

过盈联结的设计、计算与装拆

许定奇 孙荣文 编著



中国计量出版社

151.7
X 72

837012

过盈联结的设计、计算与装拆

许定奇 孙荣文 编著



中国计量出版社

新登(京)字024号

内 容 提 要

在机械工业中,由于采用过盈联结具有结构简单,承载能力大,承受冲击和变载的性能好,配合的定心精度高等优点,因此圆柱和圆锥过盈联结的采用日益广泛,特别是在重型机械中应用更多。本书广泛地收集了有关过盈联结的理论分析、应用实例等资料,并结合作者在制订过盈配合国家标准的过程中进行了大量的试验研究,取得了许多资料后编写而成。本书主要包括:过盈联结的基本概念和计算基础;过盈联结中的摩擦系数;弹性和弹、塑性范围内圆柱过盈配合的计算; n 级过盈联结的计算,圆锥过盈联结的设计与计算;圆锥参数偏差对圆锥过盈联结的影响;动载荷条件下过盈联结的特性及其计算;离心力、联结表面粗糙度和形状误差对过盈联结的影响;大、小尺寸和薄壁套过盈联结的特点及其计算;过盈联结的结构设计及装拆工艺。

本书可供机械设计、制造、维修与检验的工程技术人员使用,也可供大专院校有关师生参考。

DN01/33-25

过盈联结的设计、计算与装拆

许定奇 孙荣文 编著

责任编辑 刘瑞清

—*—

中国计量出版社出版

北京和平里西街甲2号

中国计量出版社印刷厂印刷

新华书店北京发行所发行

—*—

开本 787×1092/16 印张 16.5 字数402千字

1992年3月第1版 1992年3月第1次印刷

印数 1—6 000

ISBN7-5026-0467-7/TB·366

定价 8.00 元

前言

现代科学技术的发展,对机械产品提出了功能更高,可靠性、经济性更好的要求。因此,现代生产中,圆柱和圆锥过盈联结的采用范围日益扩大,特别是在重型机械中,如起重运输机械、船舶、机车、通用化工机械、军工等部门应用较广泛。这种联结的特殊优点在于:结构简单,承载能力大,承受冲击和变载的性能好,配合的定心精度高等。因此,采用过盈联结来代替键等联结有着重大的经济意义。

但是,到目前为止,国内尚缺乏较系统地论述过盈联结的设计、计算及装拆等方面的专著和实用的参考资料。近年来,各国学者在这领域里进行了大量的试验研究工作,取得了进展,但较系统、全面的介绍这方面的书还较少。为此,作者多年来收集了德、日、苏、美等国这个领域的有关学者的试验研究、理论分析以及应用实例等资料,并结合作者在这方面进行的试验研究成果,编写了这本书。

本书内容力求概括当代各国学者在这个领域的试验研究成果及实际应用的经验,涉及范围比较广,主要包括:圆柱过盈联结在弹性及弹、塑性范围内的计算与应用;考虑到近年来圆锥过盈联结在重型机械、机车等方面的应用日益广泛,因此,本书着重介绍了圆锥过盈联结的结构设计、计算特点以及分析了各几何参数对过盈联结的影响;在介绍静态计算基础上,用国内、外理论分析和试验研究成果来论述了动载荷对联结强度的影响,并提出了实用的计算公式;在着重介绍常用尺寸的过盈配合的计算与应用基础上,又介绍了大、小尺寸的计算特点和计算公式。本书还着重介绍了离心力、表面粗糙度和形状误差对过盈联结强度的影响。为便于在设计计算中应用,本书还对繁杂的计算提供了计算图表和计算机程序。鉴于目前各工厂中所采用的过盈联结装拆工艺存在许多混乱和不合理现象,本书较系统地介绍了科学合理的工艺,并提供了参考资料。因此,从内容来讲,有理论分析、计算及举例,也有试验结果和供实际使用的参考资料。

