常微分方程手册

E. 卡姆克 著
张 鸿 林 译
陈 凭等校

科 学 出 版 社
1980

内 容 简 介

本手册是数学方面的一本重要的工具书．其中除收集了大约1650个常微分方程(组)的解和解法提示以外，还简明扼要地叙述了关于常微分方程(组)的一些基本概念、一般解法和许多重要结果，以及在普通教科书中均未论及的若干问题，例如边值问题和特征值问题．

本手册是根据其俄译本第四版翻译的，可供数学、力学、物理等方面的研究人员、工程技术人员和高等院校有关专业的教师、学生使用．

E. Kamke

DIFFERENTIALGLEICHUNGEN

LÖSUNGSMETHODEN UND

LÖSUNGEN

I

GEWÖHNLICHE

DIFFERENTIALGLEICHUNGEN

常微分方程手册

E. 卡姆克 著

张 鸿 林 译

陈 凭等校

*

科学出版社出版

北京朝阳门内大街137号

中国科学院印刷厂印刷

新华书店北京发行所发行　　各地新华书店经售

*

1977年2月第一版　　开本：787×1092　1/32

1980年3月第二次印刷　　印张：26 1/8　插页：3

印数：41,251—67,950　　字数：598,000

统一书号：13031·435

本社书号：658·13—1

定价：2.30 元

目　　录

某些记号 …… xiv

第一部分　一般解法

第一章　一阶微分方程 …… 1

§ 1. 已解出导数的微分方程：$y'=f(x, y)$；基本概念 …… 1

1.1. 微分方程的表示法和几何意义 …… 1

1.2. 解的存在和唯一性 …… 2

§ 2. 已解出导数的微分方程：$y'=f(x, y)$；解法 …… 4

2.1. 折线法 …… 4

2.2. 皮卡尔-林德洛夫逐次逼近法 …… 5

2.3. 幂级数的应用 …… 8

2.4. 级数展开的更一般的情况 …… 8

2.5. 按参数展开的级数 …… 11

2.6. 同偏微分方程的联系 …… 11

2.7. 估值定理 …… 12

2.8. 对于大的 x 值解的性状 …… 15

§ 3. 未解出导数的微分方程：$F(y', y, x)=0$ …… 16

3.1. 关于解和解法 …… 16

3.2. 正则线素和奇异线素 …… 18

§ 4. 特殊类型的一阶微分方程的解 …… 19

4.1. 可分离变量的微分方程 …… 19

4.2. $y'=f(ax+by+c)$ ……20
4.3. 线性微分方程 ……20
4.4. 线性微分方程解的渐近性质 ……21
4.5. 伯努利方程. $y'+f(x)y+g(x)y^{\alpha}=0$ ……24
4.6. 齐次微分方程与可化为齐次的微分方程 ……24
4.7. 广义齐次方程 ……26
4.8. 特殊的黎卡提方程: $y'+ay^2=bx^{\alpha}$ ……27
4.9. 一般的黎卡提方程: $y'=f(x)y^2+g(x)y+h(x)$ ……28
4.10. 第一类阿贝耳方程 ……32
4.11. 第二类阿贝耳方程 ……35
4.12. 全微分方程 ……37
4.13. 积分因子 ……38
4.14. $F(y',y,x)=0$, "借助于微分的积分法" ……39
4.15. (a) $y=G(x,y')$; (b) $x=G(y,y')$ ……39
4.16. (a) $G(y',x)=0$; (b) $G(y',y)=0$ ……40
4.17. (a) $y=g(y')$; (b) $x=g(y')$ ……40
4.18. 克莱罗方程 ……41
4.19. 拉格朗日-达兰贝尔方程 ……42
4.20. $F(x,xy'-y,y')=0$. 勒让德变换 ……42
第二章 已解出导数的任意微分方程组 ……44
§5. 基本概念 ……44
5.1. 微分方程组的表示法和几何意义 ……44
5.2. 解的存在和唯一性 ……44
5.3. 卡拉西奥多里存在定理 ……45
5.4. 解对于初始条件和对于参数的依赖性 ……46
5.5. 稳定性问题 ……47
§6. 解法 ……50
6.1. 折线法 ……50
6.2. 皮卡尔-林德略夫逐次逼近法 ……50

