电子数字计算机的运算器

M. A. 卡尔采夫

科 学 出 版 社

电子数字計算机的运算器

M. A. 卡尔朵夫 著

金 成 樑 譯

科 学 出 版 社

1963

М. А. КАРЦЕВ

АРИФМЕТИЧЕСКИЕ УСТРОЙСТВА ЭЛЕКТРОННЫХ ЦИФРОВЫХ МАШИН

Москва, 1958

内 容 簡 介

本书研討制造电子数字計算机的运算器的一般性問題：数的編碼系統的选擇；二进位加法器的制造；在二进制中完成乘法和除法的方法以及运算器的邏輯結构．书中不仅叙述了一些通用的方案，而且还根据运算速度和所需設备的量对这些方案作了全面的評述和比較．此外，书中还介紹一些新的研究成果．

本书是苏联国立莫斯科大学計算数学研究室編写的“应用分析学和計算数学丛书”中的一种．可供从事电子計算机設計的科学工作者和工程师以及有关专业的大学教师和高年級学生参考．

电子数字計算机的运算器

M. A. 卡尔采夫 著
金 成 樑 譯

*

科学出版社 出版 （北京朝阳門大街 117 号）
北京市书刊出版业营业許可証出字第 061 号
中国科学院印刷厂印刷 新华书店总經售

*

1963 年 3 月第 一 版 书号：2690 字数：98,000
1963 年 3 月第一次印刷 开本：850×1168 1/32
（京）0001—3,200 印张：3 3/4

定价：0.65 元

序

制造数字計算机的运算器的理論和实践——这是“純”数学問題和特殊技术問題非常紧密交錯着的領域．正确地选择数的編碼系統，选择加法器的邏輯結构，拟定能按它完成各种算术运算的算法，以及建立能实現这些算法的运算器的邏輯綫路．所有这些問題都不能彼此孤立地、并且不考虑到应用于装置中的实际物理元件的特性而加以解决．但是，无論何时得到的解答也并不是唯一的，而可以有几个不同的方案．

自从数字技术問世不多几年以来已經积累了用各种不同的方法解答上述問題的丰富的材料．所有积累起来的經驗都需要加以研究和系統化．但是如果事先不研究出比較不同方案的方法，那怕是粗略的方法，那么这一項工作是无法进行的．在許多情况下，簡单地比較不同的方案就能得出很有意思的概括或者可以找到某些新的結果．上述材料就是本书的主要內容．

在此向讀者介紹的工作是由苏联科学院控制机和控制系統实驗室完成的，它是在苏联科学院通訊院士 И. С. 勃魯克 (Брук) 領导下在数字技术領域內所进行的总体研究工作的一部分．作者謹向实驗室的工作人員 Н. Я. 馬秋辛 (Матюхин)，В. В. 别林斯基 (Белынский)，物理数学博士 А. Л. 布魯登諾 (Брудно)，苏联科学院通訊院士 Л. А. 柳斯捷尔尼克 (Люстерник)，以及国立莫斯科大学計算数学教研室的研究班的参加者表示感謝，他們讀过这本书的原稿并且提出了一系列宝貴的建議和希望．

目　录

第一章　数的編碼系統

§ 1.1. 編碼系統的分类

数的各种不同的編碼系統可以按許多特征彼此加以区别．其中最重要的特征是計数制的基数．

1．大家知道，每一个数位中所能用的不同符号（数字）的量叫做計数制的基数．如果每位只用二个数字(0 和 1)，則叫做二进位計数制；如果能有三个数字（0，1，2 或－1，0，＋1），則为三进位制等．从定义中看出，計数制的基数总是大于 1 的正整数．

2．編碼系統可能是单一的(即每一位的許用符号都是一样多的)和混合的(或非单一的．即不同的位有不同的基数)．

通用的十进位制，电子計算机中常用的二进制等都是单一編碼系統的例子．

时間度量单位的系統是混合編碼系統的例子：在秒和分这二位上許用符号的量等于 60（从"00"到"59"），在时这一位上許可用 24 个符号(从"00"到"23")，因为 24 小时就是 1 昼夜，等等．在某些机器中应用的 2-5 进位制也是混合的系統，在 2-5 进位制中許用 2 个和 5 个不同数字的位一一相間．

