〔日〕 古田胜久 佐野昭 著

线性系统理论基础

朱春元 等译

朱克定 校

国防工業出版社

TP11
5

线性系统理论基础

〔日〕古田胜久　佐野　昭　著
朱春元　等译
朱克定　校

国防工业出版社

内容简介

本书阐述了现代控制理论中的线性控制理论。内容包括动态线性系统的表示、系统结构、标准形和实现问题、状态反馈和去耦控制、最优控制和观测器以及卡尔曼滤波及其统计处理。

全书内容丰富，概念阐述清楚。定理多为先例后证，便于读者深入理解。有大量例题和习题，便于初学者学习。本书可作为大学自动控制和电气仪表专业的教材，也可供有关科研和工程技术人员参考。

基礎システム理論
古田勝久
佐野 昭 著
コロナ 社 昭和55年1月15日初版第2刷発行
*
线性系统理论基础
〔日〕古田胜久
佐野 昭 著
朱春元 等译
朱克定 校
*
国防工业出版社出版
新华书店北京发行所发行 各地新华书店经售
国防工业出版社印刷厂印装
*
850×1168 1/32 印张 6 3/4 175千字
1984年12月第一版 1984年12月第一次印刷 印数：0,001—7,000册
统一书号：15034·2743 定价：1.10元

致中文读者●

这次承蒙朱克定先生的热心和努力，将《线性系统理论基础》译成中文，获得向中国的科学技术工作者和大学生介绍的机会，我作为本书的著者表示衷心地感谢。

本书是在东京工业大学以工学院高年级学生为主要对象，讲授“线性系统理论”的基础上编辑、发展而形成的。其中主要是应用状态空间法的概念，并试图对目前应用现代控制理论异常活跃的各个部门作为深入研究的理论基础。

如果本书有助于——哪怕是微薄的——日、中两国之间日益发展的情报交流以及对中国的四个现代化建设有所裨益的话，深为幸甚。

古田胜久　1983年1月

● 作者寄来的就是中文稿，除个别字外，基本未作更动。——译者

译者的话

本书是根据日本的大学讲义丛书“线性系统理论基础（1980年版）”一书译出的。书中阐述了线性系统的基本理论及其应用。是学习现代控制理论的基础课程。

1979年秋，本书著者之一、东京工业大学古田副教授来中国讲学时，曾以此书（1978年版）作讲义使用。当时参加翻译的还有华克强、邱海明、钱凤莲、范晓虹等同志。这次翻译时曾参考了他们的译文，在此表示谢意。

参加本书翻译的有朱春元（第一、二章）、吕树真（第三章）、王子生（第四章）、王如森（第五章）、刘彤（第六章）。最后由朱春元、王如森对各章译文进行了统一整理，对重要定理、公式及习题答案进行了推证和验算，对原文错印之处作了订正。

原　序（简译）

关于系统理论的基础是什么，有各种各样议论。就系统理论本身而言，从一般的系统理论到各专门领域的系统理论名目繁多。但是，考虑其共同基础，不外乎是数学。不过，除此之外，作为共同基础来考虑的应该是线性系统理论。众所周知，这种理论对线性系统的结构分析以及要求具有所期望特性的系统设计是有效的。这种理论在控制领域中称为“现代控制理论”。由于迄今为止它主要是由从事控制理论的研究人员发展起来的，所以往往被认为只有在控制系统分析和设计中才是有效的。近年来，人们开始认识到这个理论的有效性，它不仅能应用于回路分析等方面，而且在工程以外的经济学、社会学等许多领域中也得到了应用。

为此，本书以叙述从作为系统基础理论的线性系统理论的基本内容到它的应用为目的，以电气系高年级学生为对象，也打算威为其它工程、经济、社会系学生和研究人员的线性系统理论的入门书。所以与通常的线性系统理论方面的书相比，尽量避免在定理后就直接证明，而是先举例说明。另外，本书的读者要以知道拉普拉斯变换为前提。

本书是以从第一章按顺序阅读下去容易理解的原则而写的。但仅对控制系统设计有兴趣的读者，可跳过“标准形”、“去耦控制”等部分内容而阅读。

目　　录

第一章　动态线性系统的表示

§1.1　系 统 表 示

1.1.1　输入输出关系

表示线性系统输入输出关系的方法，有权函数（脉冲响应）、传递函数、频率响应函数等。这些表示可以扩展到多输入多输出线性系统的场合，如图 1.1 所示。考虑具有 m 个输入 u_1，u_2，…，u_m 和 p

