应用最优估计

〔美〕A.盖尔布　主编

[redacted]

胡寿松　伍立明　译
林道垣　校

国防工业出版社

应用最优估计

〔美〕A. 盖尔布 主编

胡寿松 伍立明 译

林道垣 校

国防工业出版社

内容简介

本书是一本介绍现代估计理论及其应用的优秀著作。原书于1974年出版，其后经多次再版发行。中译本系根据1979年版本译出。

本书由三个主要部分组成。第一部分介绍本书要点及有关数学知识，包括向量、矩阵、概率与随机过程，以及线性系统理论等内容；第二部分介绍最优估计理论，其中包括最优线性滤波、预测和平滑，以及非线性滤波和平滑；第三部分介绍最优估计理论的应用，其中包括次优滤波器设计、灵敏度分析以及实现考虑等实用中非常重要的问题。全书最后还指出了其他一些有实用价值的课题，如自适应卡尔曼滤波、观测器、随机逼近法以及实时参数辨识等。

本书叙述层次分明、深入浅出，着重阐述物理实质和实际应用，同时书中编有数量丰富的例题和习题，可以帮助读者理解和运用现代估计理论。

本书可供自动控制、惯性导航、无线电通讯、系统工程、应用数学、以及空间技术等领域中的科技人员参考，亦可作为高等院校有关专业的研究生和高年级学生的教科书。

APPLIED OPTIMAL ESTIMATION
Arthur Gelb
THE M. I. T. PRESS

*

应用最优估计
〔美〕A. 盖尔布　主编
胡寿松　伍立明　译
林道垣　校
责任编辑　陈子玉

*

国防工业出版社出版、发行
（北京市车公庄西路老虎庙七号）
新华书店经售
国防工业出版社印刷厂印刷

*

787×1092　1/32　印张 $14^{3}/_{8}$　316千字
1989年5月第一版　1989年5月第一次印刷　印数：0,001—2,280册

ISBN 7-118-00288-7/O·16　　定价：7.30元

译　序

《应用最优估计》，是一本介绍现代估计理论及其应用的优秀著作。该书原稿以美国“分析科学公司”在不同类型的大规模系统中应用现代估计理论所取得的实际经验为基础，经提炼、加工逐步完善而成，并经过多次教学实践。原书自1974年出版以来，已多次再版，至今仍被广泛引用。中译本系根据1979年版本译出。

本书作者成功地把理论结合于实际，总结了许多应用最优估计理论的实践经验。本书叙述简明扼要、层次分明、深入浅出，着重于阐述物理实质和实际应用，并采用了直观的、启发式的数学论证方法。阅读本书，对有关的实际工作者和理论工作者，都会得到较大的裨益。书中选编了各种例题和习题150多道，其中不少题目本身就是从实际研究中提炼出来的，便于读者自学和具体应用。各章结尾处并列有各种参考文献200余篇，为进一步深入研究估计理论及其应用提供了很好的线索。

目前，我国进入了社会主义现代化建设的新时期，有关科技人员和研究生以及高年级大学生正在学习和应用现代估计理论。译者认为，本书将有助于读者能够胜任实际估计器的设计和计算，是一本比较成熟、比较适用的近著。在本书翻译过程中，译者对书中的主要公式进行了推导，对由于明显的印刷错误所作的修改，则未一一指出。

本书前言及第一至第五章，由胡寿松翻译；第六至第九

章，由伍立明翻译。全书由林道垣审校。

在本书翻译过程中，许多同志给予了热情支持和帮助，使得本书译本得以早日问世。由于我们水平有限，译校中可能存在错误和不当之处，敬请读者不吝指正。

译　者

前　言

估计就是从数据中提取信息的过程，这些数据可以用来推断所要求的信息，并可能含有误差。现代估计方法，考虑到测量误差、扰动和控制作用对系统的影响、以及关于信息的验前知识，利用已知的关系式，根据测量值计算所要求的信息。可以把不同的测量值混合起来，以形成“最好的”估计，并且可以用最优的方式近似表示测不到的信息。本书的意图是使读者能够胜任实际估计器的设计和计算，所以，内容侧重于最优估计器的应用方面，而不是理论方面。本书尽力用简单而又有趣的描绘向读者介绍现代估计理论和实践的主要成果。采用启发式论证，而不强调理论上的完美。着重介绍物理概念以及有实际重要性的关键问题。