用数除以一系列互素数的余数来表示这个数的系統是非单一編碼系統的有趣的例子．如果选用最初的几个素数（2，3，5，7，11 等等)作为各位的基数，則在每一个数中第一位(除以 2 的余数)可以包括二个可能符号中的一个——0 或 1，第二位(除以 3 的余数)是三个可能符号中的一个——0，1 或 2，第三位是五个符号中的一个——0，1，2，3 或 4 等等．这种系統将在这一章的 § 3 中更詳細地研究．

3．无論給定計数制是单一的或是混合的，它的每一个符号

(数字)可以表为某些記号(例如,十进制的数字是 0,1,…,9 这些記号),或者是用另一个計数制的某几个数字来表示,即写成另一个計数制的数的形式. 例如,在上述的时間編碼系統中,秒和分这二位上所用的 60 个符号中的每一个以及时这一位中用到的 24 个符号中的每一个都是用二个十进位数字来表示的. 十进位計数制中的十个数字也常常用四位,有时是五位或七位二进位数字来編碼.

4. 最后,应該划淸位权恆定的編碼系統和符号編碼系統之間的区别. 在通用的十进位系統中每一位都有其恆定的权;例如,整数位的权是 1, 10, 100,……. 同样,在用于許多电子計算机內的二进位計数制中,各位数字的权是 1, 2, 4, 8, ……. 有时用于对十进位数字进行編碼的二进制便是符号編碼系統的例子. 这种編碼系統的特点是:用該进位制編碼的任意一数(从 0 到 9)的二进制数字(按照权 1, 2, 4, 8)的总和,不是給出这个数,而是給出这个数与数 3 的和——“余 3 代碼”[3]. 符号編碼系統的另一个例子是大家知道的格英(ГРЭЯ)代碼*),它是这样构成的,当数增加 1 时其中总有一个并且只有一个二进位数字被改变. 按我們的分类,上述的利用余数的編碼系統也是符号系統.

5. 至于位权恆定的計数制則应指出带有自然权的系統和带有人为权的系統的区别. 在带有自然权的系統中第一位的权等于 1,而数的整数部分中的其它任何一位的权都等于整数部分中这一位右邻位中許用符号的量的乘积;在数的分数部分中每一位的权等于所設位与数的分数部分中其左邻位中許用符号量的乘积的倒数. 在带有人为权的系統中位的权可以是任意的.

如果在单一系統中利用自然权,則不同位的权就是計数系統的基数的整冪;例如,在通用的十进位系統中权是数 10 的冪,而在普通的二进位系統中权是数 2 的冪.

带有人为权的系統至少用于两方面:用于对十进位数字編碼,

---

*) 这种代碼有时叫做“反射的”二进位系統——譯者.

此时用另一种四位二进制数代替带有权 8, 4, 2, 1 的自然系統(例如, 对于这种情形, 位的权是 2, 4, 2, 1 或 7, 4, 2, 1 的系統具有一定的优越性), 以及用于組成专門的防干扰的代碼(这时引用了附加的"检驗"位, 它的权等于零[20]).

于是, 我們可以将不同的計数系統按下列特征分类:

а) 計数系統的基数的大小;

б) 計数系統的单一性或非单一性;

в) 数字的編碼原則;

г) 不同位的权的值是恆定的或非恆定的; 根据权的选擇是按照自然順序或者人为順序, 我們又可以将权值恆定的系統分为二个分类.

必須着重指出, 所有上述的分类或多或少地带有条件的特点, 并且有时对于計数系統間的实际区别反映得并不如研究这种或那种計数系統的方法那样多, 并且要看所設系統的什么性質被認为是主要的. 例如, 带有恆定自然权的且用四个二进位数字来給每一个数字編碼的单一十进制, 可以看作就是位权不恆定的单一二进制; 显然, 在上面的討論中我們撇开了編碼系統的某些重要性質.

上述分类大概包括了用于或打算用于数字計算装置中的所有計数系統. 分类中未談到类似于利用罗馬数字的編碼系統, 因为这种系統几乎不应用于計算技术中, 其中数字的量(即能置于任何位置的不同符号的量)在原則上是无限的, 并且因为能用有限个数字写出的数并不是自然数的部分集合.