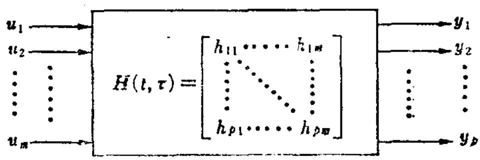

图1.1　权函数矩阵

个输出 y_1，y_2，…，y_p 的线性系统，利用向量来表示，则 $\boldsymbol{u}=(u_1,\ \cdots,\ u_m)^T$ 表示输入，$\boldsymbol{y}=(y_1,\ \cdots,\ y_p)^T$ 表示输出，式中 T 表示向量的转置。$\boldsymbol{u}$、$\boldsymbol{y}$ 是时间函数，特别是，如果把时间区间 $[t_0,\ t_1]$ 上的函数，例如用 $\boldsymbol{u}_{[t_0,t_1]}$ 来表示，那末，非定常线性系统的输入输出关系可表示为

$$\boldsymbol{y}(t)\triangleq\boldsymbol{y}(t,\ \boldsymbol{u}_{(-\infty,\infty)})=\int_{-\infty}^{\infty}\boldsymbol{H}(t,\tau)\boldsymbol{u}(\tau)d\tau \qquad (1.1)$$

$\boldsymbol{H}(t,\ \tau)$ 称为**权函数矩阵**。在 (i,j) 位置上的元素 $h_{ij}(t,\ \tau)$ 是由第 j 个输入 $u_j(t)$ 到第 i 个输出 $y_i(t)$ 间的**权函数**。对在时刻 ξ 的输入脉冲 $u_j(t)=\delta(t-\xi)$，输出为 $y_i(t)=h_{ij}(t,\ \xi)$。因此，也称为**脉冲响应函数**。$\boldsymbol{H}(t,\ \tau)$ 是 t 和 τ 的函数。

对定常线性系统而言，当使输入函数在时间方向平移时，输出仍和原来输出波形相同地平移，根据这种性质，权函数 $\boldsymbol{H}(t,\ \tau)$ 仅仅是 $t-\tau$ 的函数。因此，定常线性系统的输入输出关系

可表示为

$$y(t) \triangleq y(t, u_{(-\infty,\infty)}) = \int_{-\infty}^{\infty} H(t-\tau)u(\tau)d\tau \qquad (1.2)$$

如式（1.1），（1.2）那样，在时刻 t 的输出 $y(t)$ 依赖于时刻 t 以前的输入$\{u(\tau), \tau \leqslant t\}$时，一般称为**动态系统**。

另外，把输出 $y(t)$ 取决于时刻 t 之后的未来输入$\{u(\tau), \tau > t\}$的系统，称为物理上不可实现的系统。这样可把关于时刻 t 的输出 $y(t)$ 只与 t 时刻之前的输入有关而与 t 之后未来的输入无关的这种性质称为**因果律**。因果律是物理上可实现的系统本质上所具有的性质。为使式（1.1）满足因果律，必有

$$H(t, \tau) = 0, \ t < \tau \qquad (1.3)$$

或

$$y(t) \triangleq y(t, u_{(-\infty,t]}) = \int_{-\infty}^{t} H(t, \tau)u(\tau)d\tau \qquad (1.4)$$

1.1.2 状态变量的表示

对某一个有限区间的输入函数 $u_{[t_0,t]}$，考虑系统的输出 $y(t)$。

一般，在时刻 $t > t_0$ 时的输出 $y(t)$，并不只是由输入$u_{[t_0,t]}$唯一决定。研究一下前已说明过的式（1.1）的系统。如果将式（1.1）改为

$$y(t) = \int_{-\infty}^{t_0} H(t, \tau)u(\tau)d\tau + \int_{t_0}^{t} H(t, \tau)u(\tau)d\tau \qquad (1.5)$$

