

现代化工数学

陈宁馨 编著

化学工业出版社

现代化工数学

陈宁馨 编著

马国瑜 黄椿鉴 校对

化学工业出版社

本书共分九章，介绍化学工程上常用的各种数学方法，内容比较丰富，包括向量代数、微积分、场论、常微分方程、偏微分方程、变分法、积分变换、矩阵、最优化方法，以及代数方程、差分方程、生成函数法、非线性方程组等数值计算方法和电子计算机程序等。

书中数学理论部分简明扼要、条理系统。为求实用，本书着重通过较多的例题特别是化工实际例子阐述化学工程中的数学方法。书中一些章节，如生成函数法、约束极值等，很有独到之处，是作者多次举办各种讲学、讲座的主要内容，为一般化工数学书籍所少见。为了便于自学，每章之后还附有一定数量的习题。

本书适应性广泛，可作为大专院校化工系教学参考书，也可供其他工科院校师生及工程技术人员、科研人员阅读参考，也可作为一本工程数学的工具书供随时查阅。

现代化工数学

陈宁馨 编著

马国瑜 黄椿鉴 校对

*

化学工业出版社出版

(北京和平里七区十六号楼)

化学工业出版社印刷厂印刷

新华书店北京发行所发行

*

开本 $850 \times 1168^{1/32}$ 印张 $21^{7/8}$ 字数624千字印数1—5,600

1982年11月北京第1版1982年11月北京第1次印刷

统一书号15063·3335定价3.00元

序

数学是一切数量科学和工程学的共同根源。每当运用数学来促成每一个新兴的科学技术领域，而数学本身又逐渐胜任这样的新任务的时候，数学的应用范围便有所扩大。这些新兴的科学技术领域在数学的基础上发展起来之后，极大地充实着我们这个日新月异的世界的文明和文化。

在本世纪的八十年中，化学工程之所以能够迅速发展，其中数学无疑是以各种形式起了重要作用的。在这期间，化学工程已经成长并且达到了成熟阶段，使它可以和一些历史悠久的老专业——例如法学和医学——相提并论了。现在，这个较新的化学工程行业，几乎对世界上所有的原料生产，已经不只是作出了贡献，而且还起着控制的作用。化学工业既是生产这些原料的工业，也是把这些原料变成日用消费品的工业（据认为，化学工程专业是和美国化工学会在1908年同时诞生的）。

荣幸的是，我很早就选择了这门专业，并亲身经历了这个专业的主要发展和成熟时期。同样荣幸的是，我虽无子女，但却桃李满天下，我视他们如同儿女至亲。

我从前的学生陈宁馨教授，就是其中之一。他在取得了许多成就之后，又作出了新的贡献。他编著了一本教科书用于美国的大学，现在又将本书译成中文，以供中国的大学使用。就我所知，他是有这样经历的第一位化学工程师。

《现代化工数学》一书是一部内容充实、适用性广泛的著作。书中编入了某些非常复杂的问题，这些问题乍看起来甚至都不清楚到底是数学问题还是化学问题，是化工问题抑或机械工程问题，或者是其中两者或全部掺合渗透在一起的问题。

陈博士是一位有才干的数学家，又是一位化学工程师。他能熟练

自如地运用各种复杂程度的许多数学分支，他还常常能作别具匠心的简化，来解决在使用化学工程方法时遇到的实际难题。他应用了微分方程、有限差分方程、生成函数、因次分析、统计分析及其他数学方法，他把这些方法和化学工程——单元操作和单元过程、传递现象、反应器设计等——相结合，得出化学工业和其它加工工业的制造过程和装置设计的最终结果。当然，为了获得成功，必须使这些结果既要在技术上正确，又要在经济上能够获益。

近数十年来，一切数学的基础——算术和电子学相结合，产生了现代计算器和电子计算机。陈博士举出了这方面的一些例子，并且讨论了如何设计程序以求解某些离开计算机几乎不可能解决的问题。

《现代化工数学》一书，已经成了使用英语的化学工程师的财富。本书中文版的出版，值得向陈博士祝贺。在翻译中常需要对汉语创造新的表达形式，这一创新又将成为古老而又丰富的汉语的组成部分。更重要的是，本书将促使中国化学工程师的数量成倍增长，使他们在解决许多困难问题时，能从本书中得到很大帮助。

D.F. 奥斯麦教授
于纽约布鲁克林纽约理工学院

FOREWORD

Mathematics is the common parent of all quantitative science and engineering. Often the dimensions of mathematics have been expanded as it has been applied in nurturing each emerging field of science and engineering and has itself grown to fill these new roles. Nursed by mathematics these new fields have added mightily to the civilization and culture of our increasingly sophisticated world.