本书涉及国内外资料较多,由于作者水平有限,难免有不当之处,望读者指正。

本书在编写过程中,得到了北京印刷学院何镜民教授、山东工业大学力学教研室程德明副教授的大力支持,并对书稿提出了许多宝贵意见,在此表示感谢。

作者

1991年于青岛

目 录

第一章 过盈联结的基本概念	(1)
§ 1-1 概述	(1)
§ 1-2 过盈联结的分类	(2)
§ 1-3 过盈联结的应用范围	(4)
第二章 过盈联结的计算基础	(6)
§ 2-1 过盈联结计算的假定条件	(6)
§ 2-2 过盈配合的基础计算式	(7)
§ 2-3 厚壁组合筒的应力和应变计算	(14)
§ 2-4 决定过盈量的计算	(17)
§ 2-5 弹、塑性范围厚壁筒的应力	(18)
§ 2-6 薄壁圆筒与厚壁圆筒在分析处理上的不同——基本假定	(19)
第三章 过盈联结中的摩擦系数	(21)
§ 3-1 概述	(21)
§ 3-2 影响摩擦系数的因素及其评定	(21)
§ 3-3 用机械方法装配时圆柱过盈联结的摩擦系数	(28)
§ 3-4 热压(缩紧)配合时圆柱过盈联结的摩擦系数	(34)
§ 3-5 机械压入装配时圆锥过盈联结的摩擦系数	(38)
§ 3-6 用加热包容件或油压法装配时圆锥过盈联结的摩擦系数	(39)
第四章 在弹性范围内圆柱过盈配合的计算	(43)
§ 4-1 过盈配合的公式计算法	(43)
§ 4-2 过盈配合的图算法	(55)
§ 4-3 用诺模图计算和选择过盈配合	(64)
第五章 在弹、塑性范围内圆柱过盈配合的计算	(68)
§ 5-1 G. Lundberg 的计算方法 (DIN 7190—1981)	(68)
§ 5-2 永岛菊三郎的计算方法	(77)
§ 5-3 F. G. Kollmann 的计算方法	(88)
§ 5-4 Lundberg 与 Kollmann 两种计算方法的比较	(90)
第六章 n 级过盈联结的计算	(94)
§ 6-1 配合环承受切向拉应力且全部达到其屈服极限时 n 级过盈联结的计算	(94)
§ 6-2 配合环保持无切向拉应力时 n 级过盈联结的计算	(99)
§ 6-3 一级和两级过盈联结时自外向内联结的计算说明及举例	(103)
第七章 圆锥过盈联结的设计与计算	(113)

§ 7-1 圆锥过盈联结的作用原理及分类	(113)
§ 7-2 圆锥过盈联结强度计算的特点	(115)
§ 7-3 圆锥过盈联结的计算	(119)
§ 7-4 圆锥过盈联结的结构设计	(127)
第八章 圆锥参数偏差对圆锥过盈联结的影响	(132)
8-1 圆锥过盈联结参数偏差	(132)
8-2 圆锥母线角度偏差对过盈联结强度的影响	(137)
8-3 圆锥联结直径偏差和长度偏差对过盈配合联结强度的影响	(146)
8-4 轴向过盈量的误差评定及其对联结强度的影响	(148)
第九章 动载荷条件下过盈联结的特性及其计算	(151)
§ 9-1 在交变载荷或冲击载荷作用下轴向位移和扭转强度的计算	(151)
§ 9-2 圆柱和圆锥过盈联结在承受悬臂弯曲时的轴向联结强度	(152)
§ 9-3 回转和静悬臂弯曲时在圆周方向的联结强度	(159)
§ 9-4 不同形式交变弯曲时轴向剪切联结强度	(160)
§ 9-5 对交变载荷引起过盈联结强度降低原因的分析	(162)
§ 9-6 过盈联结承受交变弯曲载荷时弯曲力矩的计算	(165)
§ 9-7 轴向、扭转和交变弯曲载荷同时作用时过盈联结的计算	(167)
第十章 离心力对过盈联结强度的影响	(177)
§ 10-1 旋转件在弹性范围内过盈配合的计算	(177)
§ 10-2 旋转件在弹、塑性范围内过盈配合的计算	(183)
§ 10-3 离心力对齿轮过盈联结的影响	(191)
第十一章 联结表面粗糙度和形状误差对过盈配合的影响	(197)
§ 11-1 联结表面的粗糙度对过盈量和联结强度的影响	(197)
§ 11-2 结合表面的实际接触面积及其影响因素	(202)
§ 11-3 考虑表面粗糙度对过盈配合影响的实际方法	(207)
§ 11-4 联结表面形状误差对过盈配合的影响	(211)
第十二章 大、小尺寸和薄壁套过盈联结的特点及其计算	(218)
§ 12-1 小尺寸过盈联结的特点	(218)
§ 12-2 小尺寸过盈联结的压配过程及其影响因素	(219)
§ 12-3 小尺寸过盈联结的计算	(222)
§ 12-4 大尺寸范围过盈配合的特点	(229)
§ 12-5 过盈装配时薄壁套筒孔尺寸的变化及计算	(232)
第十三章 过盈联结的结构设计与装拆工艺	(237)
§ 13-1 过盈联结的结构设计	(237)
§ 13-2 过盈联结的装配工艺	(243)
§ 13-3 大过盈量的过盈联结的分解举例	(254)
参考文献	(257)

第一章 过盈联结的基本概念

§1—1 概 述

过盈联结是指利用过盈量使包容件和被包容件抱紧而形成的一种联结。通常包容件为套筒或轮毂，被包容件为轴或套筒。在过盈配合中，包容件内径的最大尺寸小于被包容件外径的最小尺寸。装配后，由于结合面上产生阻碍零件相互位移的结合力，而使两相配零件相互抱紧，达到传递扭矩和承受轴向力的目的，如图 1—1 a、b 所示。

过盈联结应用范围很广，主要用于重型机器，如起重运输、船舶、机车、通用化工机械及军工部门等。在这些领域里，用过盈联结来传递较大的扭矩和力，这种方法不但安全可靠，而且较之其它方法有较大的经济价值。在精密机械和仪器、仪表制造业中，小尺寸过盈联结的应用也较广泛。过盈联结的主要特点是：结构简单，在结合件之间往往不需要任何紧固件（螺钉、键、销子等），避免了由于附加紧固件而造成横截面的削弱，从而降低联结强度；结合的定心好；承载能力高；承受交变和冲击载荷的性能好。但此种联结对结合面的加工精度要求较高，装配过程也比较复杂。