可知输出 $y(t)$ 不仅受输入 $u_{[t_0,t]}$ 的影响，还受 t_0 以前的输入影响。式（1.5）右边第一项可认为相当于 t_0 时刻的初始条件。如果决定这个初始条件的 n 个参数 $x = (x_1, \cdots, x_n)^T$ 已经给定，且输入 $u_{[t_0,t]}$也已知，那末，输出 $y(t)$ 就可以唯一确定。也就是说，x 是 t_0 的函数。于是，输出 $y(t)$ 可表示为

$$y(t) = y(t, x(t_0), u_{[t_0,t]}), \quad t \geqslant t_0 \qquad (1.6)$$

$x(t_0)$ 称为 t_0 时刻的**状态**。当 t_0 以后的输入给定时，输出能唯一

确定所必需的最少信息称为状态。由此可定义状态如下

〔**定义1.1**〕(**状态**)：系统在时刻 t_0 以后的输入 $u_{[t_0,t]}$ 给定，当 $t \geqslant t_0$ 时，输出 $y(t)$ 能唯一确定所必需的最少个数的 n 个变量称为**状态变量**，n 个状态变量给出了状态。n 称为状态的维数。

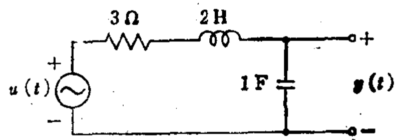

图1.2　RLC串联回路

〔**例1.1**〕 考虑图1.2的 RLC 串联回路，从回路的输入电压 $u(t)$ 到电容器电压 $y(t)$ 的传递函数为

$$H(s)=\frac{Y(s)}{U(s)}=\frac{1/s}{3+2s+1/s}=\frac{1}{(2s+1)(s+1)}$$

$$=\frac{1}{s+0.5}-\frac{1}{s+1}$$

由拉普拉斯反变换● 得权函数为

$$h(t)=\mathscr{L}^{-1}\{H(s)\}=e^{-0.5t}-e^{-t}$$

从而，对应输入 $u_{[t_0,t]}$ 的输出响应 $y(t)$，从式(1.5)可得

$$\begin{aligned} y(t) &= \int_{-\infty}^{t} h(t-\tau)u(\tau)d\tau \\ &= \int_{-\infty}^{t_0} h(t-\tau)u(\tau)d\tau \\ &\quad + \int_{t_0}^{t} h(t-\tau)u(\tau)d\tau \end{aligned} \tag{1.7}$$

右边第一项表示 t_0 以前的输入对 t_0 以后输出的影响。这项可写为

$$\begin{aligned} &\int_{-\infty}^{t_0} h(t-\tau)u(\tau)d\tau \\ &= e^{-0.5t}\int_{-\infty}^{t_0} e^{0.5\tau}u(\tau)d\tau - e^{t}\int_{-\infty}^{t_0} e^{\tau}u(\tau)d\tau \\ &= e^{-0.5t}x_1 - e^{-t}x_2 \end{aligned} \tag{1.8}$$

其中　$x_1 \triangleq \int_{-\infty}^{t_0} e^{0.5\tau}u(\tau)\,d\tau$，$x_2 \triangleq \int_{-\infty}^{t_0} e^{\tau}u(\tau)d\tau$

● $\mathscr{L}$表示拉普拉斯变换，$\mathscr{L}^{-1}$表示拉普拉斯反变换。

这里，x_1，x_2与t无关。若x_1，x_2已知，则$t \geqslant t_0$以后的输出$y(t)$可以唯一确定。由此，参数x_1，x_2可以认为是t_0时的状态变量。

又从式（1.7），（1.8）得到

$$y(t_0)=e^{-0.5t_0}x_1-e^{-t_0}x_2 \tag{1.9}$$

另一方面，若将式（1.7）对t微分得到

$$\dot{y}(t)=-0.5e^{-0.5t}x_1+e^{-t}x_2+h(0)u(t)$$

$$+\int_{t_0}^{t}\frac{\partial}{\partial t}h(t-\tau)u(\tau)d\tau$$

因为$h(0)=0$，所以，当$t=t_0$时得到

$$\dot{y}(t_0)=-0.5e^{-0.5t_0}x_1+e^{-t_0}x_2 \tag{1.10}$$

因此，从式（1.9）、式（1.10）得到

$$x_1=2e^{0.5t_0}(y(t_0)+\dot{y}(t_0))$$

$$x_2=e^{t_0}(y(t_0)+2y(t_0))$$

所以$y(t_0)$，$\dot{y}(t_0)$也可以认为是状态变量。$y(t)$、$\dot{y}(t)$是与电容器电荷和电流相对应的物理量。而且在下一节要说明，电容器电压及电感电流也可以选作状态变量。根据这个选法，可以用标准的方法导出一般RLC网络的状态方程式。

