现代控制系统理论小丛书

最优估计及其应用

贾沛璋 朱征桃 编著

科学出版社

51.93
949

现代控制系统理论小丛书

最优估计及其应用

贾沛璋　朱征桃　编著

中国科学院电子学研究所
1985.5
图书馆藏

科　学　出　版　社

1984

8510243

Dt81/03

内 容 简 介

本书是现代控制系统理论小丛书之一．这套小丛书介绍了现代控制系统理论的各个部分，并着重说明这种理论如何由工程实践的需要而产生，又怎样应用它来解决工程设计中的实际问题．

本书是在作者多年从事弹道测定、目标跟踪、数据处理等方面工作的基础上写成的．前两章介绍最优估计理论与基本估计方法．后五章介绍各种具有一定实用价值的估计方法与数据处理方法，并给出应用例子与模拟计算结果．

本书可供从事控制理论研究的科学工作者及控制系统设计的工程技术人员参考．

现代控制系统理论小丛书

最优估计及其应用

[illegible]沛璋　朱征桃　编著

责任编辑　刘兴民　[illegible]

科学出版社出版

北京朝阳门内大街137号

[illegible]印刷

新华书店北京发行所发行　各地新华书店经售

*

1984年12月第一版　开本：787×1092　1/32

1984年12月第一次印刷　印张：10 1/8

印数：0001—10,200　字数：228,000

统一书号：15031·609

本社书号：3761·15—8

定价：[redacted]元

2.40

现代控制系统理论小丛书序言

在五十年代末六十年代初，在工程实践的基础上，特别是在空间技术等方面的实践基础上，自动控制理论发展到以状态变量为标志的现代控制理论的阶段．这种新的理论对于控制系统的性能提供了更深入的认识，使得在实践中发现的一些现象得到更好的说明．这些理论成果在以往十几年当中又在许多空间技术与航海、航空的型号设计中得到了应用，受到了实践的检验．

工程实践迫切需要发展理论，而一些新技术，特别是计算技术与现代数学的方法使现代控制理论的发展成为可能．为了控制更复杂的系统，并提高控制精度，数字控制逐渐代替模拟装置．这主要是利用了数字电子计算机，同时有赖于新的数学的描述与方法．

解放以来，我国科学技术得到迅速发展．我国人造地球卫星的发射与回收的成功以及其它尖端技术上的巨大成就都表明我国的控制技术已经达到较高的水平．我们应当本着“精益求精”的精神，使利用数字电子计算机来控制的这种先进技术更广泛地应用到各种有关的工程技术中去，并在工程实践中不断总结提高．我们撰写这一套现代控制系统理论小丛书，就是为了介绍现代控制系统理论的各个部分，并着重说明这种理论怎样由工程实践的需要而产生，又怎样用来解决工程设计中的实际问题．

这套小丛书，理论与实际并重．从每一种书来说，或偏重基础理论的阐述，但也给出应用的例子；或偏重于一项工程问

题，但也把它放在坚实的理论基础之上．本丛书之所以叫做“小丛书”，主要是指每种书的篇幅小，而不是指通俗普及性小册子．本书主要是为从事控制理论研究的科研工作者和工程技术人员而撰写的．

本丛书包括线性系统理论、非线性系统理论、极值控制理论、系统辨识、最优估计与随机控制理论、分布参数系统理论及其他有关内容．全套丛书计划分十几册出版．

希望这套丛书对于全国实现四个现代化作出它的贡献．

关 肇 直

1982 年 5 月于北京

试读结束：需要全本请在线购买： www.ertongbook.com

前　　言

近十多年来，卡尔曼滤波等最优估计方法已在国内许多领域被推广应用，特别是在航天、航空、航海事业中应用较早，也较为成功. 作者过去若干年来曾从事弹道测定、目标跟踪与数据处理等方面的工作，本书就是在此基础上写成的. 该书在最优估计理论与基本估计方法的叙述上，力求通俗易懂、由浅入深，以便使具备一定线性代数与初等概率知识的工程技术人员能顺利地阅读与理解；该书侧重于应用，在选材上，着重介绍具有一定实用价值的方法（包括递推的与非递推的估计方法），这些方法几乎都经过作者的实际计算，书中对部分方法给出了具体应用例子与模拟计算结果.

