实变数函数论与泛函分析概要

复旦大学数学系 主编

上 海

实变数函数論与泛函分析概要

（第二版）

复旦大学数学系　主编

夏道行　吳卓人　严紹宗　編著

上海科学技术出版社

內 容 提 要

本书是1960年出版的复旦大学数学系編著的“泛函分析”試用本的修訂本。这次修訂是根据加强基础課的精神和二年来試用經驗改写的，較初版本有了較大的变动。初版共六章，現在改为二篇八章，将实变数函数論专列为一篇，內容有了很大充实；泛函分析部分在选材和体例上也有不少改变，同时在各章节之后还增加了适当数量的习题。

本书包括二部分。实变数函数論部分四章，包括集、直綫上的点集，勒貝格积分，勒貝格可测集与可测函数，单調函数与勒貝格不定积分。泛函分析部分四章，包括距离空間，有界綫性泛函与有界綫性算子，希尔伯特空間及其中的全連續算子，希尔伯特空間上算子譜分析。另有一篇附录。可作为綜合性大学数学专业实变数函数論和泛函分析基础課的教材，也可作高等院校有关专业的参考书。

实变数函数論与泛函分析概要

复旦大学数学系　主編

夏道行　吳卓人　严紹宗　編著

上海科学技术出版社出版（上海瑞金二路450号）

上海市书刊出版业营业許可証出093号

商务印书館上海厂印刷　新华书店上海发行所发行

开本850×1168 1/32　印张19 18/32　排版字数466,000

1960年5月第1版印3次共印21,050册

1963年12月第2版　1963年12月第1次印刷　印数1—4,100

統一书号 13119·359　定价(十) 2.15元

第二版序

本书是在复旦大学数学系編著的《泛函分析》試用本的基础上重新編写的，其目的是作为綜合大学数学系实变函数論（包括泛函分析大意）基础課教材或教学参考书。根据基础課的学习要求以及第一版在复旦大学数学系数学专业及計算数学专业各試教近三次的实际情况，这次編写在内容及系統上都作了較大的补充和改动。与第一版比較，在实变函数論部分增加較多，在泛函分析部分增加也不少，但抽去了非綫性泛函分析部分。此外，我們在正文中添加了希尔伯特空間上全連續算子理論，而把更一般的巴拿赫空間上全連續算子的特征理論变成附录。这主要是考虑到先学希尔伯特空間上全連續算子理論可能对初学者更加方便一些。

本书共分八章。第一章介紹在实变函数論中必須的集和直綫上点集的知識；第二章是勒貝格积分理論，在处理方法上仍照第一版，即从簡单函数的积分出发利用黎斯（或丹尼尔）方法扩張积分，这个处理方法是在第一版中和Г. Е. Шилов著Математический АнализIII一书相互独立地采用过的；第三章介紹測度与可測函数构造；第四章介紹单调函数的导数理論，单调函数的分解，全連續函数与勒貝格不定积分以及斯蒂阶积分；第五章介紹距离空間中的点集理論初步，并附有康妥的无理数理論；第六章介紹巴拿赫空間及其上綫性算子的几个基本定理；第七章介紹希尔伯特空間中的直交分解定理，直交系，希尔伯特空間上全連續算子方程的弗列德荷蒙(Fredholm)理論，与希尔伯特-許密特(Hilbert-Schmit)定理，以及相联系的积分方程的某些概念和定理；第八章介紹希尔伯

特空間上自共軛算子,酉算子的譜分析。

这本书的內容在专业基础課的时間內大概是不能讲完的，其中泛函分析的某些部分可以作为专門組課的一些內容。按照我們估計，有可能在83学时內教完第一至第五章的大部分，第六章的一部分和第七章的大部分。

对本书中印小字的部分，初学者可以略过。

我們沒有固定地从某几本书中选取材料。但这本基础課教材內容自然是散見于各书。在改写过程中对我們考虑問題影响較大的有陈建功著《实函数論》，那湯松著《实变函数論》(徐瑞云譯，高等教育出版社)，Г. Е. Шилов 著：Математический АнализIII，刘斯切尔尼克，索伯列夫著《泛函分析概要》，F. Riesz, B. sz.-Nagy 著：Functional Analysis, А. В. Конторович, Р. П. Аркилов: Функциональный анализ в нормированных пространствах(第一部分)等书。我們认为这几本书也可以作为学习本书时的参考书。

