陈建功文集

科学出版社

陈 建 功 文 集

《陈建功文集》编辑小组　编

科 学 出 版 社

内 容 简 介

陈建功先生是我国已故的著名数学家，他对我国实函数论方面的研究工作作出了重要的贡献，有很高的学术成就．是我国函数论、三角级数论、复变函数几何理论、函数逼近论等方面的开创者．先后发表过六十九篇论文．本文集从中选了二十七篇，基本上反映了陈先生在这些方面的研究工作．

读者对象是高等学校数学系高年级学生、研究生和数学工作者．

陈 建 功 文 集

《陈建功文集》编辑小组　编

科学出版社出版

北京朝阳门内大街 137 号

中国科学院印刷厂印刷

新华书店北京发行所发行　各地新华书店经售

*

1981 年 9 月第一版　　开本：850×1168　1/32

1981 年 9 月第一次印刷　　印张：13 1/8

印数：精 1－2,850　　插页：精 4　平 2

平 1—2,550　　字数：344,000

统一书号：13031・1711

本社书号：2335・13—1

定价：布脊精装 3.10 元

平　　装 2.50 元

陈建功（1893—1971）

序　言

陈建功先生的数学论文集的问世，是我国科学界和教育界的一件大事，对于实现我国社会主义现代化将会起积极的促进作用.

本文集共收集了陈建功先生的二十七篇数学论文，其中最早一篇 1921 年发表在日本《东北数学杂志》（*Tôhoku Mathematical Journal*）上，无论在时间上或在内容上，都标志了中国现代数学的兴起. 它是具有重要意义的一篇创造性著作. 从此以后，特别是从 1927 年以后，我国数学家在国内外数学专刊上发表的论文一天天地增加.

陈建功先生早年留学日本，在东京高等工业学校和东京物理学校(夜校)同时毕业，后来又考进日本东北帝国大学数学系，三年毕业. 上述最早一篇论文就是陈先生在大学三年级学习时写成的. 1926 年冬，陈先生第三次东渡，进了东北帝国大学研究院当研究生，仅用了两年半的时间，就写出了十多篇主要是关于正交函数论的文章. 由于这些卓越的成果，于 1929 年获得东北帝国大学理学博士学位，成为在日本国取得崇高荣誉的第一个外国科学家. 他还用日文写成一本专著《三角级数论》在日本出版，书中有不少新译术语是由陈先生首创的，至今仍被沿用. 长期被外国人污蔑为“劣等人种”的中华民族，竟然出了陈建功这样一个数学家，无怪乎当时举世赞叹与惊奇. 陈先生为祖国争了光，为中国人民争了气，他是中国人民的骄傲.

陈建功先生一生从事教育工作，不遗余力，主要是在大学任教，早期也教过中专. 他在教学之余，努力钻研数学，特别专长实函数论，晚年兼及微分方程和复变函数论，从选集也可以看出这一点. 他有句名言：要教好书，必须靠搞科研来提高；反过来，不教书，就培养不出人才，科研也就无法开展. 他一生就是根据这条原

则身体力行过来的. 1931 年在陈先生等人发起和指导下，一个当时称为“数学研究”而现在则称为“小型科学讨论班”的学术活动形式，在杭州创始了. 通过它对青年教师和高年级大学生进行严格训练；教师没有通过“数学研究”这门课的就不得升级，学生尽管其它课程都及格而“数学研究”不及格的也不得毕业. 无论在艰苦的抗日战争的岁月里，或是在解放后“文化大革命”前政治运动频繁的环境中，这个讨论班一直没有间断过. 就这样，从讨论班的创始到陈先生逝世为止的四十年里，培养出了一大批数学家，形成了以陈建功等为首的浙江大学学派，为社会主义祖国培养了一支队伍. 如果不是林彪、“四人帮”的迫害，以致陈先生患病得不到医疗而终至赍恨以殁的话，我们相信，他还会为我国培养出更多更好的建设人才.

我和陈建功先生相处，前后长达五十年. 我们在留日时代，先后三次同学，他是我的良师，也是益友，我从他身上学到了不少好东西，例如怎么既教好书又搞好科研，如何早出人才、多出人才，以及严格治学的态度，全心全意为人民服务的精神，等等. 特别要提到的是，陈先生首创了用中文编写大学数学教材，用中国话教学生的教学法，在当时是绝无仅有的. 尽管陈先生自己懂得日、英、德、法、俄等国外语，但他始终坚持中国人用中国语文进行教学和科研，这种爱国主义的精神是永远值得我们学习的.