§ 1.2. 計数系統的基数

在所有各种不同的計数系統中实际上用于电子計算机的是以 2, 4, 8, 10 和 16 为基数的单一計数系統和混合的 2-5 进位系統. 此外, 人們也曾討論过应用基数为 3 的計数系統和混合符号編碼系統, 如余数編碼系統的可能性(参看本章 §1).

在設計許多电子計算机时, 多数設計者都拒絕采用通用的十

进位系統[3,4,8,13]，因为二进位系統具有以下优点：节省設备，便于用双稳元件表示二进制数字，算术运算簡单.

1. 設备的节省通常用下列方法計算：假設为了表示某个位中每一个許用符号需要一个綫路元件（例如，一个电子管），而不同数的必需量等于 N；这时，如果利用单一的 n 进位計数系統，当 $\log_n N \gg 1$ 时，綫路元件的量大致等于 $n \log_n N$；特别是，当 $n=2$ 时它是 $2\log_2 N$. 为了估計在 n 不同时綫路元件的量可以引用函数

$$f(n)=\frac{n\log_n N}{2\log_2 N}=\frac{n}{2\log_2 n},$$

它表明，当应用 n 进位計数系統时所需綫路元件的量比用二进位系統时所需綫路元件的量大几倍（在文献中通常引用的函数和 $f(n)$ 相差一个常因子）. 对于 n 的最初几个值，$f(n)$ 的值列在表 1 的第二纵列中. 整标函数 $f(n)$ 当 $n=3$ 时有最小值并且在 $n>3$ 时随着 n 的增大而增长*). 由此即可作出結論，最經济的是三进位計数系統，二进位和四进位系統在設备的量上相差不多，十进位系統所需設备的量比二进位系統大到 1.5 倍；一般說来，当計数系統的基数增大时，設备的量也将增大.

对于大多数机械的和电子的計算装置說来，上面的估計实际上并不正确. 对于机械計算装置，这种估計是不正确的，因为制造数字輪的复杂性实际上并不和齿数成正比. 例如，当和前一位輪子每嚙合一次时轉过 1/2 轉的带有二个齿的輪子制造起来并不比带有十个齿的輪子簡单 5 倍，甚至还要比它更复杂. 对于电子計算装置这种估計也是不适用的，因为实际上沒有这样的电子綫路，它具有 n 个稳定状态（$n\geqslant 3$），且要比双稳綫路仅复杂 $n/2$ 倍，并能足够可靠地工作；这时，假如对于运算器說来这种綫路还能研制出来，则制造經济的多状态存儲器，现在一般还是不可能的.

所以在电子計算机中应用基数 $n>2$ 的計数系統的所有情形

---

*) 暂时把 n 当作連續的自变量，从 $\frac{df}{dn}=\frac{\log_2 n/e}{2\log_2^2 n}$ 即可看出：当 $n>e$ 时，$\frac{df}{dn}>0$，即 $f(n)$ 将随 n 的增大而增大——譯者.

下，这些系統的数字总是用几个二进位数字来編碼．很明显，为了比較实現 n 进位計数系統所需設备的量和应用二进位系統时設备的量，就不能利用函数

$$f(n)=\frac{n}{2\log_2 n},$$

而必須用函数

$$\varphi(n)=\frac{\lambda(n)}{\log_2 n},$$

其中 $\lambda(n)$ 是一个整数，并且 $\log_2 n\leqslant\lambda(n)<\log_2 n+1$［$\lambda(n)$ 是为記录 n 进位制的一个数字所需最少的二进位位数］．和前面的情形一样，这个估計仅当 $\log_n N\gg 1$ 时才是正确的，这里 N 是应該由机器运用的不同数的量．