本版中編进一些习題，其中有一些是取自陈建功著《实函数論》和那湯松著《实变函数論》两书。

很多兄弟学校及有关单位的同志們曾对本书第一版提出过許多宝貴的意見和建議，这对本书的改編工作起了很大的推动作用，我們在此表示衷心的謝意。由于我們水平的限制，又缺少足够的教学实踐，編写时間也較匆促，这次一定还有很多缺点，我們除了进一步通过教学实踐来修改，充实，提高外，殷切地期望着同志們、讀者們随时給予批評和指教。

編 者 1963年5月

目　录

第二版序

第一篇　实变数函数論

第一章　集,直綫上的点集 …………………………1
　§1　集和集的运算 …………………………1
　§2　映照,一一对应和特征函数 …………………………12
　§3　势的概念 …………………………18
　§4　可列集和連續点集的势 …………………………23
　§5　势的比較 …………………………33
　§6　直积集,等价关系,半序集 …………………………35
　§7　直綫上的点集 …………………………40
　§8　直綫上的零集 …………………………56
第二章　勒貝格积分 …………………………61
　§1　C_1 类函数的勒貝格积分 …………………………61
　§2　黎曼可积函数 …………………………77
　§3　勒貝格可积函数类 L …………………………83
　§4　勒貝格积分的极限定理 …………………………91
　§5　无限区間上的勒貝格可积函数 …………………………103
第三章　勒貝格可測集与可測函数 …………………………113
　§1　可測函数及其初等性质 …………………………113
　§2　可測集及其初等性质 …………………………117
　§3　可測集的构造 …………………………125
　§4　可測函数的构造,叶戈洛夫定理与魯津定理 …………………………135
　§5　可測集上的勒貝格积分 …………………………144
　§6　度量收斂 …………………………151
　§7　二重勒貝格积分及富比尼定理 …………………………160
第四章　单調函数,勒貝格不定积分 …………………………170

§1　单調函数与单調的跳跃函数 ……170
§2　导数，单調函数的导数 ……178
§3　有界变差函数 ……194
§4　不定积分和全連續函数 ……209
§5　奇异函数和单調函数的分解 ……220
§6　黎曼-斯蒂阶积分 ……223
§7　勒貝格-斯蒂阶积分 ……246

第二篇　泛函分析

第五章　距离空間 ……249
§1　距离空間的基本概念 ……249
§2　綫性空間 ……259
§3　綫性賦范空間 ……264
§4　空間 $L^p(E)$ ……267
§5　內积空間 ……277
§6　距离空間中的点集 ……283
§7　稠密性 ……294
§8　完备性 ……303
§9　連續映照 ……314
§10　不动点原理 ……318
§11　距离空間的完备化 ……328
§12　实数理論 ……336
第六章　有界綫性泛函与有界綫性算子 ……343
§1　有界綫性算子的概念 ……343
§2　綫性連續泛函的表示 ……354
§3　綫性有界泛函的延拓 ……364
§4　$C[a, b]$ 上綫性連續泛函的表示 ……379
§5　綫性算子的正則集与譜，不变子空間 ……386
§6　緻密集 ……399
§7　全連續算子 ……419
§8　逆算子定理 ……430
§9　共鳴定理及其应用 ……433