1971 年 4 月陈建功先生不幸逝世的消息传来，使我悲痛不已. 我们一起搞起来的小型科学讨论班，也被林彪、“四人帮”破坏到一无所有的地步，我们的班子全被拆散掉，我是多么怀念陈先生啊！1976 年，陈先生逝世以后五年，党中央一举粉碎了“四人帮”，三年多来全国人民在党的领导下，团结一致，努力工作，取得了伟大胜利. 我们科学讨论班不但早已恢复，而且蓬勃发展起来了. 倘若陈先生还健在，他会多么欢欣鼓舞啊！在“四人帮”横行的时候，我虽想继承陈先生遗志把科学讨论班恢复起来，但无济于事，为了悼念我的老战友陈建功教授，当时曾写过两首诗，现将这两首诗录写于后，作为结束语.

悼念陈建功先生

其　一

武林旧事鸟空啼，故侣凋零忆酒旗。
我欲东风种桃李，于无言下自成蹊。

其　二

清歌一曲出高楼，求是桥边忆旧游。
世上何人同此调，梦随烟雨落杭州。

苏步青

1980年2月于上海

编 辑 说 明

1978年11月，在中国数学会年会上，华罗庚教授和其他许多数学家建议，要为我国已故著名数学家陈建功先生出版文集，这个建议得到与会同志的积极支持. 大家认为，这对宣传我国的科学成就，发展自然科学的理论研究具有重要的意义. 为此，杭州大学于1979年1月指定专人成立编辑小组，着手文集的编选工作.

陈建功先生1893年9月生于浙江绍兴. 林彪、“四人帮”横行期间，遭受迫害，1971年4月不幸逝世于杭州. 他一生从事教育工作，培养了一大批人才，对我国的科学与教育事业作出了卓越的贡献，是一位深受尊敬的数学家. 他在进行教学的同时，努力研究数学理论. 在实函数论、复函数论以及微分方程论等方面都有大量的成果. 特别是在三角级数论、复变函数几何理论、函数逼近论方面，成就更为卓著，是我国这几方面的开创者.

经过一年多的工作，我们共收集到陈先生公开发表的数学论文六十九篇，最早的是1921年，最晚的是1965年，这些论文的目录附于文集之后，一并列出的还有陈先生的专著和译作. 其他手稿、油印稿以及非数学论文都未列出. 我们曾希望论文都能收入文集，但限于条件，仅从中选取了二十七篇.

文集的第一篇不仅是陈先生最早发表的论文，而且是我国最早的现代数学论文之一；第二十七篇是陈先生最晚发表的论文，它标志着陈先生虽达七十高龄，还在领导着我国的三角级数论的研究，其他二十五篇，我们的编选要求是：每方面都选择重要而有代表性的论文，合作的论文未选入.

文集先外文后中文，按发表先后编排，每篇论文均注明该文发表的刊物和年代，这次编辑仅对印刷错误作了订正.

文集的整个编选工作是在中国数学会支持和关怀下进行的，

许多数学家都给予了热心的帮助．特别是苏步青教授，粉碎“四人帮”后就倡议为陈先生出文集．这次不仅为本文集写了序言，而且还亲自从日本复印来国内已经失存的一篇论文．陈建功先生的学生卢庆骏教授、程民德教授、张素诚教授、夏道行教授、龚昇教授、张鸣镛教授等为文集的出版提出了不少有益的意见．陈建功先生的夫人朱良璧先生为文集提供了大量材料．北京大学、复旦大学等校的图书馆为文集查考了很多杂志．其他还有一些同志与单位为本文集的出版作出了贡献，恕不一一道及．

参加本文集编辑小组的同志有：白正国、王传芳、谢庭藩、王斯雷、姚璧芸、施咸亮和陈全德等．限于我们的水平，文集中遗漏和不当之处在所难免，敬希指正．

《陈建功文集》编辑小组

1980年3月

目　录

SOME THEOREMS ON INFINITE PRODUCTS*

In this paper we give some generalizations of well known theorems and a simple proof of Weierstrass' theorem on infinite products.