圆柱过盈联结的使用已有很久的历史，从 30 年代到 40 年代，在机械工业特别是重型机械工业中，已有一定程度的发展。一些国家如苏联的学者对过盈联结的压装过程、摩擦系数以及压装工艺等方面，做了一系列的试验研究，取得了一定的成果，过盈联结的使用范围也不断扩大。但这种过盈联结仅限于弹性范围内，即联结件的应力水平不超过其材料的屈服极限。

圆锥过盈联结，在液力传动装置中应用也很广泛。

近 30 年来，在圆柱和圆锥过盈联结方面，各国都进行了大量的试验研究工作。圆柱过

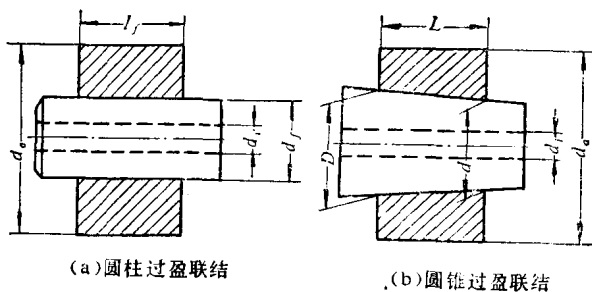


图 1—1 圆柱和圆锥过盈联结

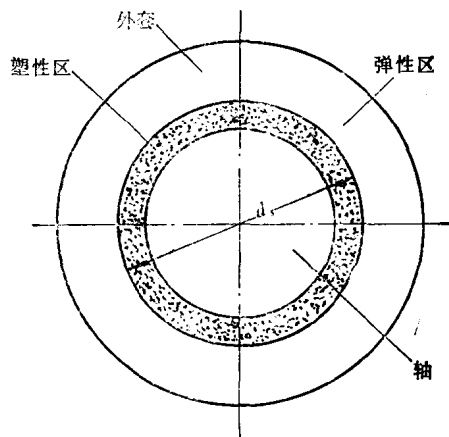


图 1—2 弹、塑性过盈联结

盈联结, 已从弹性范围内发展到弹、塑性范围内。并在设计、计算等方面, 取得了广泛的经验。

在弹性范围内, 由于包容件和被包容件之间的过盈量, 在结合处由结合压力产生的应力和应变成正比, 而且应力通常是在包容件内径处最大, 对实心轴在整个半径上是保持不变的。但在结合压力较高时, 应力往往会超过材料的屈服极限, 在包容件内径处形成环形塑性区域, 在此塑性区内, 材料的变形不再遵守虎克定律, 对这种弹性和塑性同时存在的情况, 称为弹、塑性范围 (图 1—2)。

为广泛应用于工程实际, 德国早在 40 年代就制订了《过盈配合计算与应用》国家标准 DIN 7190。由于该标准规定的计算过程过于繁杂, 而且计算误差也较大, 影响了标准的使用。因此, 德国公差与配合委员会所属的过盈配合委员会的专家们, 在过盈配合计算方法的简化方面进行了大量的研究工作, 取得了较大的进展。他们用图算法取代了复杂的计算, 运用这种计算图表, 可以在较短的时间内完成过盈配合的计算。但由于影响过盈联结的因素较多, 且较复杂, 所以计算图表只能有条件地使用, 所以修改后的 DIN 7190—81 标准, 只能以常见的和简单的两个厚壁圆筒之间的过盈联结应基础进行计算, 而对特殊几何形状和特殊应力的过盈联结, 在标准中只提供了有关的参考资料, 这些资料将有助于对过盈配合整个领域的进一步研究。

ISO/TC 3, 即国际标准化组织第三技术委员会, 于 1987 年 3 月在柏林召开全体会议, 决定成立以公差与配合选择为研究课题的第二工作组 (WG 2)。近年来, 以英国的克兰弗尔德 (Cranfield) 工艺学院为主, 对过盈配合的计算与应用进行了大量的试验研究, 提出了“过盈配合的计算与选用”国家标准草案, 并作为国际标准的基础, 为广泛采用过盈联结提供方便。

我国于 1981 年, 由原国家标准局和原一机部将国家标准《过盈配合的计算和选用》的制订工作列入了标准化的工作计划, 由机械工业部标准化研究所和原山东工学院负责该项国标的分析研究和起草工作。山东工学院过盈配合试验研究小组, 对厚壁圆筒过盈配合进行了压入、压出试验、应力电测试验、光弹性试验等。经过大量的试验研究, 为制订国家标准提供了依据, 顺利地完成了国标的起草工作。该国标由全国公差与配合标准化技术委员会审定报批, 于 1985 年由原国家标准局批准为国家标准《公差与配合, 过盈配合的计算与选用》GB 5371—85, 并于 1986 年开始实施。

多年的实践证明, 圆柱过盈联结具有传递力大和可靠性好等优点, 因此在很多场合下, 当轴和外套之间的联结需要传递较大的、带冲击性和方向变化的力时, 这种联结是唯一可行的方式。但是, 联结件的组装特别是拆卸有时会引起困难, 拆卸时零件的工作表面会受到损伤, 甚至使联结件损坏。因此, 德国什准恩孚特的 SKF 和 Kuel-Fischer 公司发表了使用圆锥油压联结的建议, 它的作用与通常的压配合和热压配合的联结基本相同, 只是利用在压配合面间产生一个高压油膜, 使组装和拆卸大为简便, 可以反复地安装和拆下, 而不会损坏零件表面质量, 费用低微。从 40 年代开始, 此种油压过盈联结的方法已在各个领域里被广泛采用, 且已取得了大量经验, 并在有关其最佳结构方面, 各国都有研究成果, 详见第七章。