§10　弱收斂 ……447
第七章　希尔伯特空間及其中的全連續算子……455
§1　直交分解 ……455
§2　綫性連續泛函的表示，共軛空間……459
§3　共軛算子 ……462
§4　希尔伯特空間的直交系 ……468
§5　可析的希尔伯特空間 ……476
§6　希尔伯特空間上的全連續算子的特征值与特征向量 ……483
§7　弗列德荷蒙的理論 ……492
§8　含复参数 μ 的积分方程 ……500
§9　希尔伯特空間上自共軛全連續算子 ……505
第八章　希尔伯特空間上算子譜分析……519
§1　投影算子 ……519
§2　双綫性埃尔米特泛函与自共軛算子 ……531
§3　譜系的概念 ……535
§4　自共軛算子的譜分解 ……545
§5　正常算子与酉算子 ……560
§6　酉算子的譜分解 ……573
§7　无界自共軛算子的譜分解 ……578
附　录　巴拿赫空間上全連續算子的黎斯-嘯德尔理論 ……591
§1　具有可列基的巴拿赫空間及其上的全連續算子 ……591
§2　巴拿赫空間上全連續算子的一些基本性质 ……596
§3　全連續算子的黎斯-嘯德尔理論……600
§4　綫性有界算子的譜分解 ……603

第一篇

实变数函数論

第一章 集,直綫上的点集

§1 集和集的运算

1. 在日常活动中,我們常常会碰到集这个概念。例如在研究数学时,我們有时要考察自然数全体、大于100而小于1000的奇数全体等所形成的各种数集;在組織生产时,会碰到某一年度某工厂里所制成的产品,某个車間的全体先进生产者等;又如教室中全体学生也成一集,其中每个学生就是这个集中的元素。总之,我們称具有某种特定性质的抽象的或具体的事物的全体为**集**,其中的事物称为这个集的**元素**。对于一个集来說,任何事物或是这个集的元素(卽属于这个集),或不是这个集的元素(卽不属于这个集)。例如上海市全体公民成一集,則每个上海市的公民都是这个集的元素,此外别的任何人或事物都不是这个集的元素。

集是数学的一个基础概念。例如在代数中,群、环、体等都是集,其中的元素之間具有一定的代数关系;在几何学中平面、直綫、曲綫等都是点集;在数学分析中实数集、函数集、函数的定义域等都是常用的集。

关于集和元素的严格的数学定义,属于数学基础的研究范圍,

这里不准备涉及(可参看豪斯道夫(F. Hausdorff)著《集論》一书)。

集論是研究集的一般性质，而不考察集中元素之間的代数与极限等方面的关系。有关集論的重要文献是德国人康妥(Cantor)在19世紀末叶发表的，后来逐步发展为数学的一个分支，并成为近代数学中許多分支的基础。

以后我們常用大写字母 $A, B, X, Y, \cdots$ 表示集，而用小写字母 $a, b, x, y, \cdots$ 表示元素。

如果元素 a **属于**集 A，则記为 $a\in A$；如果元素 a **不属于** A，則記为 $a\overline{\in} A$. 有时为研究問題的需要，我們引入不含有任何元素的集合，称为**空集**，記为0. 如果集 A 中元素都是集 B 中的元素，則称 A 是 B 的**子集**，記为 $A\subset B$ 或 $B\supset A$. 規定空集为任何集的子集。显然 $A\subset A$. 如果 $A\subset B$ 而 B 中又确有元素 b 不属于 A，則称 A 为 B 的**眞子集**。例如 A 是平面上半徑为 R 的圓的全体，B 是平面上所有圓的全体，則 A 是 B 的子集，而且是 B 的眞子集。如果 $A\subset B$，而且又有 $B\supset A$，卽集 A 中元素都是集 B 里的元素，而集 B 里的元素又都是集 A 里的元素时，則称 A **等于** B，記为 $A=B$. 例如由 $+i$，$-i$ 二个虛数組成的集 A 和方程 $x^2+1=0$ 的根組成的集 B 是相等的。

集的运算　設 A, B 为二集。由集 A 与集 B 的一切元素所組成的集，称为集 A 与集 B 的**和集**，簡称为**和**，記为 $A\cup B$ 或 $A+B$；由集 A 和集 B 的公共元素組成的集，称为集 A 与集 B 的**通集**，記为 $A\cap B$ 或 $A\cdot B$. 完全类似地可以定义有限个或无限个集的和集及通集：設 A_α 是任意一組集，其中 α 是标志集的指标，卽 α 是可以在某个范圍 N 内变化的附标，則由一切 A_α 的元素所組成的集称为**这組集的和集**，記为 $\bigcup\limits_{\alpha\in N}A_\alpha$ 或 $\sum\limits_{\alpha\in N}A_\alpha$，以后大都采用記号"$\sum$"；同时属于每个集 A_α 的元素所組成的集，称为**这組集的通集**，記为 $\bigcap\limits_{\alpha\in N}A_\alpha$，或 $\prod\limits_{\alpha\in N}A_\alpha$，以后大都采用記号"$\prod$". 例如用 A_n 表示由

$\left(0,\ \frac{1}{n}\right)$中点所成的集，则$\sum_{n=1}^{\infty} A_n=(0,\ 1)$，而$\prod_{n=1}^{\infty} A_n=0$.