1. If m is a positive even integer, then we have the following inequalities:

$$\frac{u^m}{m(1+u)} < u - \frac{u^2}{2} + \frac{u^3}{3} - \cdots + \frac{u^{m-1}}{m-1} - \log(1+u) < \frac{u^m}{m}, \quad 1 > u > 0 \tag{1}$$

$$\frac{u^m}{m} < u - \frac{u^2}{2} + \frac{u^3}{3} - \cdots + \frac{u^{m-1}}{m-1} - \log(1+u) < \frac{u^m}{m(1+u)}, \quad -1 < u < 0. \tag{2}$$

For it is easily seen that

$$\int_0^u \frac{x^{m-1}}{1+x} dx = \int_0^u \left(1 - x + x^2 - \cdots + x^{m-2} - \frac{1}{1+x}\right) dx$$
$$= u - \frac{u^2}{2} + \frac{u^3}{3} - \cdots + \frac{x^{m-1}}{m-1} - \log(1+u). \tag{3}$$

Since for $1 > u > 0$

$$\int_0^u \frac{x^{m-1}}{1+x} dx < \int_0^u x^{m-1} dx = \frac{u^m}{m}$$

and

$$\int_0^u \frac{x^{m-1}}{1+x} dx > \int_0^u \frac{x^{m-1}}{1+u} dx = \frac{u^m}{m(1+u)},$$

the inequalities (1) follow from (3) immediately.

---

* 本文载于 *Tôhoku Math. J.*, **20** (1921), 44—47.

Similarly we can prove that for $-1 < u < 0$

$$\frac{u^m}{m} < \int_0^u \frac{x^{m-1}}{1+x}\,dx < \frac{u^m}{m\,(1+u)},$$

so that from (3) we get the inequalities (2).

Theorem I. *Let* $\{u_n\}$ *be a sequence of real numbers whose elements are all numerically less than unity. If the series* $\sum_{n=1}^{\infty} u_n^m$ *is convergent, m being a positive even integer, then the infinite product* $\prod_{n=1}^{\infty} (1+u_n)$ *converges, diverges to* $+\infty$, *diverges to* 0 *or oscillates according as the series*

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(u_n - \frac{u_n^2}{2} + \frac{u_n^3}{3} - \cdots + \frac{u_n^{m-1}}{m-1}\right) \tag{4}$$

converges, diverges to $+\infty$, *diverges to* $-\infty$ *or oscillates.*

Proof. If λ is the lower limit of the numbers

$$1,\ 1+u_1,\ 1+u_2,\ \ldots\ldots,\ 1+u_n,\ \ldots\ldots,$$

then by the inequalities (1), (2) we have

$$0 < \sum_{r=p+1}^{n}\left(u_r - \frac{u_r^2}{2} + \frac{u_r^3}{3} - \cdots + \frac{u_r^{m-1}}{m-1}\right) - \log \prod_{r=p+1}^{n} (1+u_r)$$
$$< \frac{u_{p+1}^m + u_{p+2}^m + \cdots + u_n^m}{m\lambda}.$$

Consequently, since the series $\sum_{n=1}^{\infty} u_n^m$ is convergent, the difference

$$\sum_{r=p+1}^{n}\left(u_r - \frac{u_r^2}{2} + \frac{u_r^3}{3} - \cdots + \frac{u_r^{m-1}}{m-1}\right) - \log \prod_{r=p+1}^{n} (1+u_r)$$

can be made arbitrarily small by properly choosing p, no matter how large n is.

From this we get the following:

Corollary 1. *Let* $\{u_n\}$ *be such a sequence as described in the theorem. The necessary and sufficient condition that, whenever* *the series* $\sum_{n=1}^{\infty} u_n^m$ *is convergent, m being a positive even integer, the infinite product* $\prod_{n=1}^{\infty} (1+u_n)$ *may converge, is that the series* (4) *converges.*

When $m=2$ we get the following corollary which is well known[1].

Corollary 2. *Let* $\{u_n\}$ *be such a sequence as described in the theorem. If the series* $\sum_{n=1}^{\infty} u_n^2$ *is convergent, then the infinite product* $\prod_{n=1}^{\infty} (1+u_n)$ *converges, diverges to* $+\infty$, *diverges to* 0 *or oscillates according as the series* $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ *converges, diverges to* $+\infty$, *diverges to* $-\infty$ *or oscillates.*

N. B. For example the convergence of the infinite product

$$\left(1+\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\left(1-\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{2}\right)\left(1+\frac{1}{\sqrt{3}}\right)\left(1-\frac{1}{\sqrt{3}}+\frac{1}{3}\right)\cdots$$

cannot be determined by Corollary 2, but it is determined by putting $m=4$ in Corollary 1.

Theorem II. *Let* $\{u_n\}$ *be such a sequence as described in Theorem I. If the series* $\sum_{n=1}^{\infty} u_n^m$ *is divergent, m being a positive even integer, then the infinite product* $\prod_{n=1}^{\infty} (1+u_n)$ *diverges to* 0, *provided that the series* (4) *converges, diverges to* $-\infty$ *or oscillates so that its maximum limit is not* $+\infty$.