本书由三个主要部分组成。第一部分介绍本书要点并扼要论述基本数学知识：第一章是简短的概述，其中包括历史回顾；第二、三章论述随机过程理论和线性动态系统状态空间特性的基本数学知识，这是理解最优估计理论必不可少的基本前提。第二部分给出有关最优估计理论的推导、解释和例题；第四、五章分别叙述最优线性滤波和最优线性平滑；第六章叙述非线性滤波和平滑问题。第三部分讨论关系到所实现的最优估计器成败的实际问题：第七、八章以一定篇幅讨论次优滤波、灵敏度分析以及如何实现等实践中很重要的问题；第九章介绍一些有实用价值的附加课题，包括估计理论的改进和一些其他观点，以及最优线性估计理论和最优线

性控制理论在数学上的密切联系。

为了透彻地说明理论内容，本书列举了许多例题。每一章的结尾处还编入了一些附有答案的习题，供读者进一步自学书中的内容。

本书是根据“分析科学公司”在美国若干政府机构中讲课的教材写成的。由于讲课的手稿是根据大量实际经验总结而成的，这些经验是“分析科学公司”把现代估计理论应用于不同性质的大规模系统时取得的，因此，实际上“分析科学公司”技术部的所有成员，都在这一或那一方面对本书做出了贡献。特别要感谢那些直接对本书编著作出贡献的同仁。最后应指出，许多读者在仔细阅读了本书以前各版后，提出了许多评论和改进意见，使本书在这一次再版时得益非浅。

A. 盖尔布

1979年7月16日

目　　录

第一章　引　　言

历 史 回 顾

带有随机变量的数据处理方法的产生，可以追溯到高斯(Gauss)所处的年代（约1800年）。高斯创造了确定性最小二乘法，并用它处理比较简单的轨道测量问题[1]。一百多年后(约1910年)，从事概率密度研究的费歇尔(Fisher)提出了极大似然估计法[2]，对估计理论的广泛课题作出了又一个重大贡献。大约在1940年，维纳（Wiener）利用随机过程理论提出了统计最优滤波器的频域设计法[3,4]。这种方法适用于以相关函数和连续滤波器脉冲响应表示的连续时间问题，但它只局限于平稳统计过程，且只能提供稳态最优估计值。同一时期，柯尔莫哥洛夫（Kolmogorov）论述了离散时间问题[5]。在以后的二十年中，维纳的工作推广到了包含非平稳和多通道的系统（这是一种通常需进行繁复计算的方法）[6~8]。卡尔曼(Kalman)和其他一些学者，在1960年左右提出了建立在状态空间时域公式基础上的最优递推滤波法[9~13]。这种方法就是现在熟知的卡尔曼滤波器，它特别适用于数字计算机。的确，在现代的多传感器系统中，最优递推滤波法正是数据混合的基础。

有趣的是，高斯的工作与比较“现代”的方法之间有许多相似之处。例如文献〔14〕中指出：高斯注意到需要多余的数据以消除测量误差的影响；在研究过程中，他提出需对所研究的系统建立动态模型；他谈到了观测的不准确性，因而需

有一个概率分析的阶段；并认为将观测值进行“适当组合”能提供最准确的估计，由此涉及到估计器结构和性能准则的定义问题；他提到了为确定未知量所必需的最少观测数，从而提出了目前称为系统“可观测性”的课题。此外，还可举出一些其它的相似之处。事实上，可以证明：卡尔曼滤波器在本质上是高斯原始最小二乘问题的一个递推解㊀。