根据“和”,“通”运算的定义,显然有下面的关系：

1° $A+A=A,\ A\cdot A=A$;（和、通的幂等性）

2° 若 $A\subset B$,则

$A+C\subset B+C,\ A\cdot C\subset B\cdot C$;（和、通的单调性）

3° $A+0=A$,（空集是加法的幺元）

$A\cdot B=0$ 表示集 A 和集 B 互不相交;

4° $A+B=B+A$,（和的交换律）

$A\cdot B=B\cdot A$;（通的交换律）

5° $(A+B)+C=A+(B+C)$,（和的結合律）

$(A\cdot B)\cdot C=A\cdot(B\cdot C)$;（通的結合律）

6° $(A+B)\cdot C=A\cdot C+B\cdot C$.（分配律）

在集合之間除了上面的“加法”和“乘法”以外,我們再引入减法:設 A,B 为两集,由集 A 中不属于 B 的那些元素全体所組成的集,称为集 A 减集 B 的**差集**,記为 $A\setminus B$ 或 $A-B$（注意,这里并不要求 $A\supset B$）. 当 $B\subset A$ 时，称差集 $A-B$ 为集 B 关于集 A 的**余集**,記为 C_AB. 对于减法运算(或称求余运算),显然有如下的簡单性质:

7° 若 $A\subset B$, 则 $A-B=0$;

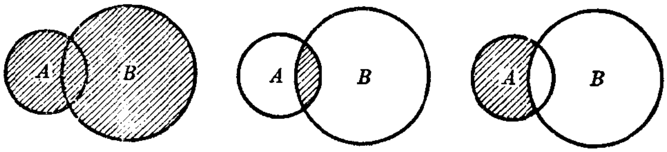
8° $(A-B)\cdot C=A\cdot C-B\cdot C$;（减法分配律）

9° $(C-A)-B=C-(A+B)$;

10° 若 $A\subset C,\ B\subset C$, 则 $A-B=A\cdot C_CB$.

上面从 1°～10° 的簡单性质都可以从“包含”、“相等”、“和”、“通”、“差”的定义推导出来(参看下面証明方法),而且其中有些性质可推广到含有任意个集的一般情况，这里我們不去一一加以証明。

集的和、通、差三个基本运算有如下簡单的示意图：



$A+B$　　　$A \cdot B$　　　$A-B'$

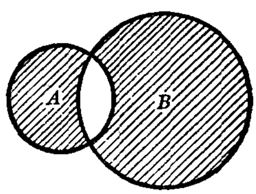
图 1.1

图形可以帮助我們較直观地理解一些概念，或者記忆和启发思考一些問題，这是学习中的有效工具之一，以后我們将經常采用。例如，我們称集

$$(A-B)+(B-A)$$

为集 A 与 B 的**对称差**，記为 $A \triangle B$（如图 1.2 的阴影部分）。显然 $A \triangle B = B \triangle A$，并根据图 1.3，立即看出下面等式成立：