表 1　基数不同的計数系統的比較表

n	$f(n)$	$\varphi(n)$	$f_1(n)$	$f_2(n)$	$f_3(n)$	$f_4(n)$	$f_5(n)$
2	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000
3	0.946	1.262	1.262	1.893	1.194	0.796	1.592
4	1.000	1.000	1.500	3.000	1.500	0.750	1.500
5	1.078	1.294	1.725	4.313	1.859	0.743	2.229
6	1.148	1.148	1.913	5.739	2.198	0.740	2.220
7	1.247	1.069	2.138	7.484	2.664	0.760	2.280
8	1.333	1.000	2.333	9.333	3.111	0.778	2.334
9	1.420	1.262	2.524	11.36	3.599	0.798	3.192
10	1.505	1.204	2.709	13.54	4.077	0.815	3.260
…	…	…	…	…	…	…	…
100	7.526	1.053	15.05	752.7	113.2	2.343	16.40
…	…	…	…	…	…	…	…
1000	50.17	1.003	100.2	50120	5029	10.36	103.5

对应于 n 的最初几个值的值 $\varphi(n)$ 列在表 1 的第 3 縱列中．下面我們列举函数 $\varphi(n)$ 的几个明显的性質，这对于应用是有益的：

а) 当 $n\geqslant 2$ 时，$\varphi(n)\geqslant 1$，同时而且仅当 n 是数 2 的整冪时，$\varphi(n)=1$，$\varphi(n)$ 的最大値是 $\varphi(5)=1.294$；

б) 当 $\log_2 n\gg 1$ 时，即 n 大时，則 $\varphi(n)\to 1$；

в) 对于 $n > 6$ 的所有値，不等式 $\varphi(n) < f(n)$ 成立.

由此可以作出下列結論:

(а) 当应用 2 状态元件时按設备的量来說，二进位系統以及基数是数 2 的整冪(4 进制，8 进制，16 进制等等)的系統是最有利的.

至于十进制，则按所需設备量来說，比二进制多用 20%.

从設备費用的观点来看，基数是 5，以及 3，9 的計数制最坏.假如对运算器已經能研制出足够可靠的 3 状态元件，并且它仅比相应的 2 状态元件复杂 3/2 倍的話，则在存儲器沒有类似的元件时，向三进制过渡还是不行的. 靠着由二进制轉为三进制的办法，运算器的設备量节省 5.4% $\left(\frac{f(3)-f(2)}{f(2)} \approx -0.054\right)$，但是存儲器設备的量却增大了 26% $\left(\frac{\varphi(3)-\varphi(2)}{\varphi(2)} \approx 0.26\right)$. 因此仅当具有三进制存儲器时或者对于存儲量小的专用計算机研制运算器的上述 3 状态元件才有意义.

(б) 从同样的观点来看，用基数大的計数系統是有利的. 例如，基数为 100 的計数系統就有一定的价值，一方面它需要的設备仅比二进制多 5%，另一方面它又能很容易地轉为基数 10.

(в) 对于 $n \geqslant 6$ 的情形，沒有必要提高現有的 n 状态元件的可靠性或制造新的元件，虽然它們比相应的 2 状态元件只复杂 $n/2$ 倍；无論在运算器中，或是在存儲器中利用这样的元件是不会节省設备的. 假如已經制成足够可靠的带有 10 个三极管的十进制环，则从設备多少的观点看来应用二进位編碼的十进制仍然更为有利.

上面是根据計数制的基数来比較設备的多少，当然，还沒有考虑到邏輯綫路复杂性方面的区别，这方面的計算并不是很簡单的.

至于混合的計数制，从設备的量来說它們位于相应的单一系統之間.

假設有一个混合的計数制，它由 p_1 个带有 n_1 个許用符号的

位，p_2 个带有 n_2 个許用符号的位，……，以及 p_m 个带有 n_m 个許用符号的位所組成；此外，假設任何一位都用 n 状态的元件来表示，这种元件比相应的二进位元件成比例地复杂；这时，如实現这种計数制所采用的設备量可以用下列函数表示

$$f\binom{n_i}{p_i} = f\binom{n_1, n_2, \cdots, n_m}{p_1, p_2, \cdots, p_m} =$$

$$= \frac{p_1 n_1 + p_2 n_2 + \cdots + p_m n_m}{2\log_2(n_1^{p_1} n_2^{p_2} \cdots n_m^{p_m})} = \frac{\sum_{i=1}^{m} p_i n_i}{2 \cdot \sum_{i=1}^{m} p_i \log_2 n_i}.$$

