不唯一. 用统计物理的术语来说就是: 当 $d=1$ 时紧邻伊辛模型没有**相变**,当 $d\geqslant 2$ 时紧邻伊辛模型有相变, $\beta_c^{(d)}$ 称为**临界点**. 对 $d=2$, 还算出了

$$\beta_c^{(2)}=2^{-1}\operatorname{arcsin}h(1)\approx 0.44.$$

当 $\beta\geqslant\beta_c^{(2)}$ 时它的任何不变测度都是两个给定的不变测度 μ^+,μ^- 的凸组合 $\alpha\mu^++(1-\alpha)\mu^-$, $0\leqslant\alpha\leqslant 1$. 至于 $d\geqslant 3$ 的情形,除了 $\beta_c^{(d)}$ 的存在及 $\beta_c^{(3)}\leqslant\beta_c^{(2)}$ 外,几乎一无所知[44, §1, $Ex3$]. 这是一个至今没有解决的对统计物理及无穷粒子马尔可夫过程都重

要的著名问题.

2. 伊辛模型是平衡态统计物理的一个重要模型，下面我们介绍的基本接触模型则是非平衡系统的一个简单的重要模型. 设想粒子系统在每一整点 $u\in Z^d$ 上有一个粒子，每个粒子有两个可能状态 0，1. 我们可以将它们分别理解为"健康"和病态"两种状态. 用 $\eta(u)$ (或 η_u)，$u\in Z^d$ 表示 u 处的粒子的状态，于是 $\eta(u)=0$ 或 1，那么集 $\eta=\{\eta(u):u\in Z^d\}$ 表示整个粒子系统的组态. 考虑系统随时间发展的演化过程. 设 $\lambda>0$ 为一任意给定的常数，系统在 $t=0$ 的组态为 η，它在 $t=0$ 的瞬间，u 处粒子的状变的概率速率为

$$c(u,\eta)=\begin{cases}1, & \eta(u)=1,\\ \lambda\sum\limits_{v:|v-u|=1}\eta(v), & \eta(u)=0.\end{cases}\tag{2.1}$$

按照上面的理解，这可以解释如下: $u\in Z^d$ 的粒子，如果原来处于病态，那么经过治疗成为健康的概率速率是 1；如果原来是健康的，那么它受紧邻的病态粒子的传染可能成为病态的，而被传染的概率速率是 $\lambda\sum\limits_{v:|v-u|=1}\eta(v)$ (即与它紧邻的病态粒子数成比例，比例常数是 λ). 按这种解释，可以认为它是一个大大简化了的模型，通常称它为 (d 维) **基本接触模型**(或传染病模型). 现在要问满足上述要求的随时间演化的过程存在吗? 即记系统在时刻 $t\in[0,\infty)$ 的组态为 $\eta_t=\{\eta_t(u):u\in Z^d\}$，问是否有一个马尔可夫过程 P_η，$\eta=\{\eta(u):u\in Z^d\}$，使对任何 u，$v\in Z^d$，$u\neq v$ 及任何初始组态 $\eta_0=\eta$ 满足: 当 $t\to 0$ 时有

$$\begin{aligned}&P_\eta(\eta_t(u)\neq\eta(u))=c(u,\eta)t+o(t),\\&P_\eta(\eta_t(u)\neq\eta(u),\eta_t(v)\neq\eta(v))=o(t).\end{aligned}\tag{2.2}$$

这个马尔可夫过程叫做具参数 λ 的 d 维**基本接触过程**.