$$A+B=A \triangle B+A \cdot B.$$



$A \triangle B$

图 1.2

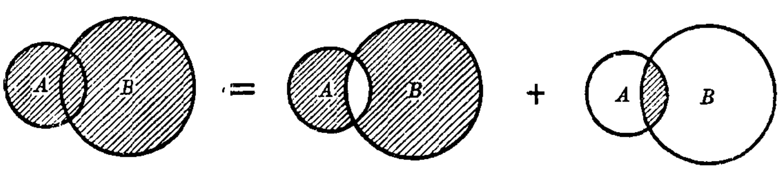


图 1.3

但是必須指出，我們决不能把图示看成定义，或定理的証明。因

为定义必須要用确切的文字敍述，定理的証明又必須經过严格的邏輯論証。因此上述等式的成立，按理說还必須經过严格論証后，方可承认它是正确的。

下面将特別介紹一个有用的运算公式——**和通关系式**。

設 $A_\alpha(\alpha\in N)$ 是一組集，S 是另一个集，則

$$S-\sum_{\alpha\in N}A_\alpha=\prod_{\alpha\in N}(S-A_\alpha), \tag{1.1}$$

$$S-\prod_{\alpha\in N}A_\alpha=\sum_{\alpha\in N}(S-A_\alpha). \tag{1.2}$$

上述两式，若用文字簡单地敍述，就是：和集的余集等于每个集的余集的通集((1.1)式)，通集的余集等于每个集的余集的和集((1.2)式)。現在来加以証明。

首先，(1.1)式左边表示属于 S 而不属于任何一个 $A_\alpha(\alpha\in N)$ 的元素所构成的集，因而它属于所有的集 $S-A_\alpha(\alpha\in N)$，所以左边是右边的子集。反过来說也是正确的。这样，(1.1)式左右二边的集是相同的，因此等式(1.1)成立。类似地可以証明(1.2)式，希讀者自己去加以分析和論証。但为帮助讀者熟练集的运算，下面我們把証明过程一步一步的演算出来，这是証明集的关系式时經常采用的方法之一，讀者完全可以仿此方法来証明上面的性质 $1^\circ\sim10^\circ$.

証 現証(1.1). 将集 $S-\sum\limits_{\alpha\in N}A_\alpha$ 記成 P，集 $\prod\limits_{\alpha\in N}(S-A_\alpha)$ 記成Q，現在要証明 $P=Q$.

設 $x\in P$，則按定义有

$$x\in S \text{ 且 } x\overline{\in}\sum_{\alpha\in N}A_\alpha.$$

因此，对任何 $\alpha\in N$，必然 $x\overline{\in}A_\alpha$，故对每个 $\alpha\in N$，成立着 $x\in(S-A_\alpha)$，即 $x\in Q$. 这就是說，凡是 P 中元素都一定属于 Q，所以 $P\subset Q$.

反之，設 $x\in Q$，則对任何 $\alpha\in N$，$x\in S-A_\alpha$，即

$$x\in S \text{ 且 } x\overline{\in}A_\alpha.$$

因此 $x\overline{\in}\sum\limits_{\alpha\in N}A_\alpha$，所以 $x\in S-\sum\limits_{\alpha\in N}A_\alpha$. 这就是說，凡是 Q 中元素必属于 P，所以 $Q\subset P$. 綜合起来就得到

$$P=Q.$$

(1.1)証毕。

完全类似地可以証明(1.2)式。

2. 上限集和下限集 設 $A_1, A_2, \cdots, A_n, \cdots$ 是任意一列集。显然，任何一个元素 x，可以属于其中某些集，也可以不属于其中某些集。由属于上述集列中无限个集的那种元素全体所組成的集称为这一列集 $\{A_n\}$ 的**上限集**，記为 $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}A_n$；而由属于集列中从某个指标 $n_0(x)$ 以后所有集的那种元素 x (即除去 $\{A_n\}$ 中有限个集外，其余的集都要包含这个元素)全体所組成的集，称为这一列集 $\{A_n\}$ 的**下限集**，記为 $\underline{\lim\limits_{n\to\infty}}A_n$.

关于上限集和下限集有如下表达式：

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}A_n=\prod_{n=1}^{\infty}\sum_{m=n}^{\infty}A_m, \tag{1.3}$$

$$\underline{\lim_{n\to\infty}}A_n=\sum_{n=1}^{\infty}\prod_{m=n}^{\infty}A_m. \tag{1.4}$$