Certainly mathematics in its many forms has been most important in making possible the development of Chemical Engineering in the 8 decades of this century during which our profession has come of age and matured to the dignity of its peers—the older professions of law and medicine. By now, our relatively new profession has become an essential contributor—even controller of—the production of almost all of the world's materials, the industries which produce them and the industries which convert them to products for use by consumers. (Some say the birth of our profession coincided with the formation in 1908 of the American Institute of Chemical Engineer.)

Fortunate I have been that my life span has been in parallel years to that of the major growth and maturing of the profession which I selected very early in my own life. Fortunate also I have been, since I have not been

blessed with biological children, to have had so many brilliant academic sons, whom I recognize with almost paternal pride.

One of these, former students, Professor Ning Hsing Chen, has added another achievement to the many of his well rounded career. To my knowledge, he is the first Chemical Engineer, who has authored a textbook for use in American universities, to have been asked to translate it for use in Chinese universities.

NEW MATHEMATICS FOR CHEMICAL ENGINEERS is a stalwart and able guide to the solution of many problems. This includes some that are so complicated that, at first sight, confusion may exist as to whether the basic problem is one of mathematics, of chemistry, of chemical engineering, of mechanical engineering, or of some conglomerate of two or even of all of these.

An able mathematician as well as a chemical engineer, who has been thoroughly seasoned by much experience, Dr. Chen uses with skill and ease the many facets or branches of mathematics of all levels of complexity. Often also he has made marvelous simplifications so as to be able to solve the difficult, real life, problems involved in using the many tools of the chemical engineer. Thus he applies differential equations, finite difference equations, the generating function, dimensional and statistical analysis and other mathematical methods. They are adapted or integrated with those of chemical engineering the unit operations and processes, transport phenomena, reactor design, etc. to give the end result, the design of manufacturing processes and plants for the chemical

and other process industries. To be successful these must be both correct technically and profitable economically.

That handmaiden of all mathematics-arithmetic-in the last decades-has been paired with electronics to mother modern calculators and computers. Dr. Chen describes some examples of the offspring, and teaches how to devise the programs for solving problems almost impossibly tedious by other than electronic calculations.

NEW MATHEMATICS is already a great asset for chemical engineers using English. Dr. Chen is to be congratulated for now making it available in Chinese-often necessarily with the development of new Chinese expressions which will become part of this ancient and rich language. More important-this new NEW MATHEMATICS will double the number of chemical engineers who will thus be able to enjoy its great aid in solving many of their most difficult problems.

Donald F. Othmer
Distinguished Professor
Polytechnic Institute of New
Brooklyn, New York

前 言

在过去的二十年里，化学工程获得了迅速的发展，数学在这个发展中，起着极为重要的作用。没有足够的数学知识，工程师甚至不能做任何工作，即使是实际生产过程，也往往离不开数学。在大学和学院里，愈来愈多的教程，如过程动态和控制，动力学和反应器设计，传递现象，模型和模拟，热力学和单元操作等等，所要求的数学，远远超出了中学数学的范围，不言而喻，在高级的理论性的研究生教程里，要求的数学内容就更多了。

在目前的微积分和微分方程的教程中，仅仅提供给大学生微分、积分、解微分方程的必要的数学知识，但是在它们的实际应用以及用微分方程描述物理、化学的重要问题方面，却介绍得很少。即使是在高等微积分和为数学系开设的这类课程中，虽然有许多定理的证明，但是有关应用的课题，却包含得很少。而近代化工专业文献中，许多问题是用变换、向量、有限差分方法等数学方法处理的，现代化工直接或间接地使用着数字电子计算机，这就要求化工技术人员掌握数值计算方法。因此，一本能适应这些要求的现代化工数学的书是非常需要的。

本书是以作者在美国麻省洛厄尔大学化工系开设的化工数学课的内容为基础整理出来的，它包括了作者在过去十年中成功地讲授三个学期课程的大部分内容。编写本书的目的，是为解决化工实际问题介绍一些现代数学的内容和计算方法。和许多数学教程相比，本书更着重于工程方面的应用，而数学定理的证明或者省略，或者放在次要的位置。虽然本书来源于研究生的教学讲义，但它也适用于具有微积分知识的大学生和专业工程师。其中的一些材料，特别是第一章向量分析，第二、三章的一些节，在许多大学里，已经列为一、二年级数学课的内容，为了帮助大学生和工程师们复习他们已经学过、但可能忘