§1—2 过盈联结的分类

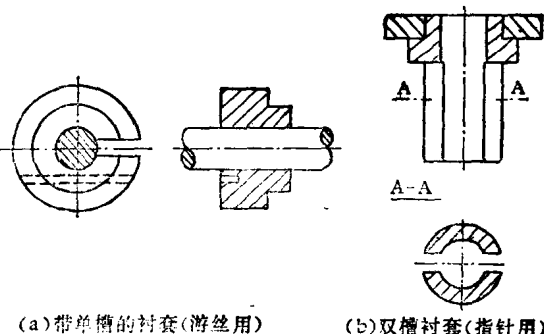
过盈联结应用广泛, 种类很多, 按不同的分类方法可以大致分为以下几种类型,

1. 按联结表面的几何特征

(1) 连续表面的过盈联结，如圆柱和圆锥联结（图 1—1），

(2) 断续表面的过盈联结（如图 1—3）。

图 a 为具有单槽衬套的过盈联结；图 b 为具有双槽衬套的过盈联结。由于带槽的衬套具有较大的弹性，孔径和轴之间可以有相当大的过盈。但因衬套传递力矩小，常用于微型机械中要求可拆卸的场合。这种双槽衬套过盈联结，不需要精确的机械加工。此衬套必须用韧性金属材料制成，如黄铜等。



(a) 带单槽的衬套(游丝用)

(b) 双槽衬套(指针用)

图 1—3 开槽衬套的过盈联结

2. 按相配件组装后结合面受力变形的性质

(1) 弹性过盈联结；

(2) 弹、塑性过盈联结（图 1—2）。

此外，在高应力过盈配合中，塑性变形可一直扩展到包容件外表面（塑性半径 $r_s = d/2$ ）或被包容件表面，即结合处于全部塑性状态。

如果联结件材料全部处于塑性状态，则联结强度迅速降低，甚至使零件破坏，这是不允许的。在弹性范围内，过盈联结虽安全可靠，但材料往往不能充分利用。因此，目前过盈配合以控制在弹、塑性范围内较为合理。

3. 按联结件结构特征

(1) 厚壁套筒过盈联结；

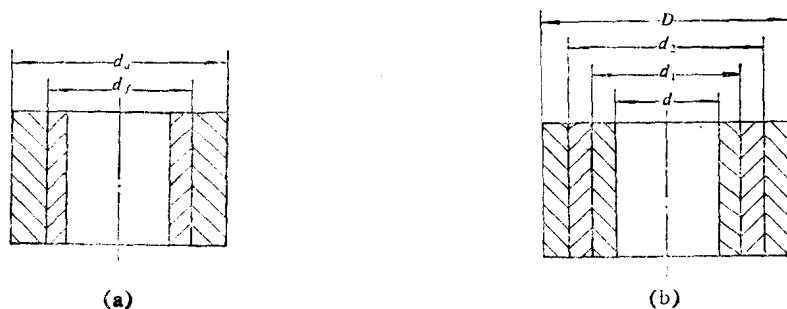
(2) 薄壁套筒过盈联结。

一般把 $(d_a - d_f)/d_f > 1/5 \sim 1/10$ 的圆筒称为厚壁筒，而 $(d_a - d_f)/d_f < 1/5 \sim 1/10$ 为薄壁筒。式中， d_a 为套筒外径； d_f 为内径（图 1—1）。由于圆筒的厚薄不同，在应力分析、装配变形等方面都有所不同。

4. 按形成过盈联结的组装方式

(1) 纵向过盈联结，即用压入法实现的过盈联结，也称压入配合；

(2) 横向过盈联结，即用胀缩法实现的过盈联结。缩紧配合是将包容件加热，装配以后回到常温时联结件抱紧，所以也称为热压配合；胀紧配合则是将被包容件冷却，装配后回到常温时使联结件胀紧。



(a)

(b)

图 1—4 一级和 n 级过盈联结

(3) 纵向和横向方法的结合。

5. 按联结件的层次多少

(1) 一级过盈联结 (图 1—4 a);

(2) n 级过盈联结 (图 1—4 b)。

6. 按过盈联结的功能

(1) 用于传递载荷的过盈联结, 例如减速箱中传动齿轮与轴的联结, 大齿轮齿圈与轮毂的联结, 机车中车轴与轮心及轮心与轮毂的联结等。这种联结的特点是传递载荷大, 过盈量也大。