6.3. 幂级数的应用 ……51
6.4. 同偏微分方程的联系 ……52
6.5. 借助于解之间的已知关系简化方程组 ……52
6.6. 利用微分法和消元法简化方程组 ……53
6.7. 估值定理 ……53
§ 7. 自治系统 ……55
7.1. 自治系统的定义和几何意义 ……55
7.2. 当 $n=2$ 时,奇点邻域内积分曲线的性状 ……57
7.3. 确定奇点类型的准则 ……59
第三章 线性微分方程组 ……63
§ 8. 任意的线性微分方程组 ……63
8.1. 一般注记 ……63
8.2. 存在和唯一性定理. 解法 ……64
8.3. 化非齐次方程组为齐次方程组 ……64
8.4. 估值定理 ……65
§ 9. 齐次线性方程组 ……66
9.1. 解的性质. 基本解组 ……66
9.2. 存在定理和解法 ……67
9.3. 把方程组简化为方程个数较少的方程组 ……69
9.4. 共轭微分方程组 ……70
9.5. 自共轭微分方程组 ……71
9.6. 共轭微分型组;拉格朗日恒等式;格林公式 ……72
9.7. 基本解 ……73
§ 10. 具有奇点的齐次线性方程组 ……74
10.1. 奇点的分类 ……74
10.2. 弱奇点 ……75
10.3. 强奇点 ……77
§ 11. 对于大的 x 值解的性状 ……78
§ 12. 依赖于参数的线性方程组 ……80
§ 13. 常系数线性方程组 ……83

13.1. 齐次方程组 ……83
13.2. 更一般形式的方程组 ……83
第四章 任意 n 阶微分方程 ……85
§ 14. 已解出最高阶导数的方程：
$y^{(n)}=f(x, y, y', \cdots, y^{(n-1)})$ ……85
§ 15. 未解出最高阶导数的方程：
$F(x, y, y', \cdots, y^{(n)})=0$ ……86
15.1. 全微分方程 ……86
15.2. 广义齐次方程 ……86
15.3. 不显含 x 或 y 的方程 ……87
第五章 n 阶线性微分方程 ……88
§ 16. 任意的 n 阶线性微分方程 ……88
16.1. 一般注记 ……88
16.2. 存在和唯一性定理。解法 ……88
16.3. $n-1$ 阶导数的消去法 ……90
16.4. 化非齐次微分方程为齐次微分方程 ……90
16.5. 对于大的 x 值解的性状 ……91
§ 17. n 阶齐次线性微分方程 ……91
17.1. 解的性质和存在定理 ……91
17.2. 微分方程的降阶法 ……93
17.3. 关于解的零点 ……94
17.4. 基本解 ……94
17.5. 共轭的、自共轭的和反自共轭的微分型 ……95
17.6. 拉格朗日恒等式；狄里克莱公式和格林公式 ……97
17.7. 关于共轭方程和全微分方程的解 ……98
§ 18. 具有奇点的齐次线性微分方程 ……99
18.1. 奇点的分类 ……99
18.2. 点 $x=\xi$ 是正则点或弱奇点的情况 ……102
18.3. 点 $x=\infty$ 是正则点或弱奇点的情况 ……105
18.4. 点 $x=\xi$ 是强奇点的情况 ……106

18.5. 点 $x=\infty$ 是强奇点的情况 ……107
18.6. 具有多项式系数的微分方程 ……108
18.7. 具有周期系数的微分方程 ……109
18.8. 具有双周期系数的微分方程 ……111
18.9. 实变量的情况 ……112
§ 19. 利用定积分解线性微分方程……113
19.1. 一般原理 ……113
19.2. 拉普拉斯变换 ……117
19.3. 特殊的拉普拉斯变换 ……120
19.4. 梅林变换 ……122
19.5. 欧拉变换 ……123
19.6. 利用二重积分求解 ……126
§ 20. 对于大的 x 值解的性状……127
20.1. 多项式系数 ……127
20.2. 更一般形式的系数 ……128
20.3. 连续的系数 ……129
20.4. 振荡定理 ……130
§ 21. 依赖于参数的 n 阶线性微分方程 ……130
§ 22. 某些特殊类型的 n 阶线性微分方程 ……134
22.1. 常系数齐次微分方程 ……134
22.2. 常系数非齐次微分方程 ……135
22.3. 欧拉方程 ……137
22.4. 拉普拉斯方程 ……137
22.5. 具有多项式系数的方程 ……138
22.6. 波赫哈默尔方程 ……139
第六章 二阶微分方程……146
§ 23. 二阶非线性微分方程 ……146
23.1. 特殊类型的非线性方程的解法 ……146
23.2. 某些补充说明 ……147
23.3. 极限值定理 ……148