记的这部分内容，作者认为加入这些材料还是有益的。如果将本书作为教材，教师认为这些材料是不必要的，则可以选择一些有用的章节。为了同样的目的，本书包括了大量的可供选择的方法，使教师在材料上能有更多的选择余地。总之，作者希望本书对于大学生、研究生、专业工程师和教师都能有所帮助。

本书共分八章，它所取材的数学参考文献和参考书，都列在书末。

第一章讨论向量分析，首先介绍向量运算，然后是格林定理和斯托克斯定理，最后列举某些工程上的应用问题。

第二章讨论常微分方程，首先是一阶常系数和变系数线性方程的求解，其次是级数解法、符比尼方法和贝塞尔函数，最后是一些混杂的方程，如哥西方程、欧拉方程和拉格朗日方程，并用许多例子介绍常微分方程的应用。

第三章是微分和变分法的内容。第一部分是复合函数、参数方程和隐函数的导数，平均值定理、泰勒定理、洛比达法则、无约束极值和约束极值，以及积分号下求导数。第二部分列举变分法的一些基本原理。最后用三个例子说明无约束极值、约束极值和积分号下求导数的应用。

第四章讨论偏微分方程。首先是分类和记号，其次是解一阶线性方程的拉格朗日方法，迭加原理和变换方法，一阶非线性方程的雅可比方法，常系数和变系数的齐次及非齐次的线性偏微分方程，以及二阶线性及非线性方程。此外，还介绍了其它一些有用的方法，如分离变量法、相似法和迭加法等。最后用三个例子说明偏微分方程在化工上的应用。

第五章讨论积分变换，其中对拉普拉斯变换作了最详细的介绍。它包括初等函数、特殊函数的拉氏变换，拉氏变换的性质和它的反变换，以及解常微分方程、偏微分方程、有限差分、积分-差分方程和在化工上的应用。最后介绍复变函数的理论和另外一些积分变换。

第六章的内容是有限差分方法。因为这个方法是和阶段操作紧密相连的，所以它是化工中一个重要的数学方法。本章首先讨论差分方

程的数学形式以及它在化工问题上的应用，最后部分首次介绍了生成函数在化工问题上的应用。

第七章论证了矩阵在解代数方程、微分方程和差分方程上的应用。首先讨论矩阵的运算和性质，然后详细论述在化工上的应用。

第八章讨论了数值方法，因为在当今的电子计算机时代，计算机的成功应用极大地依赖于数值计算技术，所以这一章的内容是非常必要的。本章详细讨论了用牛顿-拉夫森方法、欧拉方法、林-伯斯道等方法解代数方程、超越方程、非线性方程和方程组、常微分方程和偏微分方程。本章还包括数值微分，数值积分，插值法和最小二乘法，并且首次在化工数学书中介绍上述内容的电子计算机程序。

最后，第九章讨论了过程最优化，由于化学工业和计算技术的迅猛发展，最优化的应用已日益普遍，本章讨论了数值最优化的各种搜索技巧，以及线性规划、非线性规划、几何规划、极大值原理和动态规划的各种最优化方法，为了便于读者掌握和应用，每种方法都举出实例并列出了计算机程序。

作者去年回祖国讲学，很兴奋地看到祖国的进步。为了也参加建设祖国四个现代化的工作，本人曾介绍了本书的部分内容，深蒙祖国学者爱护，建议在国内出版。此书的出版承蒙在国际上享有极高荣誉的美国化学工程界老前辈、美国布鲁克林工学院著名教授、我的博士论文指导者奥斯麦写了序言，他赞赏了我过去的工作和本书的出版，我对他多年的训导以及在百忙中抽出时间为本书作序，致以衷心的感谢。复蒙北京化工学院马国瑜、黄椿鉴两位教师费了不少精力做整理、改正的工作，外甥罗嘉昌也用了不少时间联系出版事宜，本人非常感激，特此道谢。书中错处在所难免，全由本人负责，尤望祖国前辈加以指正。