注意到现代方法与经典方法之间的两个根本差别也是有意思的。这就是：采用随机过程与采用确定性信号描述的差别；使用高速数字计算机以得到数值解与人工用“纸和笔”求闭合形式解的差别。在前一种差别中，现代方法应用了现代数学，这样就能更严密地刻画所研究的物理情况；后者则极大地拓宽了可以研究的问题的范围。

最优估计

最优估计器是一种算法，它利用系统和测量动态的知识、假设的系统噪声和测量误差的统计特性，以及初始条件信息，对测量值进行处理，求得系统状态的最小误差㊁估计。在恰当定义的统计意义上使估计误差最小，以及利用全部测量数据加上关于系统的验前知识，是这种类型数据处理器的预想优点。其潜在缺点是对错误的验前模型和统计值很敏感，以及这种方法的固有计算工作量很大。上面介绍的重要概念将在后面讨论。

图1.0-1所示为人们感兴趣的三类估计问题。当希望估值与最后测量点在时间上重合时，这种估计问题就称为滤波；当感兴趣的时刻落在测量数据的时间间隔之内时，这种估计

㊀ 递推解能序贯地（而不是成批地）处理测量数据。

㊁ 按照所提出的最优性准则。

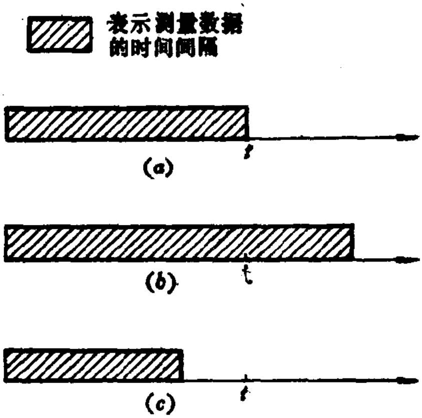

图1.0-1　三类估计问题（希望估值在时刻 t）
（a）滤波；（b）平滑；（c）预测。

问题叫做平滑；当感兴趣的时刻出现在最后得到的测量值之后时，这种估计问题称为预测。

最普通的最优滤波方法，大概是由卡尔曼提出的，用来估计线性系统状态的方法。这种方法如图1.0-2所示，它为说明最优估计器的能力和局限性提供了一个合适的例子。例如，

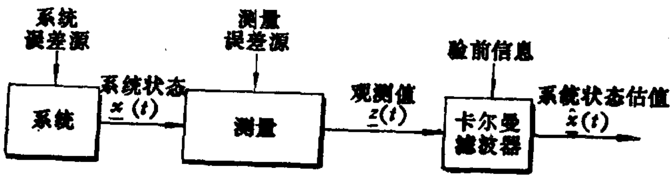

图1.0-2　描述系统、测量和估计器的方块图

给出一个线性系统模型及其特性的任意测量值，加上表征系统和测量误差的统计模型，再加上初始条件信息，卡尔曼滤

波器就可描述如何处理测量数据。然而，卡尔曼滤波器本身并不解决确定最优测量程序的问题，以及出现参数不可靠时的设计问题；也不解决如何处理计算误差的问题。解决这些问题，除了用来推导滤波算法的那些条件以外，还必须利用其他设计准则。

最优估计理论的应用

最优估计理论的应用很广，例如：核医学中示踪物的研究、统计图像的增强、交通密度的估计、化学过程的控制、河水流量的估计、动力系统负载的预测、向量心电图的分类、卫星轨道的估计以及核反应堆参数的辨识等。

估计问题可以根据单一传感器在单一过程中进行测量来提出，或更一般地，可根据多传感器和多过程来提出。后一种情况称为多传感器系统。设有 l 个传感器，它们在 m 个物理过程中提供测量值。某些传感器可以测量同一个量，这就得到了简单的多余测量值；其他传感器可以测量与所考察过程只有间接关系的量。对于多传感器系统，估计问题是处理传感器输出，以得到所考察过程的“最好”估计值。用计算机实现的数据处理算法，对传感器的数据进行运算，可提供希望的估计值。这些估值可用来驱动显示器，也可用作被观测物理系统的控制信号（如图1.0-3所示）。在现代的多传感器系统中，常用最优滤波理论来导出数据处理算法。