23.4. 振荡定理 ……149
§ 24. 任意的二阶线性微分方程 ……150
24.1. 一般注记 ……150
24.2. 某些解法 ……151
24.3. 估值定理 ……153
§ 25. 二阶齐次线性微分方程 ……154
25.1. 二阶线性微分方程的简化 ……154
25.2. 关于二阶线性方程简化的进一步说明 ……156
25.3. 把解展开为连分数 ……159
25.4. 关于解的零点的一般注记 ……161
25.5. 在有限区间上解的零点 ……161
25.6. 当 $x\to\infty$ 时解的性状 ……165
25.7. 具有奇点的二阶线性微分方程 ……167
25.8. 近似解. 渐近解（实变量时）……170
25.9. 渐近解(复变量时）……174
25.10. WBK 法 ……175
第七章 三阶和四阶线性微分方程 ……177
§ 26. 三阶线性微分方程 ……177
§ 27. 四阶线性微分方程 ……178
第八章 微分方程的近似积分法 ……179
§ 28. 一阶微分方程的近似积分 ……179
28.1. 折线法 ……179
28.2. 补充半步法 ……180
28.3. 龙格-霍伊恩-库塔法 ……181
28.4. 插值法和逐次逼近法相结合 ……183
28.5. 阿达姆斯法 ……185
28.6. 对阿达姆斯法的补充 ……188
§ 29. 高阶微分方程的近似积分 ……190
29.1. 一阶微分方程组的近似积分法 ……190
29.2. 对于二阶微分方程的折线法 ……192

29.3. 对于二阶微分方程的龙格-库塔法 ……………………193
29.4. 对于方程 $y''=f(x,y,y')$ 的阿达姆斯-施特尔默尔法 ……………………194
29.5. 对于方程 $y''=f(x,y)$ 的阿达姆斯-施特尔默尔法 ……………………195
29.6. 对于方程 $y''=f(x,y,y')$ 的布里斯法……………………196

第二部分　边值问题和特征值问题

第一章　n 阶线性微分方程的边值问题和特征值问题 ……200
§ 1. 边值问题的一般理论 ……………………200
1.1. 表示法和初步注记 ……………………200
1.2. 边值问题的可解性条件 ……………………202
1.3. 共轭边值问题 ……………………203
1.4. 自共轭边值问题 ……………………206
1.5. 格林函数 ……………………207
1.6. 借助于格林函数解非齐次边值问题 ……………………209
1.7. 广义的格林函数 ……………………210
§ 2. 方程 $\sum_{\nu=0}^{n} f_\nu(x)y^{(\nu)}+\lambda g(x)y=f(x)$ 的边值问题和特征值问题 ……………………213
2.1. 特征值和特征函数；特征行列式 $\Delta(\lambda)$……………………213
2.2. 共轭特征值问题和格林豫解式；完备双正交系 ……215
2.3. 标准化的边界条件；正则特征值问题 ……………………217
2.4. 正则和非正则特征值问题的特征值 ……………………219
2.5. 给定的函数按正则和非正则特征值问题的特征函数之展开 ……………………220
2.6. 标准的自共轭特征值问题 ……………………222
2.7. 关于弗雷德霍姆型积分方程 ……………………226
2.8. 边值问题和弗雷德霍姆型积分方程之间的联系 ……232
2.9. 特征值问题和弗雷德霍姆型积分方程之间的