全书共分七章，第一章介绍线性最小方差估计、最小二乘估计与卡尔曼滤波；第二章叙述最优估计定理及卡尔曼平滑；第三章介绍对非线性系统的推广卡尔曼滤波，并对该递推滤波中的非线性影响进行误差分析；第四章介绍两种简化的卡尔曼滤波方法；第五章介绍自适应滤波，并通过例子介绍几种自适应滤波的具体应用方法；第六章介绍有限记忆平滑；第七章介绍数据中野值的剔除方法，其中着重介绍作者在实际工作中提出的两种方法.

由于水平所限，加之书中许多内容是作者在应用方面所做的工作，难免有错误或不成熟之处，请读者批评指正.

该书蒙涂其栵同志仔细审阅，并提出不少宝贵意见；又承我所陈翰馥、赵忠信同志看过部分章节，给予了不少帮助，在此一并表示感谢. 特别值得提出的是，已故所长关肇直同志

生前十分关心该书的写作，在该书初稿写成时，曾亲自审阅过部分章节，我们将对他表示深切的怀念。

作　　者

1983年9月于北京

目　　录

第一章 卡尔曼滤波

这一章介绍几种常用的最优估计方法. 第一节以通常的多项式平滑为例, 引进无偏最小方差估计的概念. 第二节叙述线性与非线性系统的最小二乘估计. 第三节用较为通俗的形式阐述卡尔曼滤波方法. 至于卡尔曼滤波的严格推导, 将与卡尔曼平滑一起放到第二章叙述[1,2]. 最后第四节介绍相关噪声情形的卡尔曼滤波.

§1 无偏最小方差估计

假定有一个量测序列 $y_0, y_1, \cdots, y_n$, 要用这一量测序列来估计某一状态量 x, 如记对状态 x 的估计为 $\hat{x}$, 一般地 $\hat{x}$ 可表为量测序列 $y_0, y_1, \cdots, y_n$ 的一个函数, 即

$$\hat{x} = f(y_0, y_1, \cdots, y_n). \tag{1.1}$$

通常观测量 $y_l (0 \leqslant l \leqslant n)$ 是随机量, 它们总包含一定的随机量测误差, 这样用 $y_0, y_1, \cdots, y_n$ 对 x 的估计 $\hat{x}$ 也是一随机量. 当函数 f 取不同形式时, 就有不同的估计 $\hat{x}$, 那么如何来判定一个估计量的好坏呢? 这里引进两个概念: 无偏估计和最小方差估计.

所谓无偏估计是指随机量 $\hat{x}$ 的数学期望应等于状态量 x 的数学期望, 即

$$E\hat{x} = Ex. \tag{1.2}$$

当状态量 x 为非随机量时, 即要求

$$E\hat{x} = x. \tag{1.3}$$

8510243

有了无偏性，就能保证，当进行大量重复性量测，获得多个量测序列 $y_0, y_1, \cdots, y_n$ 的独立样本时，由每个量测序列样本所求得的估计量 $\hat{x}$ 之平均近似为 Ex（或 x），换句话说，应是上述 $\hat{x}$ 之平均值的极限．

要寻找最好的估计，仅有了无偏性还不够，还要求 $\hat{x}$ 是最小方差估计，这就是要求估计误差 $\hat{x}-x$ 的方差达到极小，即

$$\operatorname{var}(\hat{x}-x)=\min, \tag{1.4}$$

式中 var 表示方差，min 是对一切可能的估计 $\hat{x}$ 而言． 也就是说，在一切可能的估计 $\hat{x}=f(y_0, y_1, \cdots, y_n)$ 中选择使估计误差的方差达极小者．