(2) 用于固定联结的过盈联结, 此类联结不传递载荷, 如轴承外圈与轴承座的联结, 齿轮与轴套的联结等。此类联结一般被包容件为轴套类, 受力不大, 过盈量较小。

§1—3 过盈联结的应用范围

过盈联结在不同尺寸范围的应用情况如图 1—5 所示。

小尺寸范围 (≤ 3 mm) 的应用情况如图 1—5 a 所示, 广泛用于仪表制造业, 特别在 0.9 ~ 1.2 mm 范围内应用最多。这种过盈联结的零件一般用特殊的仪表材料——黄铜、钟表宝石、玻璃等制造。用专门的工艺方法——冲压、挤压等进行加工。这个尺寸组的联结强度在很大程度上受联结表面形状和表面粗糙度的影响。由于直径小, 在屈服极限内保证刚性联结的过盈量很小, 零件变形的性质基本上属于弹-塑性范围的联结。联结件精度要求高, 制造比较困难, 成本较高, 联结件的装配一般用轴向压入法。中间尺寸范围 ($> 3 \sim 500$ mm) 的应用情况如图 1—5 b 所示, 在一般机械制造中广泛应用。联结件可用各种材料制造, 用一般工艺方法进行加工, 可用纵向或横向方法进行装配。在圆柱过盈联结的拆卸或圆锥联结

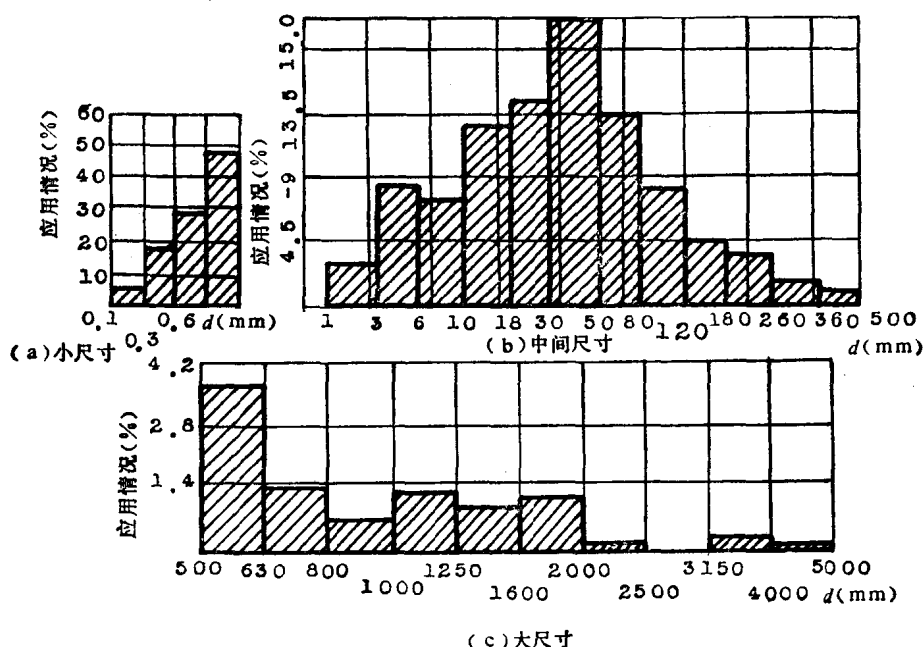


图 1—5 不同尺寸范围过盈联结的应用情况

时,也可用油压扩孔和轴向压入方法来实现。从图 1—5b 可见:在30~50 mm范围内应用最多。

大尺寸范围(>500~1000 mm)的过盈联结,在重型机械、机车制造、化工机械制造业中被广泛采用,其应用情况如图 1—5c 所示。此种联结件的材料多用耐热合金钢、高强度铸铁等。

这种联结多半采用锥度过盈联结,以便维修时拆卸方便。

过盈联结件所用材料范围也很广泛,大致有以下几类:

- ① 脆性 (σ/E 到 1.0×10^{-3}) 和半脆性 (σ/E 到 1.6×10^{-3}) 材料,如陶瓷(常用于化工机械与电子技术中)、各种牌号的铸铁等。
- ② 弹性材料 (σ/E 到 2.5×10^{-3}),如各种牌号的钢。
- ③ 塑性材料 (σ/E 到 4×10^{-3}),如黄铜、青铜、铝及其它有色合金。
- ④ 弹性-热凝性 (σ/E 到 6.4×10^{-3}) 和热塑性 (σ/E 大于 6.4×10^{-3}) 的塑料。

第二章 过盈联结的计算基础

在过盈配合的计算中,多数情况是计算包容件为厚壁圆筒或轮毂,被包容件为轴或厚壁筒之间过盈联结后的应力、变形、结合力、传递力以及力矩等参数。为此,本章所介绍的计算基础,主要以厚壁筒为主。

§2—1 过盈联结计算的假定条件

厚壁圆筒过盈联结的计算是以拉美(Lame)公式为基础,并在俄罗斯学者加道林院士提供的组合筒理论基础上进行的。影响实际组合件的因素很多,在计算时往往是在一定的假设条件下进行的。

一、弹性范围内两个简单厚壁圆筒过盈联结的计算

弹性范围系指包容件和被包容件,由于结合压力而产生的变形和应力之间成线性关系。对塑性材料来说,其最大应力低于材料的屈服极限 σ_s ,而对屈服极限不明显的材料,则其应力低于材料的名义屈服极限 $\sigma_{0.2}$ 。此时,假设条件为:

1. 包容件和被包容件处于平面应力状态,即轴向应力 $\sigma_z=0$ 。所谓平面应力状态是假设有等厚度薄板,只在板边上受有平行于板面,并且不沿厚度变化的面力作用;
2. 包容件和被包容件在结合长度上,结合压力为常数。
3. 材料的弹性模量为常数

二、弹、塑性范围内过盈联结的计算

在上述理想弹性条件中,假设材料的应力和应变成线性关系,但在实际材料中,这个关系只能在一定范围内适用。因为,在这些材料组成的组合件中,一般情况下应力分布是不均匀的,有的部位应力很大,很早就达到了弹性极限,而其它部位应力还很低,如果单凭弹性范围来计算过盈联结,则材料的利用率就很低。事实上,在超过弹性极限以后,大多数材料还是能够继续承担应力的,只是当超出屈服极限以后,包容件和被包容件内表面就会出现一个环形塑性区(图1—2)。在这个塑性区域中,应力与应变关系已经是非线性的了,这种非线性的特征又是与所研究的具体材料有关,对于不同材料,在不同条件下都有不同的规律。这些塑性变形的基本规律,应当建立在实验的基础上,即从实验中去找出材料超出弹性极限以后的特性,从而建立塑性力学的基本方程。但数学上解决上述问题是很困难的,因此在实验的基础上,塑性范围内的计算,一般采用以下假定:

1. 材料是连续而均匀的;

2. 平均正应力（静水压力）不影响屈服条件和加载条件；
3. 体积的变化是弹性的；
4. 不考虑时间因素对材料性质的影响。

三、塑性范围的应力、应变与弹性范围的比较

塑性范围内的应力和应变与弹性范围的区别主要在于：

1. 应力与应变之间的关系是非线性的，其比例系数不仅与材料有关，而且与塑性变形的大小有关；
2. 由于塑性变形的出现，应力与应变之间不再存在一一对应的关系，它与加载历史有关；
3. 变形体中可分为弹性区与塑性区，在弹性区中，加载与卸载都服从广义的虎克定律，但在塑性区中，加载过程服从塑性规律，而卸载过程中则服从弹性虎克定律，即材料的弹性性质不受塑性变形的影响。

§2—2 过盈配合的基础计算式

弹性范围内过盈配合的计算，是以拉美方程为基础而建立起来的。因此，有必要简略地介绍这些基础计算公式。

一、厚壁圆筒切向应力和径向应力的计算

1. 厚壁圆筒的假设条件

厚壁圆筒的理论是对远离封闭端的中间截面作出的，通常施加于厚壁圆筒上的压力系统是对称的，而筒壁的环形微元上所有的点将产生同样大小的位移，此位移值取决于环形微元的半径。

2. 厚壁圆筒的应力

由于圆筒的变形对于轴线的对称性，圆筒上任何一层均作圆形扩张，筒上的任何一点也只会发生径向位移，而且等半径圆周上各点的位移相同，而不同半径之圆周上各点的径向位移随半径而改变，图 2—1 所示为作用于半径 r 处的单位长度单元体上的应力。径向应力沿单元体的厚度 dr 由 σ_r 增加到 $\sigma_r + d\sigma_r$ 。

考虑到单元体沿径向的平衡：

$$(\sigma_r + d\sigma_r)(r + dr)d\theta \times 1 - \sigma_r \times r d\theta \times 1 = 2\sigma_t \times dr \times 1 \times \sin \frac{d\theta}{2} \quad (2-1)$$

式中 σ_r 、 σ_t ——径向、切向应力 (MPa)。

当角度很小时， $\sin \frac{d\theta}{2} = \frac{d\theta}{2}$ (rad)。

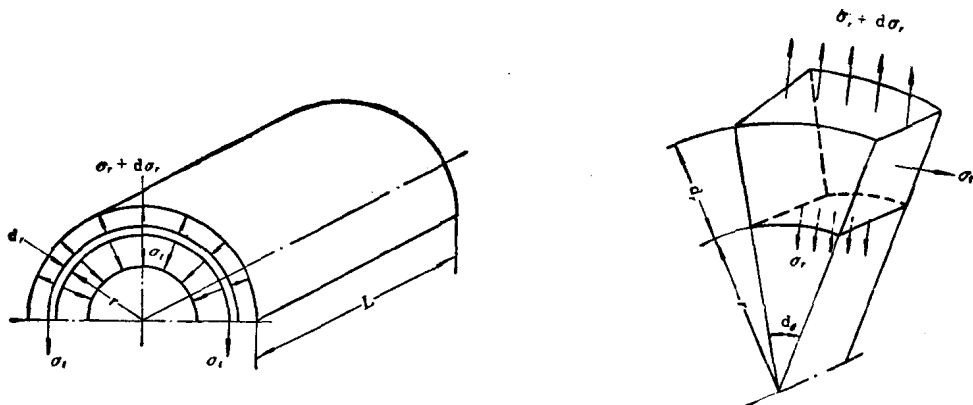


图 2—1 单元体上的应力

因此，忽略二阶微量后有

$$r d \sigma_r + \sigma_r dr = \sigma_t dr$$

$$\sigma_r + r \frac{d \sigma_r}{dr} = \sigma_t$$

$$\sigma_t - \sigma_r = r \frac{d \sigma_r}{dr} \quad (2-2)$$

以上假定横截面在圆筒变形后仍为平面，即纵向应变 ϵ_z 在筒壁范围内为常量，于是

$$\begin{aligned} \epsilon_z &= \frac{1}{E} [\sigma_z - \nu \sigma_r - \nu \sigma_t] \\ &= \frac{1}{E} [\sigma_z - \nu (\sigma_r + \sigma_t)] = \text{常数} \end{aligned}$$