联系 ……………………………………………………233
2.10. 关于沃尔泰拉型积分方程 ……………………………235
2.11. 边值问题和沃尔泰拉型积分方程之间的联系 ……236
2.12. 特征值问题和沃尔泰拉型积分方程之间的
联系 ……………………………………………………237
2.13. 特征值问题和变分法之间的联系 ………………239
2.14. 按特征函数展开的应用 ……………………………242
2.15. 几点补充说明 ……………………………………………243
§ 3. 特征值问题和边值问题的近似解法 ………………248
3.1. 里兹-伽辽金近似方法 ……………………………248
3.2. 格拉梅尔近似方法 ……………………………………250
3.3. 用里兹-伽辽金方法解非齐次边值问题 …………251
3.4. 逐次逼近法 ………………………………………………252
3.5. 应用有限差分法近似求解边值问题和特征值
问题 ……………………………………………………254
3.6. 扰动方法 …………………………………………………258
3.7. 特征值的估值 ……………………………………………261
3.8. 计算特征值和特征函数几种方法的综述 …………265
§ 4. 对于方程$F(y)=\lambda G(y)$的自共轭特征值问题…267
4.1. 问题的提法 ………………………………………………267
4.2. 一般的初步注记 …………………………………………269
4.3. 标准的特征值问题 ………………………………………270
4.4. 正定的特征值问题 ………………………………………271
4.5. 按特征函数的展开 ………………………………………275
§ 5. 更一般形式的边界条件和附加条件 …………………278
第二章 线性微分方程组的边值问题和特征值问题 ………281
§ 6. 线性微分方程组的边值问题和特征值问题 ……281
6.1. 表示法和可解性条件 ……………………………………281
6.2. 共轭边值问题 ……………………………………………283
6.3. 格林矩阵 …………………………………………………284

6.4. 特征值问题 ……………………………………………285
6.5. 自共轭特征值问题 ……………………………………287
第三章　低阶方程的边值问题和特征值问题 ………………290
§ 7. 一阶问题 ……………………………………………290
7.1. 线性问题 ……………………………………………290
7.2. 非线性问题 …………………………………………291
§ 8. 二阶线性边值问题 …………………………………292
8.1. 一般注记 ……………………………………………292
8.2. 格林函数 ……………………………………………293
8.3. 第一类边值问题解的估值 …………………………293
8.4. 当 $|x|\to\infty$ 时的边界条件 ………………………294
8.5. 求周期解 ……………………………………………294
8.6. 一个同研究流体流动有关的边值问题 ……………295
§ 9. 二阶线性特征值问题 ………………………………296
9.1. 一般注记 ……………………………………………296
9.2. 自共轭特征值问题 …………………………………298
9.3. $y'=F(x,\lambda)z,\ z'=-G(x,\lambda)y$,
边界条件是自共轭的 ……………………………303
9.4. 特征值问题和变分原理 ……………………………306
9.5. 特征值和特征函数的实际计算 ……………………308
9.6. 不一定是自共轭的特征值问题 ……………………309
9.7. 更一般形式的附加条件 ……………………………312
9.8. 含有多个参数的特征值问题 ………………………314
9.9. 在边界点具有奇异性的微分方程 …………………315
9.10. 无限区间上的特征值问题 …………………………316
§ 10. 二阶非线性边值问题和特征值问题 ………………317
10.1. 对于有限区间的边值问题 …………………………317
10.2. 对于半无限区间的边值问题 ………………………321
10.3. 特征值问题 …………………………………………322
§ 11. 三阶至八阶边值问题和特征值问题 ………………324

11.1. 三阶线性特征值问题 ……324
11.2. 四阶线性特征值问题 ……325
11.3. 两个二阶微分方程组成的方程组的线性问题 ……328
11.4. 四阶非线性边值问题 ……329
11.5. 更高阶的特征值问题 ……330

第三部分　各种微分方程

几点说明……332
第一章　一阶微分方程 ……339
1—367. 对于 y' 的一次微分方程 ……339
368—517. 对于 y' 的二次微分方程 ……403
518—544. 对于 y' 的三次微分方程 ……438
545—576. 更一般形式的微分方程 ……444
第二章　二阶线性微分方程 ……453
1— 90. $ay''+\cdots$ ……453
91—145. $(ax+b)y''+\cdots$ ……489
146—221. $x^2y''+\cdots$ ……508
222—250. $(x^2\pm a^2)y''+\cdots$ ……531
251—303. $(ax^2+bx+c)y''+\cdots$ ……546
304—341. $(ax^3+\cdots)y''+\cdots$ ……573
342—396. $(ax^4+\cdots)y''+\cdots$ ……585
397—410. $(ax^n+\cdots)y''+\cdots; n\geqslant 5$ ……598
411—445. 其他的微分方程 ……607
第三章　三阶线性微分方程 ……616
第四章　四阶线性微分方程 ……635
第五章　五阶和更高阶的线性微分方程 ……653
第六章　二阶非线性微分方程 ……657
1— 72. $ay''=F(x,y,y')$ ……657
73—103. $f(x)y''=F(x,y,y')$ ……679
104—187. $f(x)yy''=F(x,y,y')$ ……691