我们将在以后证明: 对任何 $\lambda>0$，基本接触过程总是存在

的．现在对它作一点直观考查．当

$$\lambda < \frac{1}{2d}$$

时，

$$\lambda \sum_{v:|v-u|=1} \eta(v) < \frac{1}{2d} \cdot 2d = 1,$$

由关于(2.1)的解释，在每一 $u \in Z^d$ 处病态粒子被治好的概率速率要比健康粒子被传染成病态的速率要快，由此可以想像：不管过程从什么组态出发，当 $t \to \infty$ 时，系统的一切粒子终究会成为健康的，即系统的概率分布“最后”集中在组态 $\{\theta_u:u \in Z^d\}$，$\theta_u \equiv 0$．而这个概率分布按(2.1)的解释是过程的不变测度．以后将证明：存在 $\lambda_c^{(d)} \in (0,\infty)$使当 $\lambda < \lambda_c^{(d)}$ 时，不变测度唯一；当 $\lambda > \lambda_c^{(d)}$ 时，不变测度不唯一．而且

(2.3) $$(2d-1)^{-1} \leqslant \lambda_c^{(d)} \leqslant \frac{d}{2}.$$

至于 $\lambda_c^{(d)} = ?$ 则是一个没有解决的有兴趣的问题． 由于基本接触过程是一个简单的典型的非平衡系统，所以算出 $\lambda_c^{(d)}$ 或更精确估计 $\lambda_c^{(d)}$ 是有意义的．

3. 从上面两个例子很容易归纳出一类无穷粒子马尔可夫过程——自旋变相过程的概念．

设 S 为一可数集，它表示给定的无穷粒子系统所能占据的“位置”的集．每一位置 $u \in S$ 具有两个状态：0，1．系统的全体组态集

$$X \triangleq \{\eta:\eta \triangleq \{\eta(u):u \in S\},\ \eta(u) = 0 \text{ 或 } 1,\ u \in S\}.$$

在系统的组态为 η 时，位置 $u \in S$ 上的状态改变的概率速率为 $c(u,\eta)$，$u \in S$，$\eta \in X$． 用 η_t（或 $\eta(t)$）表示系统在时刻 $t \in [0,\infty)$ 的组态． 以 X 为组态空间的马尔可夫过程 $\{P_\eta:\ \eta \in X\}$，如果对任何 $u,v \in S$，$u \neq v$，$\eta \in X$，(2.2) 成立，那么就称为这个过程为

以 $c(u,\eta)$ 为**速度函数**的**自旋变相过程**. 当 $S=Z^d$, D 为 Z^d 的给定有限子集且

$$(3.1)\qquad c(u,\eta)=\begin{cases}1, & \eta(u)=1,\quad \lambda>0 \text{ 为常数},\\ \lambda\sum\limits_{v\in D}\eta(u+v), & \eta(u)=0,\quad u\in Z^d,\ \eta\in X\end{cases}$$

时,相应的自旋变相过程就称为(具有参数 λ 的 d 维)**接触过程**.当 $D=\{v:v\in Z^d,|v|=1\}$ 时,即为**基本接触过程**.

设 Φ 是定义在 S 的有限非空子集类上的实值函数且满足

$$\sum_{v\in A}|\Phi(A)|<\infty,\qquad \text{对任何}\ v\in S,$$

定义速度函数

$$(3.2)\qquad c(u,\eta)\triangleq\exp\left\{-\beta\sum_{A\ni u}\Phi(A)\cdot\prod_{v\in A}(2\eta(v)-1)\right\},u\in S,\ \eta\in X.$$

其中 $\beta>0$, 和式中的 A 遍历 $\ni u$ 的 S 的有限子集. 则与此速度函数相应的自旋变相过程称为(具参数 β 的)**伊辛过程**, Φ 称为伊辛模型的**交互作用势**. 在统计物理中, 通常是 $S=Z^d$ 且讨论**对势**的情形,即当 $|A|\geqslant 3$ 时, $\Phi(A)=0$. 有时还假定**平移不变性**,即 $\Phi(\{u,v\})=\Phi(\{u-v,0\}),u\neq v,\Phi(\{u\})=\Phi(\{0\})$. 若平移不变对势还满足**紧邻性**:

$$(3.3)\qquad \Phi(\{0,u\})=\begin{cases}1, & |u|=1,\\ 0, & |u|\neq 1.\end{cases}$$

则称此势为**紧邻的**. 当 (3.2) 中的 Φ 为紧邻势时相应的伊辛过程就是**紧邻伊辛过程**. 注意那里的 $\xi(u)$ 是此处的 $2\eta(u)-1$.