在式（1.6）中，若设$t_0=t$，则得

$$\boldsymbol{y}(t)=\boldsymbol{y}(t,\boldsymbol{x}(t),\boldsymbol{u}_{[t,t]})$$

$$\triangleq \boldsymbol{g}(t,\boldsymbol{x}(t),\ \boldsymbol{u}(t)) \tag{1.11}$$

可知输出$\boldsymbol{y}(t)$由t时刻的状态$\boldsymbol{x}(t)$和输入$\boldsymbol{u}(t)$决定，$\boldsymbol{g}(\cdot)$称为**输出函数**。

另一方面，由式（1.6）、式（1.11），$\boldsymbol{x}(t)$是$\boldsymbol{x}(t_0)$和$\boldsymbol{u}_{[t_0,t]}$的函数，可表示为

$$\boldsymbol{x}(t)=\boldsymbol{\psi}(t,\boldsymbol{x}_0,t_0,\boldsymbol{u}_{[t_0,t]}),\boldsymbol{x}_0=\boldsymbol{x}(t_0) \tag{1.12}$$

也就是说，它表明从位于t_0时刻的初始状态$\boldsymbol{x}_0$，由于它以后的输入$\boldsymbol{u}_{[t_0,t]}$的影响，推移到状态$\boldsymbol{x}(t)$，因此，函数$\boldsymbol{\psi}(\cdot)$称为**状态转移函数**。

向上所述，由于引入了状态变量，可以知道，动态系统可由

状态转移函数（1.12）和输出函数（1.11）这两个函数来描述。若用图表示，则如图 1.3 所示。

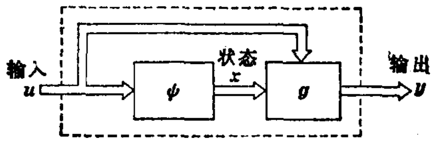

图1.3　动态系统

特别是，状态转移函数 $\psi(\cdot)$ 由微分方程式

$$\frac{d}{dt}x(t)=f(x(t),u(t),t),\quad x(t_0)=x_0 \tag{1.13}$$

的解唯一给出时，式（1.13）就称为系统的**状态方程式**。状态方程式（1.13）和输出方程式（1.11）合在一起称为系统方程式。动态系统可简记为 DS。

$$\text{DS:}\begin{cases}\dfrac{d}{dt}x(t)=f(x(t),u(t),t),\ x(t_0)=x_0 & (1.14\text{a})\\[2ex] y(t)=g(x(t),u(t),t) & (1.14\text{b})\end{cases}$$

在动态系统中，为了保证 $x(t)$ 和 $y(t)$ 由初始条件 x_0 和任意输入 u 唯一确定。$f(\cdot)$ 应对 x 满足李普希兹条件，对 u 和 t 是连续的函数。特别是，还要假定 $g(\cdot)$ 对 x，u，t 也是连续的。x，u，y 分别为 n，m，p 维向量。状态 x 张成的向量空间称为**状态空间**。

在式（1.14）中，当 $f(\cdot)$ 和 $g(\cdot)$ 不显含 t 时，动态系统称为时不变**系统**或**定常系统**。

另外，$f(\cdot)$ 和 $g(\cdot)$ 对 x 和 u 是线性关系，故称为**线性动态系统**。在时变系统的情况下简记为 $(A(t),B(t),C(t),D(t))$，在定常系统的情况下简记为 (A,B,C,D)，对应 $(A(t),B(t),C(t),D(t))$ 的系统方程式为

$$\dot{x}(t)=A(t)x(t)+B(t)u(t),\ x(t_0)=x_0 \tag{1.15a}$$

$$y(t)=C(t)x(t)+D(t)u(t) \tag{1.15b}$$

对应（$\boldsymbol{A}$，$\boldsymbol{B}$，$\boldsymbol{C}$，$\boldsymbol{D}$）的系统方程式为

$$\dot{\boldsymbol{x}}(t)=\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}(t)+\boldsymbol{B}\boldsymbol{u}(t),\boldsymbol{x}(t_0)=\boldsymbol{x}_0 \qquad (1.16\text{a})$$

$$\boldsymbol{y}(t)=\boldsymbol{C}\boldsymbol{x}(t)+\boldsymbol{D}\boldsymbol{u}(t) \qquad (1.16\text{b})$$