美国纽约理工大学化学工程系博士
美国麻省洛厄尔大学化学工程系教授

陈宁馨 一九八〇年二月一日

于美国麻省洛厄尔大学

目 录

序

前言

第一章 向量分析	1
1.1 定义	1
1.2 向量代数	3
1.3 向量微分	7
1.4 梯度、倒三角算子、散度及旋度	10
1.5 向量几何	13
1.6 曲线坐标	16
1.7 向量积分	22
1.8 线积分	23
1.9 二重积分与曲面积分	30
1.10 体积分	33
1.11 平面上的格林定理	34
1.12 高斯定理	38
1.13 斯托克斯定理	43
1.14 应用	46
习题	53
第二章 常微分方程	56
2.1 定义	56
2.2 一阶微分方程	56
2.3 线性微分方程	81
2.4 变系数线性微分方程	97
2.5 方程的级数解	103
2.6 弗罗比尼乌斯方法	105
2.7 贝塞尔函数	112
2.8 一些重要的微分方程	122

2.9	应用	123
	习题	139
第三章	微分与变分法	143
3.1	导数	143
3.2	平均值定理	145
3.3	不定型极限计算——洛比达法则	146
3.4	全微分	148
3.5	复合函数的导数	149
3.6	由参数方程确定的函数的导数	151
3.7	隐函数的导数	153
3.8	方向导数	156
3.9	泰勒定理	158
3.10	极大值与极小值	160
3.11	约束极值	164
3.12	积分号下求导数	183
3.13	变分法	187
3.14	应用	195
	习题	197
第四章	偏微分方程	200
4.1	基本概念	200
4.2	一阶线性偏微分方程	201
4.3	非线性一阶偏微分方程	212
4.4	常系数齐性线性偏微分方程	214
4.5	常系数非齐性线性偏微分方程	220
4.6	常系数或变系数高阶偏微分方程	222
4.7	二阶非线性偏微分方程	230
4.8	其他有用的方法	232
4.9	应用	238
	习题	241
第五章	积分变换	243
5.1	定义	243
5.2	一些简单函数的拉普拉斯变换	244
5.3	一些特殊函数的拉普拉斯变换	244

5.4	拉普拉斯变换的性质	249
5.5	拉普拉斯反变换	253
5.6	海维赛德展开式	255
5.7	应用	260
5.8	复变函数理论	272
5.9	其他积分变换	288
	习题	300
第六章	有限差分计算	304
6.1	定义	304
6.2	差分运算	307
6.3	有限和分	311
6.4	级数和	314
6.5	常系数有限差分方程	316
6.6	变系数有限差分方程	327
6.7	常系数线性差分方程组	336
6.8	高阶差分方程	343
6.9	非线性差分方程的解析方法	344
6.10	非线性差分方程的图解法	352
6.11	拉普拉斯变换解法	354
6.12	生成函数	360
	习题	392
第七章	矩阵	396
7.1	矩阵的主要型式	396
7.2	矩阵的初等运算	399
7.3	矩阵的基本运算	403
7.4	矩阵的性质	406
7.5	线性形式、双线性形式、二次型	417
7.6	凯莱-哈密尔顿定理	418
7.7	西尔威斯特定理	420
7.8	线性代数方程组	422
7.9	常系数线性常微分方程组	422
7.10	高阶微分方程组	425
7.11	变系数线性常微分方程	430

7.12 线性差分方程组	436
7.13 微分-差分方程组	441
7.14 因次分析	444
习题	447
第八章 数值方法	450
8.1 代数方程的求解方法	450
8.2 代数方程和超越方程的数值方法	467
8.3 方程组求解的数值方法	479
8.4 内插法	487
8.5 最小二乘法	492
8.6 数值微分	503
8.7 数值积分	511
8.8 常微分方程	517
8.9 偏微分方程	534
习题	539
第九章 过程最优化	542
9.1 古典最优化方法	542
9.2 数值最优化	548
9.3 搜索技巧	562
9.4 线性规划	605
9.5 非线性规划	619
9.6 几何规划	629
9.7 变分法	636
9.8 极大值原理	643
9.9 动态规划	665
习题	672
附录	674
参考文献	684

第一章 向量分析

近年来，在研究一个系统中的动量、质量和能量传递现象时，向量分析的知识已成为必不可少的了。在三维空间坐标系中的传递方程，一般都是很复杂的，为了把它们写成既简单而又有意义的形式，必须借助向量分析这个重要的工具，因此，如何把一般的方程化成向量的形式，正在受到人们的重视。本章将讨论向量的运算，一些向量的定理，以及向量分析在工程上的应用。

1.1 定 义

1.1.1 向量与数量

一个同时具有大小与方向的量叫向量。只有大小而没有方向的量叫数量。比如，速度为一向量，速率为一数量。本书中用字母上加一横代表向量；图形上用一带箭头的直线段表示向量，直线段的长短表示向量的大小（或称为向量的模），箭头代表向量的方向。如图 1.1-1，O 点称为向量 $\vec{A}$ 的起点，P 点称为向量 $\vec{A}$ 的终点。