式中 σ_z ——轴向应力 (MPa);

ν ——泊松比;

E ——弹性模量 (MPa)。

还假定在远离端部处纵向应力 σ_z 在筒壁范围内也为常量。所以 $\sigma_r + \sigma_t = \text{常量}$ ，并令此常量为 $2A$ ，则

$$\sigma_r + \sigma_t = 2A \quad (2-3)$$

将 σ_t 代入式 (2-2)，得：

$$2A - \sigma_r - \sigma_r = r \frac{d \sigma_r}{dr}$$

乘以 r 并重新排列，得：

$$2 \sigma_r r + r^2 \frac{d \sigma_r}{dr} - 2Ar = 0$$

即
$$\frac{d}{dr}(\sigma_r r^2 - A r^2) = 0 \quad (2-4)$$

因此，积分式 (2-4)， $\sigma_r r^2 - A r^2 = \text{常数}$ ，设为 $-B$ 。则

$$\sigma_r = A - \frac{B}{r^2} \quad (2-5)$$

而由方程式 (2-3) 得：

$$\sigma_t = A + \frac{B}{r^2} \quad (2-6)$$

上列方程式可通过 A 和 B 给出在任一半径 r 处的径向应力和切向应力。

式 (2-5) 和式 (2-6) 系由拉美方程给出厚壁圆筒的切向应力和径向应力。 A 和 B 称为拉美常数。

若厚壁圆筒只承受内压力 p_1 ，而外压力 $p_2 = 0$ 时，如图 2-2 所示，可利用已知条件确定拉美常数 A 和 B 。

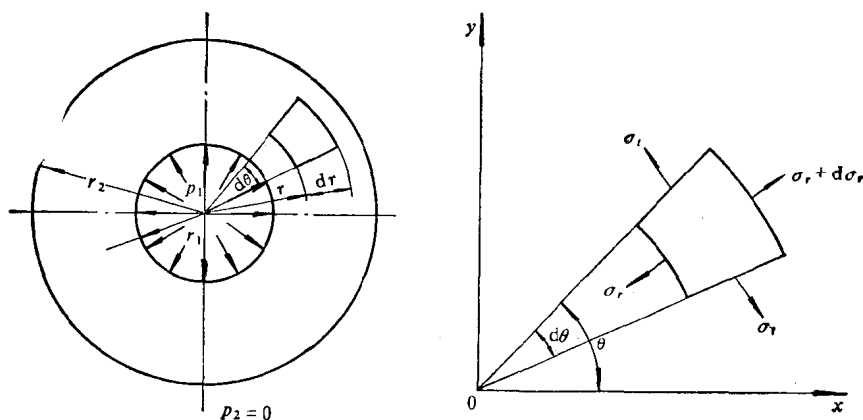


图 2-2 圆筒受内压力

在 $r=r_1$ 处 $\sigma_r = -p_1$

在 $r=r_2$ 处 $\sigma_r = 0$

将上列条件代入式 (2-5)，有

$$-p_1 = A - \frac{B}{r_1^2}$$

$$0 = A - \frac{B}{r_2^2}$$

即
$$A = \frac{p_1 r_1^2}{(r_2^2 - r_1^2)}, \quad B = \frac{p_1 r_1^2 r_2^2}{(r_2^2 - r_1^2)}$$

所以

$$\begin{aligned}\sigma_r &= A - \frac{B}{r^2} = -\frac{p_1 r_1^2}{(r_2^2 - r_1^2)} \left[1 - \frac{r_2^2}{r^2} \right] \\ &= \frac{p_1 r_1^2}{(r_2^2 - r_1^2)} \left[\frac{r^2 - r_2^2}{r^2} \right]\end{aligned}\quad (2-7)$$

$$\begin{aligned}\sigma_t &= \frac{p_1 r_1^2}{(r_2^2 - r_1^2)} \left[1 + \frac{r_2^2}{r^2} \right] \\ &= \frac{p_1 r_1^2}{(r_2^2 - r_1^2)} \left[\frac{r^2 + r_2^2}{r^2} \right]\end{aligned}\quad (2-8)$$

由式 (2-7)、(2-8) 可见, σ_r 和 σ_t 最大应力均发生在半径处。

若厚壁圆筒承受内压力 p_1 和外压力 p_2 时, 因圆筒不受轴向力, 所以 $\sigma_z = 0$ 。则

$$\text{当 } r = r_1 \text{ 时,} \quad \sigma_r = -p_1$$

$$\text{当 } r = r_2 \text{ 时,} \quad \sigma_r = -p_2$$

将上列条件代入式 (2-5), 可求得拉美系数 A 、 B 及应力:

$$A = \frac{p_1 r_1^2 - p_2 r_2^2}{(r_2^2 - r_1^2)}, \quad B = \frac{(p_1 - p_2) r_1^2 r_2^2}{(r_2^2 - r_1^2)}$$