当 $\log_2(n_1^{p_1} n_2^{p_2} \cdots n_m^{p_m}) \gg 1$ 时，和单一的系統一样，这个函数表示，为实現混合計数制所用的設备的量比为实現单一的且能表示同样多数的二进制所需的設备量約大几倍. 同样，如果在混合計数制的每一位中任何一个許用符号都用最少量的二进制数字来表示，則为了表征实現这个混合系統所需的設备量，不能用函数 $f\binom{n_i}{p_i}$，而需要用下列函数

$$\varphi\binom{n_i}{p_i} = \varphi\binom{n_1, n_2, \cdots, n_m}{p_1, p_2, \cdots, p_m} =$$

$$= \frac{p_1\lambda(n_1) + p_2\lambda(n_2) + \cdots + p_m\lambda(n_m)}{\log_2(n_1^{p_1} n_2^{p_2} \cdots n_m^{p_m})} = \frac{\sum_{i=1}^{m} p_i \lambda(n_i)}{\sum_{i=1}^{m} p_i \log_2 n_i}.$$

容易証明(参看补充 1)，如果

$$f(n_{i_1}) \leqslant f(n_{i_2}) \leqslant \cdots \leqslant f(n_{i_m}), \tag{1}$$

則

$$f(n_{i_1}) \leqslant f\binom{n_i}{p_i} \leqslant f(n_{i_m}); \tag{2}$$

同样，如果

$$\varphi(n_{k_1}) \leqslant \varphi(n_{k_2}) \leqslant \cdots \leqslant \varphi(n_{k_m}), \tag{1'}$$

则

$$\varphi(n_{k_1}) \leqslant \varphi\binom{n_i}{p_i} \leqslant \varphi(n_{k_m}). \qquad (2')$$

上面的不等式更精确地表叙了前面关于这个問題的断言：按設备的量来說混合計数制位于相应的单一系統之間. 很显然，例如无論用什么方法表示五进制数字，2–5 計数制总不如純二进制經济，但比純五进制节省些.

当利用混合計数制时，常使数 $p_1, p_2, \cdots, p_m$ 或者彼此相等，或者有較大的公因子，例如，

$$p_1 = k_1q,\ p_2 = k_2q, \cdots,\ p_m = k_mq,$$

其中 $k_1, k_2, \cdots, k_m$ 是等于 1，2 或 3 的数. 当用 k_1 个 n_1 进位計数制的数字，k_2 个 n_2 进位計数制的数字以及 k_m 个 n_m 进位計数制的数字，对基数为 $n_0 = n_1^{k_1}n_2^{k_2}\cdots n_m^{k_m}$ 的单一計数制的 q 个数字中的每一个字編碼时，可以得到这样的混合計数制. 例如，用一个二进位数字和一个五进位数字代替每一个十进位数字即可得出上面提到的 2–5 进位計数制.

如果在基数为 n_0 和 $n_1, n_2, \cdots, n_m$ 的計数系統中，每一个数字都用其复杂性和 n_i 成正比的 n_i 状态的元件来表示，則从基数为 n_0 的单一計数制向相应的混合系統的过渡将在設备量的方面得到节省. 反之，如果在基数为 $n_i > 2$ 的計数制中每一个数字都用最少量的二进位数字来編碼，則从基数为 n_0 的单一計数制向相应的混合系統的过渡或使所需設备的量不变，或者使其增大.

实际上，我們首先来研究一下，当基数为 n_0 和 $n_1, n_2, \cdots, n_m$ 的計数系統中每一个数字都用其复杂性和 n_i 成正比的 n_i 状态的元件来表示的情形. 从基数为 n_0 的单一計数制轉为相应的混合系統，仅当 $n_0 \geqslant 6$ 时才可能（6 是具有彼此不相等的且不等于 1 的因子的第一个正整数）. 但是当 $n > 3$ 时函数 $f(n)$ 已經随 n 的增大而增大. 因此，从

$$n_0 = \prod_{i=1}^{m} n_i^{k_i} > n_i$$

得出

$$f(n_0) > f(n_i) \qquad (i = 1, 2, \cdots, m).$$

从另一方面,对于任何 p_i

$$f\binom{n_1, n_2, \cdots, n_m}{p_1, p_2, \cdots, p_m} \leqslant \mathrm{Max}\,[f(n_1), f(n_2), \cdots, f(n_m)].$$

所以总有

$$f\binom{n_i}{p_i} = f\binom{n_1, n_2, \cdots, n_m}{p_1, p_2, \cdots, p_m} < f(n_0).$$

例如，如果每一个十进位数字都储存在 10 个三极管的計数环中，而每一个五进位数字储存在 5 个三极管的計数环中，則从单一的十进制轉为混合的 2-5 进制,在設备的量上将节省 30%.