Proof. If L is the upper limit of the numbers

(1) See Bromwich, Theory of Infinite Series, p. 99.

$$1,\ 1+u_1,\ 1+u_2,\ \ldots\ldots,\ 1+u_n,\ \ldots\ldots,$$

then using the left hand parts of the inequalities (1) and (2) we have

$$\sum_{r=p+1}^{n}\left(u_r-\frac{u_r^2}{2}+\frac{u_r^3}{3}-\cdots+\frac{u_r^{m-1}}{m-1}\right)-\log\prod_{r=p+1}^{n}(1+u_r)$$
$$>\frac{u_{p+1}^m+u_{p+2}^m+\cdots+u_n^m}{mL}.$$

Consequently, since the series $\sum_{n=1}^{\infty}u_n^m$ is divergent, if the series (4) converges, diverges to $-\infty$ or oscillates so that its maximum limit is not $+\infty$, then

$$\lim_{n=\infty}\log\prod_{r=1}^{n}(1+u_r)=-\infty$$

must hold good, and so $\prod_{n=1}^{\infty}(1+u_r)$ diverges to 0.

Putting $m=2$ in this theorem we have as a corollary the following well known theorem[1]:

Let $\{u_n\}$ be such a sequence as already stated. If the series $\sum_{n=1}^{\infty}u_n^2$ is divergent, then the infinite product $\prod_{n=1}^{\infty}(1+u_n)$ diverges to 0, provided that the series $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ converges or oscillates so that its maximum limit is finite.

N.B. When m is a positive even integer, the only cases not covered by the foregoing theorems are those in which $\sum_{n=1}^{\infty}u_n^m$ diverges and the series (4) either diverges to $+\infty$, or has $+\infty$ as its maximum limit in case of oscillation.

---

(1) Bromwich, p. 99.

2. In addition, we will give here, without use of Weierstrass' inequalities, a simple proof to Weierstrass' theorem[1]:

Theorem. *If* $\{u_n\}$ *are numbers between* 0 *and* 1, *then the necessary and sufficient condition that the infinite products* $\prod_{n=1}^{\infty}(1+u_n)$ *and* $\prod_{n=1}^{\infty}(1-u_n)$ *may converge is that the series* $\sum u_n$ *converges.*

Proof. Since

$$\frac{u}{2} < \log(1+u) = \int_0^u \frac{dx}{1+x} < u, \quad 0 < u < 1,$$

$$\frac{1}{2}\sum_{r=1}^{n} u_r < \log \prod_{r=1}^{n}(1+u_r) < \sum_{r=1}^{n} u_r. \tag{5}$$

Similarly, since

$$u < -\log(1-u) = \int_0^u \frac{dx}{1-x} < \frac{u}{1-u}, \quad 0 < u < 1,$$

if λ is the lower limit of the numbers

$$1-u_1, \quad 1-u_2, \quad \ldots\ldots, \quad 1-u_n, \quad \ldots\ldots,$$

then we have

$$\sum_{r=1}^{n} u_r < -\log\prod_{r=1}^{n}(1-u_r) < \frac{1}{\lambda}\sum_{r=1}^{n} u_r. \tag{6}$$

Thus from the inequalities (1) and (6) we get the theorem immediately.

---

(1) Bromwich, p. 95—96.

ON DIRICHLET'S FUNCTIONALS*

The object of this paper is to give some properties of a functional of the type

$$F\{[S(\tau)]\} = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \exp\left(-\int_0^1 \lambda_n(\tau)S(\tau)d\tau\right), \qquad (1)$$

where $\lambda_i(\tau)$ forms a monotone increasing sequence of functions in the closed interval (0, 1), and tends to infinity uniformly as $n \to \infty$. The a's are given constants, real or complex, and

$$S(\tau) = \sigma(\tau) + it(\tau)$$

is a complex function of a real variable τ in the interval (0,1). We call such a functional a Dirichlet's functional[1].

In the following lines all integrals shall be taken in the sense of Lebesgue, and by a function is understood the bounded and summable function. Moreover, we assume for the sake of convenience that

$$\lambda_1(\tau) > 0, \quad \text{for} \quad 0 \leqslant \tau \leqslant 1.$$

I. Fundamental Theorems on the Convergency of the Series

Theorem 1. If the series (1) is bounded[2] for a function

$$S_0(\tau) = \sigma(\tau) + it_0(\tau),$$

then it is convergent for any function

$$S(\tau) = \sigma(\tau) + it(\tau)$$

---

* 本文载于 *Tôhoku Math. J.*, 28(1927), 287—311.

(1) This nomenclature is due to Prof. M. Fujiwara.

(2) This means that $\left|\sum_{1}^{n} a_\nu \exp\left(-\int_0^1 S_0 \lambda_\nu d\tau\right)\right| <$ *a constant independent of* n.