无偏性将保证由不同量测序列 $y_0, y_1, \cdots, y_n$ 的样本所获得的估计量 $\hat{x}$ 在状态 x 的附近摆动，而最小方差将保证这种摆动的平均值达极小．

当然，还有其它判定估计量好坏的标准，由于不常用，就不一一介绍了．

有时，又称无偏最小方差估计为均方意义下的最优估计，这里的最优估计是指在一切线性与非线性无偏估计中使方差达极小的一个估计．

还有一个线性无偏最小方差估计，其意义是指在一切线性无偏估计中使方差达极小的一个估计．因为无偏最小方差估计未必是线性估计，因此，线性无偏最小方差估计一般地不是均方意义下的最优估计．

本节下面将应用线性无偏最小方差估计的概念，导出多项式平滑的公式；下一节应用此概念导出最小二乘估计中的最优加权；而第三节及第二章推导的卡尔曼滤波、卡尔曼平滑是均方意义下的最优估计．

首先来看这样一个例子．为了测定某地的地理纬度，在同一时刻用 n 台望远镜测北极星的地平高度，设此地平高度

8510243

试读结束：需要全本请在线购买： www.ertongbook.com

的真值为 x，n 台望远镜测得的观测量为 $y_1, y_2, \cdots, y_n$，有

$$y_l = x + v_l, \qquad l = 1, 2, \cdots, n, \tag{1.5}$$

式中 v_l 为量测噪声，假定均值为零，有

$$\begin{aligned} &Ev_l^2 = \sigma_l^2, \qquad l = 1, 2, \cdots, n, \\ &Ev_l v_s = 0 \quad (l \neq s), \quad l, s = 1, 2, \cdots, n, \end{aligned} \tag{1.6}$$

现在要用 $y_1, y_2, \cdots, y_n$ 求 x 的估计 $\hat{x}$，一般地

$$\hat{x} = f(y_1, y_2, \cdots, y_n).$$

如考虑线性估计，则可取

$$\hat{x} = \alpha_0 \hat{x}_0 + \sum_{l=1}^{n} \alpha_l y_l, \tag{1.7}$$

式中 $\hat{x}_0$ 为初始估计（如对该地的地理纬度过去有一测定值）。

如无初始估计 $\hat{x}_0$，则取 $\alpha_0 = 0$，即

$$\hat{x} = \sum_{l=1}^{n} \alpha_l y_l, \tag{1.8}$$

现在用线性无偏最小方差估计的概念，来确定上式中的最优加权系数 α_l。

无偏性要求

$$E\hat{x} = \sum_{l=1}^{n} \alpha_l E y_l = \sum_{l=1}^{n} \alpha_l x = x,$$

给出加权系数的约束条件

$$\sum_{l=1}^{n} \alpha_l = 1. \tag{1.9}$$

它的估计误差为

$$\hat{x} - x = \sum_{l=1}^{n} \alpha_l y_l - \sum_{l=1}^{n} \alpha_l x = \sum_{l=1}^{n} \alpha_l v_l,$$

估计误差的方差为

$$E(\hat{x} - x)^2 = \sum_{l=1}^{n} \alpha_l^2 \sigma_l^2,$$

最小方差性要求

$$\sum_{l=1}^{n} \alpha_l^2 \sigma_l^2 = \min. \tag{1.10}$$

现在问题化为在满足约束条件(1.9)之下，求(1.10)的极值. 用拉格朗日乘子法来解这个条件极值问题，引进拉格朗日乘子 λ_0，令

$$U = \frac{1}{2} \sum_{l=1}^{n} \alpha_l^2 \sigma_l^2 - \lambda_0 \left(\sum_{l=1}^{n} \alpha_l - 1 \right), \tag{1.11}$$

由

$$\frac{\partial U}{\partial \alpha_l} = 0, \qquad l = 1, 2, \cdots, n,$$

得

$$\alpha_l = \frac{\lambda_0}{\sigma_l^2}, \qquad l = 1, 2, \cdots, n.$$

将上式代入(1.9)式，解得

$$\lambda_0 = \left(\sum_{l=1}^{n} \frac{1}{\sigma_l^2} \right)^{-1},$$

从而得最优加权系数

$$\alpha_l = \frac{\sigma_l^{-2}}{\sum_{s=1}^{n} \sigma_s^{-2}}, \qquad l = 1, 2, \cdots, n. \tag{1.12}$$

下面我们用线性无偏最小方差估计的概念来推导二阶多项式中心平滑的公式.