如果基数为 $n_i > 2$ 的計数制中的每一个数字都用几个二进位元件来表示,則得到相反的結果.

正如前面指出的，为实現 n_0 进位計数制所需設备的量由下列函数表示:

$$\varphi(n_0) = \frac{\lambda(n_0)}{\log_2 n_0},$$

其中 $\lambda(n_0)$ 是整数,并且

$$\log_2 n_0 \leqslant \lambda(n_0) < \log_2 n_0 + 1. \tag{3}$$

假設 $n_0 = \prod_{i=1}^{m} n_i^{k_i}$，則在 q 个 n_0 进位制的位中,每一个都用 k_1 个基数为 n_1 的位,k_2 个基数为 n_2 的位等来代替就得出一个混合的系統,为了实現这个系統所需設备由下列函数

$$\varphi\binom{n_i}{k_i q} = \frac{\sum_{i=1}^{m} k_i q \lambda(n_i)}{\log_2\left(\prod_{i=1}^{m} n_i^{k_i q}\right)} = \frac{\sum_{i=1}^{m} k_i \lambda(n_i)}{\log_2 n_0}$$

表示．因为

$$\log_2 n_i \leqslant \lambda(n_i) < \log_2 n_i + 1,$$

并且

$$\log_2 n_i^{k_i} \leqslant k_i \lambda(n_i) < \log_2 n_i^{k_i} + k_i,$$

所以

$$\log_2 n_0 \leqslant \sum_{i=1}^{m} k_i\lambda(n_i) < \log_2 n_0 + \sum_{i=1}^{m} k_i. \tag{4}$$

如果考虑到 $\lambda(n_0)$ 和 $\sum_{i=1}^{m} k_i\lambda(n_i)$ 都是整数,则比較不等式(3)和(4)即得出*):

$$\varphi\binom{n_i}{p_i} = \varphi\binom{n_i}{k_i q} \geqslant \varphi(n_0).$$

例如，利用 2-5 进位制代替单一的十进位計数制所需設备的量不变:

$$\varphi(10) = \varphi\binom{2,5}{q,q} \approx 1.204;$$

从单一的 15 进位制轉为 3-5 进位制所需設备的量增大 25%.

2. 我們已經詳細地研究过用适当地选择計数制基数的方法而实現节省設备数量的問題，并作出足够精确的量的估計. 按上所說可以順便作出結論,应用二进位制的第二个論据(借 2 状态元件表示二进位数字方便) 是附有条件的. 实际上为了表示十进制的数字, 2 状态的元件比 10 状态元件用起来更方便.

3. 至于应用二进位計数制的第三个論据是完成算术运算簡单. 为証实这一点通常用二进制乘法表，这个乘法表比十进位制乘法表的确簡单得多:

$$0 \times 0 = 0 \qquad 1 \times 0 = 0$$
$$0 \times 1 = 0 \qquad 1 \times 1 = 1$$

---

*) 实际上,不等式(3)表示: $\lambda(n_0)$ 是不小于 $\log_2 n_0$ 的最小整数,不等式(4)表示: $\sum_{i=1}^{m} k_i\lambda(n_i)$ 是不小于 $\log_2 n_0$ 的某个整数,所以得出:

$$\sum_{i=1}^{m} k_i\lambda(n_i) \geqslant \lambda(n_0);$$

两边同除以正数 $\log_2 n_0$ 得出

$$\varphi\binom{n_i}{k_i q} \geqslant \varphi(n_0)$$ ——譯者.

但对于不同机器的綫路的仔細地研究表明，实际上，上述情况并沒有用于运算器的結构中.