188—225. $f(x,y)y''=F(x,y,y')$ ……711
226—249. 其他的微分方程 ……721
第七章 三阶和更高阶的非线性微分方程 ……728
第八章 线性微分方程组 ……735
1 — 18. 两个一阶常系数微分方程的方程组 ……735
19 — 25. 两个一阶变系数微分方程的方程组 ……741
26 — 43. 两个高于一阶的微分方程的方程组 ……743
44 — 57. 多于两个微分方程的方程组 ……748
第九章 非线性微分方程组 ……753
1 — 17. 两个微分方程的方程组 ……753
18 — 29. 多于两个微分方程的方程组 ……759
附录 ……763
二阶线性齐次方程的解法(J. 兹伯尔尼克) ……763
对 E. 卡姆克一书的补充(D. 米特里诺维奇) ……775
关于一个一阶微分方程(D. 米特里诺维奇) ……792
线性微分方程可分解的情况(D. 米特里诺维奇) ……793
关于微分方程 $yy''+f(x)y^2=\varphi(x)$的积分法(T. 列寇) ……795
线性微分方程的分类和利用递推公式构造其通解的新方法 (J. 兹伯尔尼克) ……798
参考文献中采用的缩写 ……802
部分外国人姓氏中外文对照表 ……813
题目索引 ……815

第一部分 一般解法[1]

第一章 一阶微分方程

§ 1. 已解出导数的微分方程：$y'=f(x,y)$；基本概念

1.1. 微分方程的表示法和几何意义. 可微函数 $y=\varphi(x)$，如果满足微分方程

$$\frac{dy}{dx}=f(x, y) \text{ 或 } y'=f(x, y), \tag{1}$$

即在 x 的某一变化区间上，使得

$$\varphi'(x)\equiv f(x, \varphi(x))$$

对 x 恒等成立，则称为此微分方程的解、积分或积分曲线.

方程(非恒等式)

$$\Phi(x, y, C)=0, \tag{2}$$

如果当常数 C 从某一确定的区域取值时，由此方程解出 y 所得到的一些可微函数 $y=\varphi(x)$ 是方程(1)的积分，则称此方程为方程(1)的通解或通积分. 这时，函数 Φ 本身通常也称为微分方程(1)的通积分.

我们考虑方程 $y'=f(x, y)$，其中 $f(x, y)$ 定义在 xy 平

1) [第一部分中所讨论的各种问题的详尽叙述，以及进一步的细节，可在下列著作中找到*: Петровский; Понтрягин; Еругин; Степанов; Ince; Матвеев; Sansone; Coddington 和 Levinson; Хартман; Bellman.——俄译本编者注.]

* 本手册参考文献中采用的缩写，列于书末.

面的某一个开区域 G 上. 设在区域 G 的每一点 (x,y) 定义了这样的角 α，使得

$$\operatorname{tg}\alpha=f(x, y)。$$

点 (x, y) 同与 Ox 轴的正方向组成角 α 的很短的线段一起，称为线素.线素的总体构成直观描绘给定微分方程的方向场(图 1). 积分曲线乃是这样的光滑曲线，它与给定方向场的方向“一致”，即在此曲线上的每一点上具有由此方向场所指示的切线.

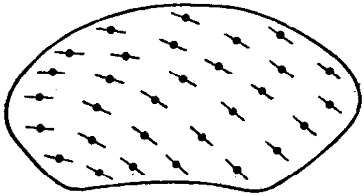

图 1

在某些情况下，不难找到平面上这样一些点的集合，对应于这些点，由给定的微分方程规定了同样的方向 α（例如，对于方程 $y'=g(y)$，由等式 $g(y)=\operatorname{tg}\alpha$ 确定的平行于 x 轴的一条或几条直线就是这种点的集合). 由给定微分方程确定的具有同样一个方向 α 的诸点所构成的曲线，称为对应于 α 的等斜线.

1.2. 解的存在和唯一性. 在以后各处，只要没有特别申明，我们将假定(除其他假设以外)，函数 $f(x, y)$ 在 xy 平面的某一个开区域 G 内是连续的. 这时，下述的皮亚诺存在定理成立：通过区域 G 的每一点(ξ, η)，至少有一条积分曲线，而且这些曲线中的每一条，可以向两个方面延拓直至全部包含于 G 内而本身又包含着点(ξ, η)的任意闭区域的边界.