自旋变相过程的例子是丰富多采的,我们暂时介绍到此.

4. 我们再介绍一类无穷粒子马尔可夫过程——排它过程.

S,X 的意义和第 3 目一样, 但是现在系统的特性由两个位置

$u,v\in S$ 上的状态交换的概率速率 $c(u,v,\eta)$，$u,v\in S$，$\eta\in X$（当 $\eta(u)=\eta(v)$ 时，$c(u,v,\eta)=0$）给出．用 η_t（或 $\eta(t)$）表示无穷粒子系统在时刻 $t\in[0,\ \infty)$ 的组态．一个以 X 为状态空间的马尔可夫过程 $\{P_\eta:\eta\in X\}$ 如果满足条件：对任何三个不同的 u，$v,w\in S$ 及任何 $\eta\in X$，$\eta(u)\neq\eta(v)$，当 $t\to 0$ 时有

$$(4.1)\quad \begin{aligned} &P_\eta(\eta_t(u)=\eta(v),\ \eta_t(v)=\eta(u))=c(u,v,\eta)t+o(t),\\ &P_\eta(\eta_t(u)=\eta(v),\eta_t(v)=\eta(u),\eta_t(\omega)\neq\eta(w))=o(t),\end{aligned}$$

则称此过程为具有速度函数 $c(u,v,\eta)$ 的**排它过程**或**粒子运动过程**.

排它过程有一种直观解释如下：设想 $\eta(u)=0$，$\eta(u)=1$ 分别表示在 u 处没有粒子和有一粒子两种情况，于是 $\eta(u)\neq\eta(v)$ 就表示在 u，v 两处有一处有粒子而另一处没有粒子． 不妨设 $\eta(u)=1$，因而 $\eta(v)=0$，(4.1) 的第一式就表示系统的组态为 η 时 u 处粒子移至 v 处的概率速率为 $c(u,v,\eta)$，而第二式表示再有一个位置的粒子移动的概率速率就是零． 对 $\eta(u)=0$，$\eta(v)=1$ 的情形可作同样的解释． 这种解释的一个具体例子就是**格气模型**，它限制气体的分子只能在 S 的元上（当然这是一种简化了的情形）但不一定每一 $u\in S$ 上都有气体分子． 在格气模型中，速度函数

$$(4.2)\ c(u,v,\eta)=\begin{cases}\eta(u)c(u,\eta)p(u,v)+\eta(v)c(v,\eta)p(v,u),\\ \qquad\qquad\qquad\qquad \eta(u)\neq\eta(v),\\ 0,\quad \eta(u)=\eta(v),\quad u,v\in S,\quad \eta\in X,\end{cases}$$

其中 $p(u,v)\geqslant 0$，$p(u,u)=0$.

排它过程也可以有另外一种解释如下：设想系统由两种粒子组成，而且在每一 $u\in S$ 处有一粒子．状态 0,1 分别表示这两种粒子中的一种．那么 $c(u,v,\eta)$，$\eta(u)\neq\eta(v)$，就表示 u,v 两处的粒子不同，它们交换位置的概率速率．这种解释的一个具体例子就是合金模型．由于它的速度函数比较复杂，我们留待以后再

介绍.