所以

$$\sigma_r = \frac{p_1 r_1^2 - p_2 r_2^2}{(r_2^2 - r_1^2)} - \frac{(p_1 - p_2) r_1^2 r_2^2}{r^2 (r_2^2 - r_1^2)} \quad (2-9)$$

$$\sigma_t = \frac{p_1 r_1^2 - p_2 r_2^2}{(r_2^2 - r_1^2)} + \frac{(p_1 - p_2) r_1^2 r_2^2}{r^2 (r_2^2 - r_1^2)} \quad (2-10)$$

上述计算式可用拉美直线表示。如图 2-3 所示, 在直角坐标系中, 纵坐标表示应力, 横坐标表示 $1/r^2$, 因此拉美方程式可以用两条直线表示, 它们具有完全一样的截距 A 和同样大小的斜率 B , 仅斜率的正、负号不同。因此, 通过把原来画在 σ 轴右侧的切向应力值画到左侧 (仍对 $1/r^2$ 画), 而把两条直线绘成一条直线, 如图 2-4 所示, 即为受内压力和外压力作用下圆筒的拉美直线求解结果。

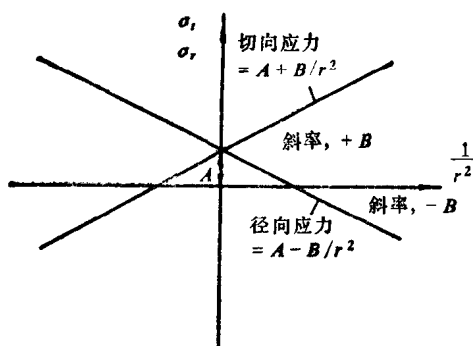


图 2-3 拉美方程的图示——拉美直线

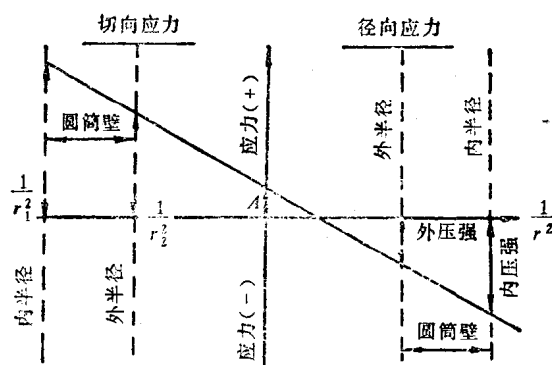


图 2-4 受内压力和外压力作用的圆筒用拉美直线求解

当厚壁圆筒只承受外压力时，内半径处的径向应力为零，因而拉美直线如图 2—5 所示。

由此可见，用拉美直线即图解分析方法比较形象直观。但简单地从图中的坐标轴上读取应力值是不够的，因为这样会导致明显的误差。精确的值必须利用相似三角形由图形的比例关系得出。

例：一厚壁圆筒，内半径 100 mm，外半径 150 mm，受 60 MPa 内压力和 30 MPa 外压力作用，试求圆筒内、外半径处的切向应力和径向应力。

解：用拉美图解分析法解。

如图 2—6 所示，图中圆筒边界由下式给出：

$$\text{在内半径处} \quad r_1 = 0.1 \text{ m} \quad \frac{1}{r^2} = 100$$

$$\text{在外半径处} \quad r_2 = 0.15 \text{ m} \quad \frac{1}{r^2} = 44.5$$

由于受内压力和外压力均使圆筒受压，因此内、外圆筒半径处径向压力均为压应力，即为负值（图 2—7）。由图中可求得：

$$\text{在 } r_1 = 0.1 \text{ m 处} \quad \sigma_r = -60 \text{ MPa}$$

$$\text{在 } r_2 = 0.15 \text{ m 处} \quad \sigma_r = -30 \text{ MPa}$$

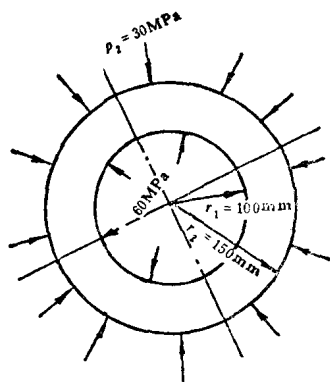


图 2—6 圆筒受内、外压力

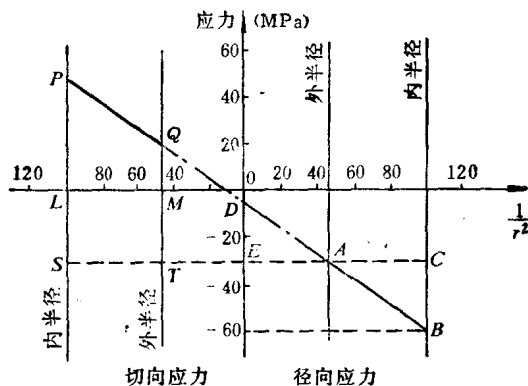


图 2—7 拉美图解例

这些半径处的切向应力可由图中 P 和 Q 两点给出。为精确起见，这两个值应该利用图的比例关系如下计算得出：

由相似三角形 $\triangle PAS$ 和 $\triangle BAC$ 知：