在导航领域中，存在一些引人注目的多传感器系统的例子。外部测量值原来是用来以确定性方式修正导航变量的。例如，改变系统的位置指示，使它与外部的位置测量结果一致。但这种作法忽视了两个重要的事实：第一，外部测量值本身含有随机误差，这种误差与导航误差相比，可能是显著的；第二，导航系统的误差主要是由随机的、时变的导航传

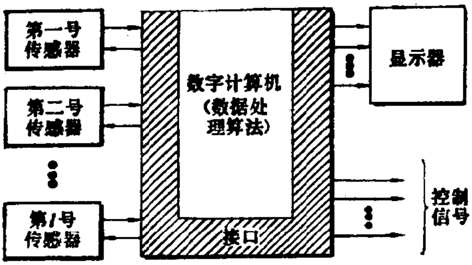

图1.0-3　现代的多传感器系统

感器误差所引起的。最佳利用外部测量值和导航系统提供的结果，可以得到比只利用外部测量值，或只利用导航系统时更高的导航精度。

现代估计方法应用于多传感器系统，开始于1960年，当时离提出和发表最优递推滤波理论不久。因为在一个典型的导航系统中，误差基本上是以线性方式传播的，而这些误差的线性组合又可以根据外部测量值检出。所以，对于这些误差的估计，卡尔曼滤波器确实适宜。卡尔曼滤波器对于具有明显相关时间的系统所有的误差源，也可提供有用的估计。此外，利用卡尔曼滤波器还可改进设计和增加运算的灵活性。作为一个时变滤波器，当非平稳误差源的统计特性已知时，它也可以适应。在导航系统中，结构的改变很容易用改变程序来实现。卡尔曼滤波器可以最优地利用任意个外部测量值(将其组合使用，或序贯使用都行)。它是一种提高导航系统精度的方法，能系统地利用所有可得到的外部测量值，而不拘其误差大小。卡尔曼滤波理论的这种应用在以下各章中会经常遇见。

也许在最优估计的任一种实际应用中，重要的非硬件问题是建模和实际性能估计。诚然，这些问题是相互关联的，而恰当地分析它们，是系统在现实环境中成功运行的先决条件。基于这种看法，在任何运行系统中，估计理论的合理用途显然是：第一，“最优”系统特性的设计和计算机计算；第二，在考虑了成本限制、灵敏度特性、计算要求、测量程序等条件下，设计适当的“次优”系统；第三，样机系统的构造和测试，并进行最后的调整或改变。

例1.0-1 考虑一个由两个传感器组成的系统，每一个传感器对未知常量 x 进行一次单独测量，得 z_i（$i=1, 2$）。测量时存在随机、独立、无偏的测量误差 v_i（$i=1, 2$）。试设计一个组合两个测量值以得到 x 最优估计的数据处理算法。