这里，$\boldsymbol{A}(t)$，$\boldsymbol{B}(t)$，$\boldsymbol{C}(t)$，$\boldsymbol{D}(t)$ 分别为 $n\times n$，$n\times m$，$p\times n$，$p\times m$ 矩阵，如各元素对 t 连续，则式（1.15a）的状态方程式有唯一解。

周

1.1.3 传递函数矩阵

对线性定常系统的权函数矩阵 $\boldsymbol{H}(t)$ 进行拉普拉斯变换所得到的矩阵称为**传递函数矩阵**。

如果式（1.5）中依赖于 t_0 以前输入的第一项是零的话，输出 $\boldsymbol{y}(t)$ 由输入 $\boldsymbol{u}_{[t_0,t]}$ 唯一确定。因为是定常系统，所以就是以 $t_0=0$ 作为初始条件也不失一般性。而且还必须满足式（1.3）的因果律。于是线性定常系统的输入输出关系，在这些条件下可表示为

$$\boldsymbol{y}(t)=\int_0^\infty \boldsymbol{H}(t-\tau)\boldsymbol{u}(\tau)d\tau \qquad (1.17)$$

对式（1.17）进行拉普拉斯变换。向量及矩阵的拉普拉斯变换是对每个元素都进行变换。因此

$$\boldsymbol{H}(s)\triangleq\mathscr{L}\{\boldsymbol{H}(t)\}=\int_0^\infty e^{-st}\boldsymbol{H}(t)dt \qquad (1.18)$$

如果定义

$$\boldsymbol{Y}(s)\triangleq\mathscr{L}\{\boldsymbol{y}(t)\},\ \boldsymbol{U}(s)\triangleq\mathscr{L}\{\boldsymbol{u}(t)\}$$

则式（1.17）的拉普拉斯变换为

$$\boldsymbol{Y}(s)=\boldsymbol{H}(s)\boldsymbol{U}(s) \qquad (1.19)$$

$\boldsymbol{H}(s)$ 是 $p\times m$ 矩阵，称为传递函数矩阵。

归根结底，式（1.17）、式（1.19）的权函数和传递函数不过是表示初始条件为零时的输入输出关系。这样仅用输入输出等在外部出现的变量来表示系统特性的方法，称为**外部描述**。对此，

如果把1.1.2节所述的状态变量引为系统内部变量来表示系统特性的方法，称为**内部描述**。

接着研究一下，作为外部描述之一的传递函数和作为内部描述的（$\boldsymbol{A}$，$\boldsymbol{B}$，$\boldsymbol{C}$，$\boldsymbol{D}$）之间的关系。

1.1.4 由线性系统的（$\boldsymbol{A}$，$\boldsymbol{B}$，$\boldsymbol{C}$，$\boldsymbol{D}$）求传递函数的方法

现从线性系统（$\boldsymbol{A}$，$\boldsymbol{B}$，$\boldsymbol{C}$，$\boldsymbol{D}$）的内部描述来求传递函数。因为是定常系统，所以即使推移初始时间t_0，$\boldsymbol{x}(t)$和$\boldsymbol{y}(t)$的时间响应也只是平移。从而即使设$t_0=0$，也不失一般性。

令初始值$\boldsymbol{x}(0)=\boldsymbol{x}_0$，对式（1.16）进行拉普拉斯变换，得到

$$s\boldsymbol{X}(s)-\boldsymbol{x}_0=\boldsymbol{A}\boldsymbol{X}(s)+\boldsymbol{B}\boldsymbol{U}(s) \tag{1.20a}$$

$$\boldsymbol{Y}(s)=\boldsymbol{C}\boldsymbol{X}(s)+\boldsymbol{D}\boldsymbol{U}(s) \tag{1.20b}$$