5. 从数学上看无穷粒子马尔可夫过程，首先要讨论的是存在问题. 实际上最重要的恐怕是遍历性问题，它源于统计物理. 这里包括不变测度集的构造问题和吸引场问题. 对自旋变相过程来说,有不少系统是与一些参数有关的（例如伊辛过程中的 β, 接触过程中的 λ). 某些这种过程会出现如下的情况: 在参数取某些值时,不变测度唯一;而对参数的某些值,不变测度不唯一(伊辛过程和接触过程就是这样). 如果出现这种情况,我们就称过程有相变. 讨论过程有无相变通常是一个有兴趣的问题. 在有相变的情况下确切求出不变测度唯一与不唯一的参数域，求出不变测度集的构造(二维紧邻伊辛过程解决了这个问题)等等问题常常是困难而有兴趣的. 对排它过程来说,不变测度是不唯一的,找出它的一切不变测度是一个有兴趣的问题. 此外，与不变测度集构造有关的是对于平衡系统来说,有一部份不变测度称为 Gibbs 态(测度),它是由统计物理引伸出来的.它通常与过程的可逆测度紧密相关. 讨论 Gibbs 态、可逆测度与不变测度三者之间的关系是另一类有兴趣的问题.

吸引场问题是对过程的给定不变测度，寻求使过程的绝对分布（即 η_t 的概率分布）当 $t\to\infty$ 时弱收敛于此给定不变测度的一切初始分布. 特别当自旋变相过程的不变测度唯一时,人们自然希望讨论: 是否对任何初始分布，过程的绝对分布当 $t\to\infty$ 时都弱收敛于它的问题(即过程是遍历).

6. 自旋变相过程与排它过程只是两种特殊的无穷粒子马尔可夫过程，它们是在位置集可数且每个位置的状态只有两个的情况下，在瞬间只有一个位置的状态改变(自旋变相)或两个位置状态交换（排它过程）的模型，甚至两个位置的状态具有其它改变形式的情形都没有涉及. 当然可以考虑多个位置同时改变状态的模型,还可以进一步设想每个位置的状态不只两个,而是有限个甚至

是可数个等等更一般的情形，S 也可以不是可数集，而是更一般的集，例如 d 维实空间 R^d 等等。这些模型近来都有一些讨论。

7. 在本书中，我们主要讨论自旋变相过程和排它过程，其他无穷粒子马尔可夫过程在有关章节作些介绍。对于前两种过程也只讨论其中某些问题，结合问题介绍一些方法和技巧、若干动态及文献。作为有兴趣了解这一新分支的读者的一个导引，有志于在这个方向上深造的读者可以从有关专著及文献找到进一步学习的材料和研究问题。

第一章 存在性定理

这一章讨论无穷粒子马尔可夫过程的存在性．解决这个问题的途径可以应用半群理论，也可以应在耦合技巧由有穷粒子系统过渡到无穷粒子系统， 还可以应用鞅方法．本章采取半群方法．§1 先介绍要用到的有关半群的经典理论；§2 叙述一条无穷粒子系统马尔可夫过程一般的存在定理，并将应用于自旋变相过程、排它过程等具体情形；§3 证明 §2 中所述的一般定理；§4 讨论 §2 的存在定理对无穷粒子马尔可夫过程遍历性的应用，对一些具体例子进行了计算．

§1 半群理论中若干一般性结果

本节介绍若干在证明无穷粒子马尔可夫过程存在定理时要用到的半群理论的一般结果．有些常见的经典结果直接列出并指出参考资料．有些不太常见的则叙述结果并加以证明．

1. 定理 设W是一 Banach 空间(以后简称 B- 空间)， Ω 为 W中的线性算子， 则Ω是**W上连续压缩半群** $\{S(t):t\geqslant 0\}$ (即 $S(0)$ 为W上的单位算子；$\forall s,t\geqslant 0, S(t+s)=S(t)S(s)$；$\forall f\in W$，$\|S(t)f\|\leqslant\|f\|$，$\|\cdot\|$ 表W的范数；当 $t\to 0$ 时 $\|S(t)f-f\|\to 0$，$\forall f\in W$，成立)的无穷小母元的充要条件是

(1.1) Ω 的定义域 $\mathscr{D}(\Omega)$ 在W中稠；

(1.2) $\forall\lambda>0$ 充分小，$\mathscr{R}(I-\lambda\Omega)=W$，其中 $\mathscr{R}(\cdot)$ 表相应