测量值可描述为

$$z_1=x+v_1,\quad z_2=x+v_2 \tag{1.0-1}$$

在没有其它任何信息时，我们可以找出 x 的一个估值，它是测量值的线性函数，形式为（上标“∧”表示估值）

$$\hat{x}=k_1z_1+k_2z_2 \tag{1.0-2}$$

其中k_1和k_2待定。将估计误差$\tilde{x}$定义为

$$\tilde{x}=\hat{x}-x$$

取$\tilde{x}$的均方值最小，作为最优性判据。此外，还希望 k_1 和 k_2 的选择与 x 值无关。如果估值无偏，即如果

$$E[\tilde{x}]=E[k_1(x+v_1)+k_2(x+v_2)-x]=0 \tag{1.0-3}$$

式中 E 表示总体期望或平均值[1]，则 k_1 和 k_2 与 x 无关的条

---

[1] 期望运算在 2.2节讨论。

件● 将成立。对上述期望进行运算，其中$E[v_1]=E[v_2]=0$以及$E[x]=x$。因为x是“非随机”的，我们得

$$k_2=1-k_1 \tag{1.0-4}$$

合并式(1.0-1)～(1.0-4)，算得均方差形式为

$$E[\tilde{x}^2]=k_1^2\sigma_1^2+(1-k_1)^2\sigma_2^2 \tag{1.0-5}$$

式中σ_1^2和σ_2^2分别表示v_1和v_2的方差。上式对k_1微分并令其结果为零，得

$$2k_1\sigma_1^2-2(1-k_1)\sigma_2^2=0$$

或

$$k_1=\frac{\sigma_2^2}{\sigma_1^2+\sigma_2^2}$$

相应的最小均方估计误差是

$$E[\tilde{x}^2]=\left(\frac{1}{\sigma_1^2}+\frac{1}{\sigma_2^2}\right)^{-1} \tag{1.0-6}$$

可见，均方估计误差小于两个均方测量误差中的任何一个。算法[式(1.0-2)]

$$\hat{x}=\left(\frac{\sigma_2^2}{\sigma_1^2+\sigma_2^2}\right)z_1+\left(\frac{\sigma_1^2}{\sigma_1^2+\sigma_2^2}\right)z_2 \tag{1.0-7}$$

在所关注的不同极限下的意义是：如果$\sigma_1^2=\sigma_2^2$，则测量值取其平均值；如果一个测量值是准确的（σ_1或σ_2等于零），则另一个测量值就被舍弃；等等。

在例1.0-1中，所考虑的物理量是一个常值标量，且只能得到它的两个线性测量值。一般说来，我们感兴趣的是在有许多测量值的场合下时变向量的估计。

物理系统和测量值可按它们是静态的还是动态的，是连

● 加上这个条件是因为x未知，故增益k_1和k_2必须与x无关。

续的还是离散的，以及是线性的还是非线性的来分类。此外，我们还对实时数据处理算法（滤波和预测）及验后算法（平滑）感兴趣。由于符号简单和理论有力，以后叙述这些物理系统和数据处理算法时均用状态空间表示法表达，并使用向量和矩阵数学以及随机过程理论的概念。这些课题将在第二章和第三章里讨论。

习　题

题1-1

对于测量误差相关的情况，即$E[v_1 \quad v_2]=\rho\sigma_1\sigma_2$，其中$\rho$为相关系数($|\rho|\leqslant 1$)，重复例1.0-1。试证对于最优估计，有

$$k_1=\frac{\sigma_2^2-\rho\sigma_1\sigma_2}{\sigma_1^2+\sigma_2^2-2\rho\sigma_1\sigma_2}$$

及

$$E[\tilde{x}^2]=\frac{\sigma_1^2\sigma_2^2(1-\rho^2)}{\sigma_1^2+\sigma_2^2-2\rho\sigma_1\sigma_2}$$

从物理上说明当$\rho=\pm 1$时，$E[\tilde{x}^2]=0$的意义。

题1-2

在增益k_1和k_2没有限制时，根据式（1.0-1）和(1.0-2)计算$E[\tilde{x}^2]$。利用$E[x]=x$和$E[x^2]=x^2$，证明使$E[\tilde{x}^2]$最小的增益值是x的函数。

题1-3

考虑与例1.0-1类似的情况，但是其中有三个独立测量值而不是两个。论证为什么求出的估计器在形式上竟是

$$\hat{x}=k_1z_1+k_2z_2+(1-k_1-k_2)z_3$$

推导k_1和k_2的最优值，并用它们证明最优估计为

$$E[\tilde{x}^2]=\left(\frac{1}{\sigma_1^2}+\frac{1}{\sigma_2^2}+\frac{1}{\sigma_3^2}\right)^{-1}$$