这里，$\boldsymbol{X}(s)\triangleq\mathscr{L}\{\boldsymbol{x}(t)\}$，$\boldsymbol{U}(s)\triangleq\mathscr{L}\{\boldsymbol{u}(t)\}$，$\boldsymbol{Y}(s)\triangleq\mathscr{L}\{\boldsymbol{y}(t)\}$。从式（1.20）得到

$$\boldsymbol{X}(s)=(s\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})^{-1}\boldsymbol{x}_0+(s\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})^{-1}\boldsymbol{B}\boldsymbol{U}(s) \tag{1.21a}$$

$$\boldsymbol{Y}(s)=\boldsymbol{C}(s\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})^{-1}\boldsymbol{x}_0+\{\boldsymbol{C}(s\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})^{-1}\boldsymbol{B}+\boldsymbol{D}\}\boldsymbol{U}(s) \tag{1.21b}$$

$\boldsymbol{I}$是单位矩阵。这里，如果初始值$\boldsymbol{x}_0=\boldsymbol{0}$，可给出从输入$\boldsymbol{U}(s)$到输出$\boldsymbol{Y}(s)$的传递函数$\boldsymbol{H}(s)$为

$$\boldsymbol{H}(s)=\boldsymbol{C}(s\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})^{-1}\boldsymbol{B}+\boldsymbol{D} \tag{1.22}$$

$$=\frac{\boldsymbol{C}\mathrm{adj}(s\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})\boldsymbol{B}}{\det(s\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})}+\boldsymbol{D} \tag{1.23}$$

$\mathrm{adj}(s\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})$及$\det(s\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})$分别表示矩阵（$s\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}$）的伴随矩阵和行列式。分母$\det$（$s\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}$）也叫矩阵$\boldsymbol{A}$的特征多项式，它是$s$的$n$次多项式。

如上所述，在以（$\boldsymbol{A}$，$\boldsymbol{B}$，$\boldsymbol{C}$，$\boldsymbol{D}$）表示的状态方程式中，设初始值为零，那末可知传递函数$\boldsymbol{H}(s)$可用$\boldsymbol{A}$，$\boldsymbol{B}$，$\boldsymbol{C}$，$\boldsymbol{D}$来唯一表示。其结构如图1.4所示。

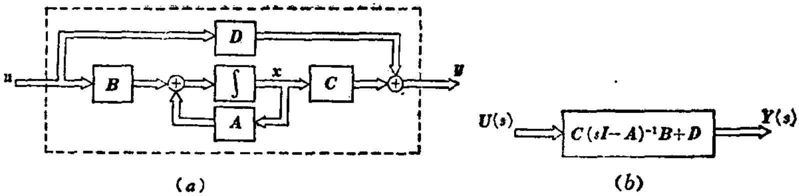

图1.4 线性动态系统的表示

（a）内部描述；（b）外部描述。

〔**例题1.1**〕 已知

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} u$$

$$y = [1\ \ 0\ \ 0]\boldsymbol{x}$$

试从（$\boldsymbol{A}$，$\boldsymbol{b}$，$\boldsymbol{c}^T$，0）求传递函数。

〔**解**〕 由式（1.23）

$$\det(s\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}) = \begin{vmatrix} s & -1 & 0 \\ 0 & s+1 & 1 \\ 0 & 0 & s+3 \end{vmatrix} = s(s+1)(s+3)$$

$$\boldsymbol{H}(s) = \frac{\boldsymbol{Y}(s)}{\boldsymbol{U}(s)}$$

$$= \frac{[1\ \ 0\ \ 0]\begin{bmatrix} (s+1)(s+3) & s+3 & -1 \\ 0 & s(s+3) & -s \\ 0 & 0 & s(s+1) \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}}{s(s+1)(s+3)}$$

$$= \frac{s+2}{s(s+1)(s+3)}$$

求 $(s\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})^{-1}$ 时，在式（1.23）的分子分母中，都要计算行列式，但利用下面的**法捷耶夫**（Faddeev）**算法**，可以避免行列式的计算。

现在，设矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征多项式为

$$\det(s\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}) = s^n + \alpha_{n-1}s^{n-1} + \alpha_{n-2}s^{n-2} + \cdots + \alpha_0 \triangleq \psi(s) \quad (1.24)$$