设目标的状态量为 $\boldsymbol{X}$，它是三维向量

$$\boldsymbol{X} = \begin{pmatrix} x \\ \dot{x} \\ \ddot{x} \end{pmatrix},$$

其中 x，$\dot{x}$，$\ddot{x}$ 分别表示目标的位置，速度和加速度分量. 以下

用 x_k, $\dot{x}_k$, $\ddot{x}_k$ 表示相应于 k 时刻的状态量.

假定状态 $\boldsymbol{X}$ 在有限时间内，满足二阶多项式的动态模型：

$$
\begin{aligned}
x_{k+1} &= x_k + \dot{x}_k T + \ddot{x}_k \frac{T^2}{2}, \\
\dot{x}_{k+1} &= \dot{x}_k + \ddot{x}_k T, \\
\ddot{x}_{k+1} &= \ddot{x}_k
\end{aligned}
\tag{1.13}
$$

其中 T 为采样时间间隔.

设观测量为 y，有量测方程：

$$
y_k = x_k + v_k \tag{1.14}
$$

式中 v_k 为量测噪声，假定均值为零，有

$$
\begin{aligned}
&E v_l^2 = \sigma^2, \\
&E v_l v_s = 0 \quad (l \neq s).
\end{aligned}
\tag{1.15}
$$

多项式中心平滑的问题，是要用观测量 y_{k-N}, y_{k-N+1}, $\cdots$, y_k, $\cdots$, y_{k+N-1}, y_{k+N}, 求得状态 $\boldsymbol{X}_k$ 的平滑值 $\hat{\boldsymbol{X}}_k$.

由线性估计，取

$$
\begin{aligned}
\hat{x}_k &= \sum_{l=-N}^{N} a_l y_{k+l}, \\
\hat{\dot{x}}_k &= \sum_{l=-N}^{N} b_l y_{k+l}, \\
\hat{\ddot{x}}_k &= \sum_{l=-N}^{N} c_l y_{k+l},
\end{aligned}
\tag{1.16}
$$

由无偏性要求得

$$
E\hat{x}_k = \sum_{l=-N}^{N} a_l E y_{k+l} = x_k,
$$

$$
E\hat{\dot{x}}_k = \sum_{l=-N}^{N} b_l E y_{k+l} = \dot{x}_k,
$$

$$
E\hat{\ddot{x}}_k = \sum_{l=-N}^{N} c_l E y_{k+l} = \ddot{x}_k.
$$

利用(1.13)、(1.14)式，由上述第一式可推得

$$\sum_{l=-N}^{N} a_l E y_{k+l} = \sum_{l=-N}^{N} a_l x_{k+l}$$

$$= \sum_{l=-N}^{N} a_l \left[x_k + \dot{x}_k (lT) + \ddot{x}_k \frac{(lT)^2}{2} \right] = x_k.$$

比较 x_k, $\dot{x}_k$, $\ddot{x}_k$ 前面的因子，得

$$\begin{aligned} \sum_{l=-N}^{N} a_l &= 1, \\ \sum_{l=-N}^{N} a_l l &= 0, \\ \sum_{l=-N}^{N} a_l l^2 &= 0. \end{aligned} \tag{1.17}$$

这就是为保证无偏性，加权系数 a_l 应满足的约束方程.