二进制的实际优点如下：

假設，利用单一的 n 进位計数制，并且它带有恆定的自然位权，运算器的主要部分是完成加法的装置，能同时完成乘法的最簡单的运算器必須包括乘数的移位寄存器与儲存和的移位寄存器.带有这些补充設备的运算器能象完成加法之方式完成乘法，例如，将被乘数与部分积之和連續相加并在每次相加时，使乘数与部分积的和进行移位. 这时，用乘数的每一位去乘被乘数的方法平均都要求作 $\frac{n-1}{2}$ 次加法循环，因为所設位的数字可以是从 0 到 $n-1$*) 的任何数. 如果应由机器操作的不同数的量等于 N（这个量說明計算的精确度），則为了完成 n 进制的乘法，当 $\log_n N \gg 1$ 时，必須完成的加法循环的总数平均大致等于 $\frac{n-1}{2}\log_n N$；在特殊情形下当 $n=2$ 时，它等于 $\frac{1}{2}\log_2 N$. 函数

$$f_1(n)=\frac{(n-1)\log_n N}{\log_2 N}=\frac{n-1}{\log_2 n}$$

表明，为了完成 n 进制的一对数的乘法所需加法的总循环比以同样的計算精确度在二进位系統中完成乘法所需加法的循环次数要大几倍. 对应于 n 的几个最初值的量 $f_1(n)$ 的值列在第 5 頁表 1 的第四纵列中. 当 $n \geqslant 2$ 时，函数 $f_1(n)$ 随着 n 的增大单調地增大，并且对于較大的 n 值，量 $f_1(n)$ 和 $2f(n)$ 相差很小.

在参考文献[13]中用类似的方法論述了完成乘法的时間和計数制基数的关系；从这个关系作出了小基数計数制优越的結論.但是，仅当有很強的限制时，这种估計才是正确的.

a）为了使函数 $f_1(n)$ 实际上表示某种时間間隔的关系，必須使一次加法循环的时間和計数制的基数无关. 当利用組合的并行

---

*) 这个情况将在本章的 §3 和 §4 中説明——著者.

加法器执行加法运算时（这里和下面参看第二章的 §2.1），这个条件差不多是成立的. 当然，这里以及今后都假定不同計数制的加法器都能够用同一类型的物理元件作成. 假如用并行累加器，则加法循环的时間大致和計数制的基数 n 成正比，于是当用不同計数制执行乘法的时間的关系应該用下列函数来估計:

$$f_2(n)=\frac{n}{2}f_1(n)=\frac{n(n-1)}{2\log_2 n}.$$

当应用串行累加器时，完成每一位加法的时間与計数制的基数成正比，但是計数制的基数愈大，则位数愈少；所以加法循环的时間大致和 $f(n)$ 成正比，而乘法时間則由函数

$$f_3(n)=f_1(n)f(n)=\frac{n(n-1)}{2\log_2^2 n}$$

来估計.

最后，如果应用組合串行加法器，则每一位加法的时間几乎与計数制的基数无关，而計数制的基数愈大，位数就愈少；于是加法循环的时間就和 $\frac{\log_n N}{\log_2 N}=\frac{1}{\log_2 n}$ 成正比，而乘法时間就应該用函数

$$f_4(n)=\frac{f_1(n)}{\log_2 n}=\frac{n-1}{\log_2^2 n}$$

来估計.

对应于 n 的几个最初值的函数 $f_2(n)$，$f_3(n)$ 和 $f_4(n)$ 的值分别列在表 1 的第 5，第 6 和第 7 纵列中.

从表中看出，函数 $f_2(n)$ 随着 n 的增大而迅速地增长；函数 $f_3(n)$ 也随 n 的增大而增大，并且当 $n>4$ 时

$$f_1(n)<f_3(n)<f_2(n)^{*)}.$$

当 $n=6$ 时，整标函数 $f_4(n)$ 有极小值，然后慢慢地增长，但是 $f_4(10)$ 比 $f_4(2)$ 仍然小 18.5%. 这些估計不仅对于选择計数制的基

*) 从相应的表达式即可看出:

$n>2$ 时， $f_3(n)<f_2(n)$;

$n>4$ 时，$f_1(n)<f_3(n)$ [这时，$f(n)>1$]——譯者.