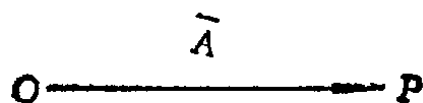


图 1.1-1

1.1.2 单位向量

具有单位长度的向量称为单位向量。任一向量 $\vec{A}$ ，其大小记为 $|\vec{A}|$ ，若 $|\vec{A}| \neq 0$ ，都有一单位向量 $\vec{a}$ 与 $\vec{A}$ 同方向，即

$$\vec{a} = \frac{\vec{A}}{|\vec{A}|} \quad (1.1-1)$$

1.1.3 位置向量

在三维空间直角坐标系中，任一向量 $\vec{A}$ ，可以用原点 O 为起点的

向量来表示。设 $\bar{i}$ 、 $\bar{j}$ 、 $\bar{k}$ 为坐标轴上的单位向量， A_x 、 A_y 、 A_z 表示 $\bar{A}$ 在 x 、 y 、 z 轴正方向的投影，则 $A_x\bar{i}$ 、 $A_y\bar{j}$ 、 $A_z\bar{k}$ 为向量 $\bar{A}$ 在 x 、 y 、 z 方向的分量，这些分量之和等于向量 $\bar{A}$ ，即

$$\bar{A} = A_x\bar{i} + A_y\bar{j} + A_z\bar{k} \quad (1.1-2)$$

由图1.1-2可得

$$\overline{OP}^2 = \overline{OS}^2 + \overline{SP}^2 \quad (1.1-3)$$

$$\overline{OS}^2 = \overline{OQ}^2 + \overline{QS}^2 \quad (1.1-4)$$

因此

$$\overline{OP}^2 = \overline{OQ}^2 + \overline{QS}^2 + \overline{SP}^2 \quad (1.1-5)$$

即

$$|\bar{A}|^2 = A_x^2 + A_y^2 + A_z^2 \quad (1.1-6)$$

因此， $\bar{A}$ 的大小为

$$|\bar{A}| = \sqrt{A_x^2 + A_y^2 + A_z^2} \quad (1.1-7)$$

如图 1.1-3 所示，设向量 $\bar{A}$ 和 x 、 y 、 z 三个坐标轴的夹角分别为 α 、 β 、 γ ，则

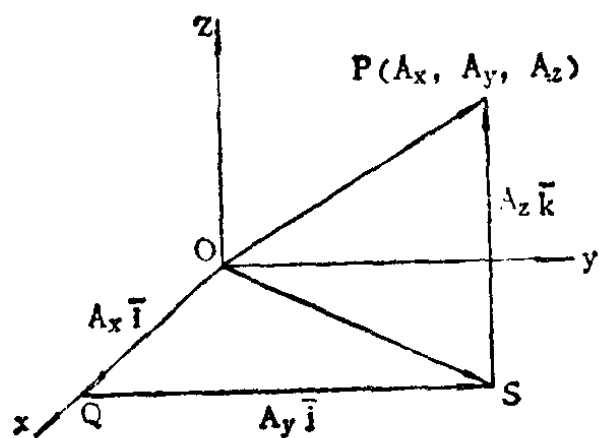


图 1.1-2

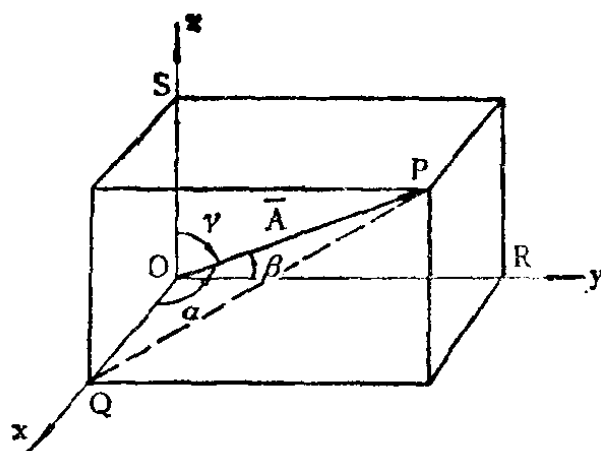


图 1.1-3

$$\cos\alpha = \cos(\bar{A}, x) = \frac{A_x}{|\bar{A}|} \quad (1.1-8)$$

$$\cos\beta = \cos(\bar{A}, y) = \frac{A_y}{|\bar{A}|} \quad (1.1-9)$$