同样，由无偏性要求，可导出加权系数 b_l 和 c_l 应满足的约束方程：

$$\begin{aligned} \sum_{l=-N}^{N} b_l &= 0, \\ \sum_{l=-N}^{N} b_l l &= \frac{1}{T}, \\ \sum_{l=-N}^{N} b_l l^2 &= 0, \end{aligned} \tag{1.18}$$

和

$$\begin{aligned} \sum_{l=-N}^{N} c_l &= 0, \\ \sum_{l=-N}^{N} c_l l &= 0, \\ \sum_{l=-N}^{N} c_l l^2 &= \frac{2}{T^2}. \end{aligned} \tag{1.19}$$

利用无偏性，可导出它的估计误差为

$$\hat{x}_k - x_k = \hat{x}_k - E\hat{x}_k = \sum_{l=-N}^{N} a_l(y_{k+l} - Ey_{k+l})$$

$$= \sum_{l=-N}^{N} a_l v_l$$

利用(1.15)式，可得上式估计误差的方差

$$E(\hat{x}_k - x_k)^2 = \sigma^2 \sum_{l=-N}^{N} a_l^2.$$

同样可推得

$$E(\hat{\dot{x}}_k - \dot{x}_k)^2 = \sigma^2 \sum_{l=-N}^{N} b_l^2,$$

$$E(\hat{\ddot{x}}_k - \ddot{x}_k)^2 = \sigma^2 \sum_{l=-N}^{N} c_l^2.$$

最小方差性要求

$$\left.\begin{aligned} &\sum_{l=-N}^{N} a_l^2 = \min, \\ &\sum_{l=-N}^{N} b_l^2 = \min, \\ &\sum_{l=-N}^{N} c_l^2 = \min. \end{aligned}\right. \tag{1.20}$$

此时又化为求条件极值的问题，先来解加权系数 a_l，引进拉格朗日乘子 μ_0，μ_1，μ_2，令

$$U = \frac{1}{2}\sum_{l=-N}^{N} a_l^2 - \mu_0\left(\sum_{l=-N}^{N} a_l - 1\right) - \mu_1\left(\sum_{l=-N}^{N} a_l l\right)$$

$$- \mu_2\left(\sum_{l=-N}^{N} a_l l^2\right).$$

由

$$\frac{\partial U}{\partial a_l}=0, \qquad l=-N,-N+1,\cdots,0,1,\cdots,N-1,N$$

得

$$a_l=\mu_0+\mu_1 l+\mu_2 l^2,$$
$$l=-N,-N+1,\cdots,0,1,\cdots,N-1,N. \tag{1.21}$$

把上式代入约束方程(1.17)，得

$$\sum_{l=-N}^{N} a_l=\mu_0(2N+1)+\mu_1\sum_{l=-N}^{N} l+\mu_2\sum_{l=-N}^{N} l^2=1,$$

$$\sum_{l=-N}^{N} a_l l=\mu_0\sum_{l=-N}^{N} l+\mu_1\sum_{l=-N}^{N} l^2+\mu_2\sum_{l=-N}^{N} l^3=0,$$

$$\sum_{l=-N}^{N} a_l l^2=\mu_0\sum_{l=-N}^{N} l^2+\mu_1\sum_{l=-N}^{N} l^3+\mu_2\sum_{l=-N}^{N} l^4=0.$$

代入求和公式，上述方程组可化为:

$$\mu_0(2N+1)+\mu_2\frac{N}{3}(N+1)(2N+1)=1,$$

$$\mu_1\frac{N}{3}(N+1)(2N+1)=0, \tag{1.22}$$

$$\mu_0\frac{N}{3}(N+1)(2N+1)$$
$$+\mu_2\frac{N}{15}(N+1)(2N+1)(3N^2+3N-1)$$
$$=0.$$

解此方程组，得

$$\mu_0=\frac{3(3N^2+3N-1)}{(2N+1)(2N-1)(2N+3)},$$

$$\mu_1=0, \tag{1.23}$$

$$\mu_2=-\frac{15}{(2N+1)(2N-1)(2N+3)}.$$

当N确定后，由该式求得μ_0、μ_1、μ_2，再由前式获得权系数a_l。

试读结束：需要全本请在线购买： www.ertongbook.com