第三部分例 1.57 表明，通过某一点(ξ, η)的积分曲线，实际上可以多于一条[1].

---

1) 甚至可能有这种情况：通过区域的每一点，有无穷多条积分曲线；见 M. A. Лаврентьев, *Math. Zeitschrift* 23 (1925), p. 197—209. [关于积分曲线束的进一步的性质见 Sausoue; Хартман.——俄译本编者注.]

如果在区域 G 内，$f(x, y)$ 具有连续的一阶偏导数，或者对于 y 满足李普希茨条件：

$$|f(x, y_2)-f(x, y_1)|\leqslant L|y_2-y_1| \quad (L\text{为常数}), \qquad (3)$$

则通过每一点显然仅有一条积分曲线。

当点(ξ, η)是函数$f(x, y)$的间断点时，例如从 5.3 节，还可以得出下述结论：如果$f(x, y)$当 $0<|x-\xi|\leqslant a$, $|y-\eta|\leqslant b$ 时连续(因而，并未假设在直线 $x=\xi$ 上的连续性)，并且

$$|f(x, y)|\leqslant M(x),$$

$$|f(x, y_2)-f(x, y_1)|\leqslant|y_2-y_1|N(x),$$

其中 $M(x)$, $N(x)$在整个区间$|x-\xi|\leqslant a$ 上是可积的，则存在一个且仅存在一个函数 $y=\varphi(x)$，使得当 $x\neq\xi$ 时

$$\varphi'(x)\equiv f(x, \varphi(x)),$$

并且当 $x\to\xi$ 时 $y\to\eta$。例如取

$$M(x)\leqslant A(x-\xi)^{-\alpha},\ 0<\alpha<1,$$

$$N(x)\leqslant B(x-\xi)^{-\beta},\ 0<\beta<1,$$

函数 $M(x)$, $N(x, y)$显然是可积的。

如果函数$f(x, y)$具有形式$f(x, y)=\dfrac{h(x, y)}{g(x, y)}$，则微分方程(1)可写为下列形式：

$$g(x, y)y'=h(x, y),$$

或者写为方程组

$$\frac{dx}{dt}=g(x, y),\ \frac{dy}{dt}=h(x, y)$$

的形式。关于这种形式的方程，也可以见 4.12 节，4.13 节，7.2 节。

关于解对于初始条件的依赖性，以及解对于方程本身变化的依赖性，见 2.7 节，5.4 节。

§ 2. 已解出导数的微分方程：

$y' = f(x, y)$；解法

2.1. 折线法. 对于给定的微分方程§1(1)，如果建立了方向场，那么就不难建立其积分曲线的近似表示，因此也就不难形成关于这些积分曲线走向的一般了解[1].

用加大图形的比例尺和增多所建立的线素的个数的方

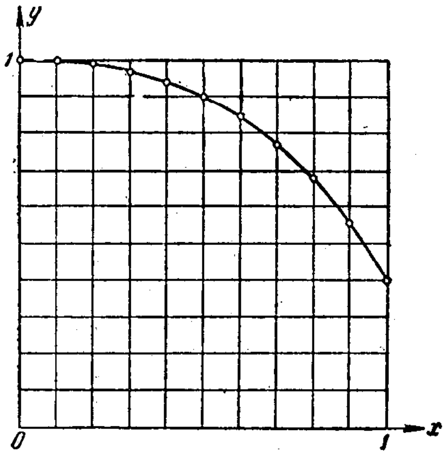

图 2

1）描绘积分曲线的所谓"拐线"，即使得 $y''=0$ 的点的集合，常常是有用的. 在函数 $f(x,y)$ 是连续可微的情况下，对于方程§1(1)的每一个解，有

$$y''=f_x+y'f_y=f_x+ff_y.$$

于是条件 $y''=0$ 化为方程

$$f_x+ff_y=0. \qquad (*)$$

因为为使给定点是拐点，条件 $y''=0$ 只是必要的，而不是充分的，所以一些不是拐点的点也可能属于"拐线".

例. 对于黎卡提方程 $y'=x-y^2$，拐线的方程$(*)$具有形式：$2y(x-y^2)=1$.