証 現証(1.3). 記 $P=\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}A_n$, $Q=\prod\limits_{n=1}^{\infty}\sum\limits_{m=n}^{\infty}A_m$. 对 P 中的任一元素 x，由定义，它属于 $\{A_n\}$ 中无限个集，不妨設 x 属于集 A_{n_1}, $A_{n_2}, \cdots, A_{n_k}, \cdots, n_k<n_{k+1}, k=1, 2, \cdots$, 因此，对任何自然数 n，当 $n_k\geqslant n$ 时，$x\in A_{n_k}\subset\sum\limits_{m=n}^{\infty}A_m$，所以 $x\in\prod\limits_{n=1}^{\infty}\sum\limits_{m=n}^{\infty}A_m$，即 $P\subset Q$. 反之，在 Q 中任取一元素 y，今証明在 $\{A_n\}$ 中必有无限个集同时含有 y. 事实上，取 $n=1$，因 $y\in\sum\limits_{m=1}^{\infty}A_m$，故必存在正整数 n_1，使 $y\in A_{n_1}$；其次又因 $y\in\sum\limits_{m=n_1+1}^{\infty}A_m$，故必存在 $n_2>n_1$，使 $y\in A_{n_2}$，如此手續一直进行下去，得到一列自然数 $\{n_k\}$, $n_1<n_2<\cdots<n_k<\cdots$，集 A_{n_1}, $A_{n_2}, \cdots, A_{n_k}, \cdots$ 都含有元素 y，因此 $y\in P$. 于是 $Q\subset P$. 总起来

便有 $P=Q$.

(1.4)式的証明完全类似,留給讀者作为一个练习。

〔例1〕 設 A_n, $n=1, 2, \cdots$ 为如下一列点集:

$$A_{2n+1}=\left[0,\ 2-\frac{1}{2n+1}\right],\quad n=0, 1, 2, \cdots,$$

$$A_{2n}=\left[0,\ 1+\frac{1}{2n}\right],\quad n=1, 2, \cdots.$$

因为区間 $[0, 1]$ 中的点属于所有 A_n, $n=1, 2, \cdots$, 而对于区間 $(1, 2)$ 中任何一点 x, 必存在 $n_0(x)$, 使当 $n>n_0(x)$ 时,

$$1+\frac{1}{2n}<x<2-\frac{1}{2n+1},$$

即 $x\overline{\in} A_{2n}$, $x\in A_{2n+1}, n=n_0+1, n_0+2, \cdots$.换句話說,对区間(1,2)中的点 x, 具有充分大的奇数指标的集都含有 x, 即 $\{A_n\}$ 中有无限个集含有 x; 而充分大的偶数指标的集都不含有 x, 即 $\{A_n\}$ 中有无限个集不含有点 x. 因此

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} A_n=[0, 2)^{①},\quad \underline{\lim_{n\to\infty}} A_n=[0, 1].$$

〔例2〕 設 $A_n=\left[0,\ 1+\dfrac{1}{n}\right]$, $n=1, 2, \cdots$. 用类似于上面的方法,立即得到

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} A_n=[0, 1],\quad \underline{\lim_{n\to\infty}} A_n=[0, 1].$$

〔例3〕 設 $\{f_n(x)\}$, $n=1, 2, \cdots$ 及 $f(x)$ 都是区間 $[a, b]$ 上的实函数而且 $f(x)=\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)$. 記 $E_n(c)$ 为区間 $[a, b]$ 中使 $f_n(x)\leqslant c$ 的点 x 全体所成的集。类似地, $E(c)$ 表示区間$[a, b]$中使 $f(x)\leqslant c$ 的点 x 全体所成的集,那末

$$E(c)=\prod_{k=1}^{\infty}\underline{\lim_{n\to\infty}} E_n\left(c+\frac{1}{k}\right).$$

① 关于区間$[a, b]$, (a, b), $[a, b)$或$(a, b]$的意义見第 40 頁。

事实上，若 $x\in E(c)$，則对任一自然数 k 有 $f(x)<c+\frac{1}{k}$. 然而 $f(x)$ 是 $\{f_n(x)\}$ 的极限，因此必有 N 使得 $n\geqslant N$ 时 $f_n(x)<c+\frac{1}{k}$. 这就是說，$x\in E_n\left(c+\frac{1}{k}\right)$. 所以 $x\in\varliminf\limits_{n\to\infty}E_n\left(c+\frac{1}{k}\right)$. 我們得到 $E(c)\subset\prod\limits_{k=1}^{\infty}\varliminf\limits_{n\to\infty}E_n\left(c+\frac{1}{k}\right)$.

反过来，如果对每个 k，$x\in\varliminf\limits_{n\to\infty}E_n\left(c+\frac{1}{k}\right)$，那末就有一个 N_k，使得 $n\geqslant N_k$ 时 $x\in E_n\left(c+\frac{1}{k}\right)$，或是写成 $f_n(x)\leqslant c+\frac{1}{k}$. 因而对每个 k，$f(x)\leqslant c+\frac{1}{k}$. 令 $k\to\infty$，就得到 $x\in E(c)$. 这和上一段結合起来就得到我們所需要的集 $E(c)$ 的表示。

利用函数列 $f_n(x)$ 所定义的集 $E_n(c)$ 来分析极限函数 $f(x)$ 所定义的集 $E(c)$ 的方法是实变函数論所常用的（利用集論）一种分析方法。

設 $\{A_n\}$ 是任一列集，S 为另一个集，不难由和通公式得到

$$S-\varlimsup_{n\to\infty}A_n=\varliminf_{n\to\infty}(S-A_n), \tag{1.5}$$

$$S-\varliminf_{n\to\infty}A_n=\varlimsup_{n\to\infty}(S-A_n). \tag{1.6}$$

其次，从上下限集的定义，很容易得到如下关系：

$$\varliminf_{n\to\infty}A_n\subset\varlimsup_{n\to\infty}A_n.$$

特别，若集列 $\{A_n\}$ 适合等式

$$\varliminf_{n\to\infty}A_n=\varlimsup_{n\to\infty}A_n,$$

即当上限集和下限集相等时，称集列 $\{A_n\}$ **收斂**，而称集 $A=\varliminf\limits_{n\to\infty}A_n=\varlimsup\limits_{n\to\infty}A_n$ 为集列 $\{A_n\}$ 的**极限**，記为 $\lim\limits_{n\to\infty}A_n$.

在例 2 中的集列 $\{A_n\}$ 就是以 $[0, 1]$ 为极限的。

单調集列 若集列 $\{A_n\}$ 滿足

$$A_n \subset A_{n+1} (A_n \supset A_{n+1}), \quad n=1, 2, \cdots,$$

则称 $\{A_n\}$ 是单調增加(减少)集集列,它們統称为**单調集列**。从极限的定义,我們很容易証明:单調集列一定收斂。

若 $\{A_n\}$ 是单調增加集列,则

$$\lim_{n\to\infty} A_n = \sum_{n=1}^{\infty} A_n. \tag{1.7}$$

若 $\{A_n\}$ 是单調减少集列,则

$$\lim_{n\to\infty} A_n = \prod_{n=1}^{\infty} A_n. \tag{1.8}$$

若 $\{A_n\}$ 是任意的一个集列,引入集

$$G_n = \sum_{m=n}^{\infty} A_m, \quad F_n = \prod_{m=n}^{\infty} A_m,$$

显然 $G_n \supset G_{n+1}$, $F_n \subset F_{n+1}$, $n=1, 2, \cdots$. 換言之, $\{G_n\}$, $\{F_n\}$ 是单調集列。根据上、下限集定义和单調集列的极限关系式 (1.7), (1.8),我們立即得到

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} A_n = \lim_{n\to\infty} G_n, \tag{1.9}$$

$$\underline{\lim_{n\to\infty}} A_n = \lim_{n\to\infty} F_n. \tag{1.10}$$

也就是說,任何一列集的上、下限可以化为单調减少、单調增加集列的极限。

习　　題

1. 驗証等式(1.5), (1.6).

2. 設 $A_{2n+1} = \left(0, \frac{1}{n}\right)$, $A_{2n} = (0, n)$, $n=1, 2, \cdots$, 求出集列$\{A_\nu\}$的上限集和下限集。

环与代数　由某些集作为元素所組成的集 $\mathfrak{S}$,称为**集族**。我們介紹两种有用的集族。

設 $\mathfrak{R}$ 是一个集族,如果它滿足下面两个条件: