塑性力学

——基础及其一般结果

PLASTICITY

J. B. Martin

J. B. 马　丁 著

北京理工大学出版社

塑 性 力 学

——基础及其一般结果

J.B.Martin 著

余同希 赵学仁 王礼立
薛大为 杨桂通 徐秉业
熊祝华 译

北京理工大学出版社

内 容 提 要

本书为美国麻省理工学院出版社出版的《Plasticity：Fundamentals and General Results》一书的中译本，原书对塑性力学的基本知识和历史以及截至1975年前的主要结果，作了深入系统的阐述，为公认的塑性力学的名著之一。原书作者在力学和技术界享有盛誉，对塑性力学作出了出色的贡献。

本书可供与塑性力学有关的科技教育工作者学习或参考之用或作为博士研究生的教材，也可供航空航天、军工、机械、造船、土建等部门的科学、技术工作者参考。

PLASTICITY：FUNDAMENTALS
AND GENERAL RESULTS
J.B.Martin
The MIT Press 1975

塑性力学——基础及其一般结果
J.B.Martin 著
余同希 赵学仁 王礼立 薛大为 杨桂通 徐秉业 熊祝华 译
*
北京理工大学出版社出版
新华书店北京发行所发行 各地新华书店经售
国防科工委印刷厂印刷
*
787×1092毫米16开本 27.5印张 680千字
1990年12月第一版 1990年12月第一次印刷
ISBN 7—81013—372—1/O·71
印数：1—1500册 定价：19.75元

作者前言

在本书中，我力图就塑性力学的基本概念和一般结果作一清淅的阐述。一方面，它要足够广泛，以至于可在固体力学和结构力学的各个方面应用；而在另一方面，它应是建立得好而且是好理解的。为达到此目的，所给出的概念和理论要适用于范围宽广的问题，包括桁架、梁、刚架、板和壳、平面应力和平面应变及一般的连续体问题。较之对一类特殊问题的求解而言，重点放在论证原理的通用性及其对各类问题的应用上。为了限于概念已经建立好的范围，注意力限于等热及与时间无关的静力问题，在这种场合，小位移假定是适用的。因而，对当前塑性力学的某些方面的重要进展未予涉及，例如，未涉及动力学及其它与时间相关的问题的研究，以及有限变形和塑性不稳定性。可以相信，对已建立的基础的透彻了解，将对已取得的新的进展的掌握提供一个基础。

本书可供研究生和高年级大学生学习之用。假设读者对固体和结构的弹性性质已有了解，具有弹性性质的某一方面的知识，例如具有结构分析的知识或应力分析的知识，这就足够了，这是因为作为在上述任一方面的弹性研究的扩展的塑性力学，本书可以有选择地阅读。

本书分为六篇。在第Ⅰ篇中，给出了各种类型问题的有关的方程，讨论了所有与这些问题相适应的记号。根据拉伸试验中观察到的宏观性质导出了弹-塑性本构关系，接着探讨了弹-塑性响应的特征。在第Ⅱ篇中，探讨了一些特殊的弹-塑性问题及它们的解，引入了一些常用的理想化。在第Ⅲ篇至第Ⅴ篇中，探讨了一般定理。第Ⅲ篇为极限分析及其结论。第Ⅳ篇为周期加载及弹性、理想塑性体的安定问题。第Ⅴ篇则为形变理论及增量分析。在第Ⅵ篇中，则处理了热力学对本构关系的列式过程。

每章的方程和插图均独立编号。除了第Ⅰ篇的参考文献列于第3章的末尾之外，其余均放在每章的末尾。虽然将平行的概念发展凝合为一体来展现是困难的，有时甚至是不可能的，但被本教程所接受了。

作为学生、同事和合作者，我知道展现在本书中的许多内容取材于我的学会以及许多在塑性力学的发展和明确化方面作出了许多贡献的人。不论本书的目的是否达到，我都要深切地感谢他们。我要向W.Prager（他建议必须写成本书），D.C.Drucker，J.Heyman和P.S.Symonds表示感谢。我也感谢R.J.Clifton，L.B.Freund，J.Kestin，F.A.Leckie，A.R.S.Ponter以及J.R.Rice，他们和我作了许多小时的详细讨论，从而形成了本书的部分标题。

在详尽地准备本书时，我也得到了许多人的协助。Z.Bilek给我提供了一些苏联文献，B.D.Reddy，P.Carter以及T.B.Griffin帮助我校阅了最后的手稿，J.Bardsley夫人和E.Fonseca夫人首先响应打印了这份手稿。我十分感谢D.F.Murcott夫人，她以极其熟练的技巧，不知疲倦地、耐心地打印了用于出版的本书的最后手稿。书中插图是K.Martin绘制的。

本书的写作是从1969～1970年当我在Leicester大学的休假年中开始的。我感谢F.A.

Leckie，因为他在其许多事务中对此作了安排。在1970～1972年间，本工作在Brown大学继续而于1973～1974年在Cape Town大学完成。我十分感谢G.V.R.Marais在安排完成最后手稿方面给我的帮助。

1974年11月

译者前言

本书译自美国麻省理工学院出版社出版的约翰·马丁教授所著《Plasticity: Fundamentals and General Results》一书。原书虽是1975年出版的，但由于它是塑性力学的名著之一，一些有关塑性力学的重要结果和进展以及作者本人对塑性力学的重要贡献，在本书中均有反映，所以我们认为仍有译出供我国有关力学及其它科技工作者使用、参考的价值。

参加本书翻译工作的有：

王礼立（中国科学技术大学、宁波大学），译7、8、27、28章

余同希（北京大学），译1、2章

杨桂通（太原工业大学），译13、14、15章

赵学仁（北京理工大学），译3、4、5、6章

徐秉业（清华大学），译16、17、18、19、20章

熊祝华（湖南大学，江西工业大学），译21、22、23、24、25章

薛大为（北京理工大学），译9、10、11、12、26章

译稿在送交出版社之前，曾由薛大为、赵学仁统稿并作了图文、符号等出版前的一些工作，北京理工大学出版社郑锡琏副总编为本书的出版付出了大量劳动并改正了译文中的一些疏漏。

由于时间仓促，并限于译者的水平，译稿中的疏漏乃至错误之处在所难免，尚祈广大学人，惠予指正。

译　者

1989年4月

目　　录

第Ⅰ篇　塑性力学的基本概念

第Ⅱ篇　塑性性质的特殊方面

第Ⅱ篇 极限分析和极限设计

第V篇 形变理论和增量分析

第Ⅰ篇 塑性力学的基本概念

第一章 绪 论

1.1 前 言

在这本专著里，我们将专门考虑塑性中的结构问题。结构问题可以定义如下：通过对由给定材料构成的简单物体的受控实验，预测由同一材料构成的任意给定物体在以特定方式支承并受到特定载荷时的力学行为。应力（内力）和应变（变形的度量，在刚体位移过程中，它在物体中处处为零）的概念在结构问题的数学表述中起着核心的作用。

我们可以通过动力学的考虑来确定物体的应力和应力梯度间的关系，以及物体边界上的应力和外力间的关系。满足这些动力学约束条件的应力场称之为动力许可的。运动学的考虑使应变与位移梯度联系起来。也可能有必要加上协调条件以保证这些应变位移关系可积。满足这些条件的应变场称之为运动许可的。动力学和运动学二者的要求均与构成物体的材料无关。可是，它们在形式上依赖于被研究物体的构形，因为，为了数学上和计算上的便利，对不同的构形要采用不同的坐标系。当物体由材料的薄片构成(板和壳)，或者由其横截面尺度远小于长度的弯杆和直杆组合而成时，问题常常可以得到简化。对前一种情况，在建立方程时厚度可以忽略不计，理论中只出现两个空间坐标。对后一种情况，两个横截面尺度均可忽略，只须考虑一个空间坐标。必须引入广义应力、广义应变和广义位移的概念，因而动力学和运动学方程的形式也与三维理论不同。

应力-应变关系表示了所讨论材料的特征，称之为本构关系。这些关系必须由实验来确定。通常，实验所用试件的应力和应变应当是均匀的，至少是相当接近于均匀的。壳和杆系结构中的广义应力和广义应变之间的关系通常由三维物体的本构关系导出，但勿庸置疑，基本数据仍然必须由实验确定。本构关系可能包含一些除应力和应变之外的可测量的物理量，比如温度和时间，或一些不能直接测量的内部参量。有时，利用应力和应变的历史，或内蕴在材料中的对过去力学事件的记忆，可以较方便地表述上述内部参量的效应。

可是，常常发现在行为的一定限制范围内(即在一定的应力、应变率和温度等范围内)，材料表现出某种决定性的特征。由于我们总是希望用简单的方法对结构问题求解，因而通常的作法是把这些决定性的特征分成若干类材料行为。从对结构问题求解的观点看，弹性行为是最简单的一类。塑性行为是另一种类型，粘弹性、热弹性、蠕变和粘塑性也是如此。这完全是数学上的分类，因而必须说明每一种特殊类型的行为意味着什么。不可能强迫真实材料具有我们所定义的那些行为。事实上，普通的工程材料，比如钢，在常温和一定的应力范围内呈现弹性，在高频低幅振动时具有粘弹性，在高温时出现非线性蠕变，在高应变率下则呈现粘塑性行为。因而，有必要对每一种材料找出以某类特定行为为决定性特征的条件，也有必要评估所求解的具体结构问题要求的精确度的限度。在这样做的时侯，我们只处理在相应

条件下对结构行为贡献显著的那些材料特性。

这种描述材料行为的方法是唯象的，并不企图解释为什么材料具有这些行为，或更准确地说，为什么材料在一定范围内表现出某种决定性的特征。这并不意味着对变形机理的理解不重要，这些知识常常有助于建立本构关系的特殊形式，或有助于建立某些理想化行为得以成立的限制条件。

本书的目的是介绍塑性这样一种力学行为范围内的基本概念和普遍结论。我们将特别注重那些对各种形式的数学问题（即，对所讨论物体的各种构形）都通用的概念和结果，而不去关注特殊问题。基于这个理由，我们将采用能适用于一切坐标系、三维物体、板、壳以及杆系结构的符号、动力学方程和运动学方程。我们没有足够的篇幅从最基本的原理来导出这些方程，因而只好假定读者至少熟悉结构或连续体力学中的弹性分析。在下面四节中，我们将介绍四种类型的方程：平面中受载的直杆，横向受载的平板，平面应力以及用笛卡尔张量处理的三维连续体方程。这些表述将遵循同一格式，在某些情况下将逐字逐句地重复。然后，将引入更一般的符号，并具体地描述它们与上述四类问题的关系。此外，本书中所举的所有例子都将从上述四类问题中抽取。

为了控制本书的范围，首先限于那些能在有限篇幅内说清楚的问题，其次限于那些发展成熟的领域。我们将只去处理线性的动力学和运动学方程组，进而只考虑等温条件下的静态加载问题。于是我们采用经典的小位移假定，它一方面要求应变和位移梯度很小，另一方面，要求在按照初始未变形的物体构形而不是加载后的已变形的构形来写出动力学方程时，不造成明显误差。静态加载意味着所有的力学过程都进行得很慢，动力学方程中不出现加速度项。因而，"动力许可的"这个词可以替换为静力许可的。

从第二章开始，我们的任务将是为塑性本构关系构造一个普遍的框架，并讨论它对结构行为有用的内蕴含义和普遍结果。必须再次强调，这个过程包含着被我们称为塑性的这类行为的数学定义。尽管大家对塑性行为的基本特征看法是一致的，但是对于这类行为数学定义的细则并非每个学派都一致。一些作者可能宁愿采用普遍性较大，或普遍性较小的框架，或者他们采用的数学定义会导致一些小的差异。这是我们研究方法的一个必然后果，它不能说明一个独立的框架是正确的，或是错误的。某些框架可能对某一类型的问题较为适当，而对其它问题却不合适。限于篇幅，在此专著中我们不可能讨论更多的框架，仅希望能促进读者去阅读其它书籍和文献。

另一点也很重要，那就是：这个框架应使我们能够把力学行为的各种程度的理想化纳入其中。我们应该在非常普遍的条件下描述材料。但是，如果我们仅对预报结构行为的某些方面感兴趣，也希望只用到一些简单的描述。任何理论或框架，如果对于我们现有的目标提供了多于需要的信息，那么就付出的努力而言是一种浪费。特别是，明智的理想化大有益于塑性中的计算，这时无须采用完整的本构关系便可预报结构行为的许多重要特征。

1.2 杆系结构

我们先考虑一种最简单的结构元件。如图 1.1 所示之直杆，其两端承受力和力偶，沿杆长受到横向分布作用力。所有的力均位于 x-y 平面内，所有的力偶的轴线均垂直于 x-y 平面。为方便起见，两端的作用力被分解为垂直和平行于杆的分量。作用于杆的外力必须是自

相平衡的。

距A为x的横截面处的内力，即广义应力，可以通过在该截面处切断杆（见图1.2）来得到。通常，力矩M、剪力V和轴力N必须作用在切口的每一侧，以使杆的左右部分能分别保持平衡。当杆重新连接在一起时，这些作用力就消失了。应当注意到，当$x=0$时作用于切口右边的力与图1.1中杆A端受到的力等同。同样地，在$x=l$处，切口左边受到的力与图1.1中B端受力等同。

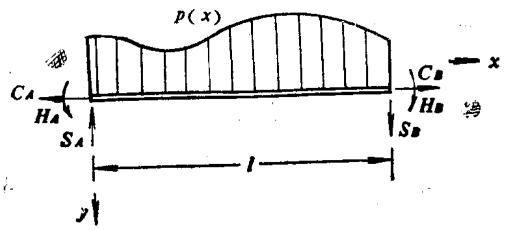

图1.1 承受外力的杆

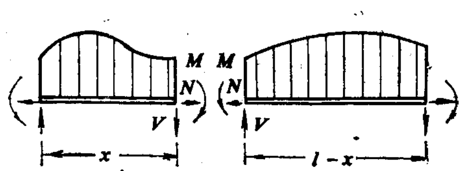

图1.2 杆中的内力

包含广义应力分量M、V、N的平衡关系可以通过考虑图1.2中杆的左部或右部的平衡来导出，或者以微分形式来写出这些分量。图1.3表示在x和$x+\mathrm{d}x$处切断而形成的一个杆单元，通过其平衡关系可以得到平衡微分方程。按照图上约定的符号规则，这些方程为

$$\frac{\mathrm{d}N}{\mathrm{d}x}=0 \tag{1-1}$$

$$V=-\frac{\mathrm{d}M}{\mathrm{d}x} \tag{1-2}$$

$$-\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}x}=\frac{\mathrm{d}^2M}{\mathrm{d}x^2}=p(x) \tag{1-3}$$

因而，N是常数。在$p(x)=0$的特殊情况下，剪力V也是常数，而M是x的线性函数。积分这些方程的边界条件为图1.1所示的作用在杆端的力。

为了描述杆的变形，有必要引入三个广义位移分量。我们用u和v来分别表示真实位移的x和y分量，用θ表示横截面的旋转。与N、V、M相关联的三个广义应变分量ε、γ和κ分别由下式给出

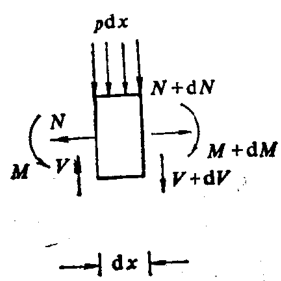

图1.3 杆中的微元

$$\varepsilon=\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} \tag{1-4}$$

$$\gamma=\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x}-\theta \tag{1-5}$$

$$\kappa=\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}x} \tag{1-6}$$

我们作一个通常的假定，即剪应变γ为零。这是本构关系的一种理想化处理，当剪力足够小时（比如在长杆中）这种理想化可以成立。将$\gamma=0$代入方程(1-5)，我们得到

$$\theta=\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x} \tag{1-7}$$

进而，代入方程(1-6)，可得

$$\kappa=\frac{\mathrm{d}^2v}{\mathrm{d}x^2} \tag{1-8}$$

我们可以用上面讨论的直杆单元组合成更复杂的结构。必须加上的附加条件仅仅是结点处力的平衡(即，杆端的力和力矩与作用在结点的外力必须矢量相加)、位移的连续（也是在矢量意义上）和转角的连续。

一个特别简单的情况是桁架。它由一组桁杆组成，其中杆件都在可以自由旋转的铰点连结。这意味着每个杆单元两端的力偶为零。如果外载仅作用于结点，每一个杆上的 $p(x)$均为零，则由方程(1-2) 和(1-3) 推出，在所有杆中 $V=M=0$。轴力N是唯一的非零广义应力分量。

在由一组杆构成的结构中，如果平衡方程(1-1)、(1-2)和(1-3) 在所有点上都被满足，且外力和结点的平衡要求也得到满足，则称广义应力分布是静力许可的。同样地，如果应变-位移方程(1-4)和(1-8)均得到满足，则广义应变和位移场是运动许可的。

静力许可场和运动许可场将满足虚功原理。因为在杆的组合中将出现各种各样的单杆坐标系，故我们将引入一个单一的空间参数 s 给结构的所有横截面定位。同样，为方便起见，引入位移矢量 $\boldsymbol{u}$（前面我们将它分解为 u 和 v 两个分量）和分布力矢量$\boldsymbol{p}(s)$，对于所作用的杆，它总处于杆的法线方向上。

假定对上述结构给定的载荷由分布载荷 $\boldsymbol{p}(s)$、作用于孤立点 $s_k(k=1,\cdots,n)$ 的集中载荷$\boldsymbol{P}(s_k)$以及集中力偶$C(s_k)$组成，这里我们把 s_k 作为结点来处理。假定我们能确定一个广义应力分布$N(s)$、$V(s)$ 和 $M(s)$，以使所有的平衡要求都得到满足。这是一个静力许可的系统。

进一步地，假定我们对这一结构能确定一系列运动许可的广义位移和广义应变 $\boldsymbol{u}^*(s)$、$\theta^*(s)$、$\varepsilon^*(s)$和$\kappa^*(s)$，即它们满足应变-位移关系(1-4) 和 (1-8) 以及结点处的全部连续性要求。我们用加星号＊来强调两个系统完全独立。运动学的量无需是载荷所引起的变形。

于是，虚功原理表明

$$\begin{aligned}&\int_S \boldsymbol{p}(s)\boldsymbol{u}^*(s)\mathrm{d}s+\sum_{k=1}^{n}\boldsymbol{P}(s_k)\boldsymbol{u}^*(s_k)+\sum_{k=1}^{n}C(s_k)\theta^*(s_k)\\&\qquad=\int_S N\varepsilon^*\mathrm{d}s+\int_S M\kappa^*\mathrm{d}s\end{aligned} \tag{1-9}$$

符号S表明积分是对整个结构进行的。

在上面描述的特殊杆系问题中，标准的结构问题是用下述方式来进行数学表述的。分布载荷$\boldsymbol{p}(s)$必须对所有 s 给出。当然，在部分结构或全部结构中可以给定 $\boldsymbol{p}(s)=0$。在以 $s_k(k=1,\cdots,n)$ 表示的结点处，必须在两个互相垂直的方向上给定$\boldsymbol{P}$的分量和 $\boldsymbol{u}$ 的分量。同样地，在每一结点处外力偶C和转角 θ 也必须给定。

如果构成结构的材料是线弹性的，广义应力和广义应变分量间最一般的线性关系具有下述形式

$$M=D_{11}\kappa+D_{12}\varepsilon,\quad N=D_{21}\kappa+D_{22}\varepsilon \tag{1-10}$$

剪力被处理为一种不影响曲率和轴向伸长的反作用力。将广义应变由 κ，ε 改变为 $\kappa+\mathrm{d}\kappa$，$\varepsilon+\mathrm{d}\varepsilon$时所做的功为

$$dW = M d\kappa + N d\varepsilon \tag{1-11}$$

与应变$\bar{\kappa}$，$\bar{\varepsilon}$相关连的应变能则为

$$W(\bar{\kappa},\bar{\varepsilon}) = \int dW = \int_0^{\bar{\kappa}} M d\kappa + \int_0^{\bar{\varepsilon}} N d\varepsilon \tag{1-12}$$

这个关系式可以被积分出来，且仅是κ、ε的函数。它必定具有二次齐次形式

$$W = A_1\kappa^2 + A_2\kappa\varepsilon + A_3\varepsilon^2 \tag{1-13}$$

由应变能函数可以直接导出应力-应变关系。由(1-12)和(1-13)可得

$$\begin{aligned} M &= \frac{\partial W}{\partial \kappa} = 2A_1\kappa + A_2\varepsilon \\ N &= \frac{\partial W}{\partial \varepsilon} = A_2\kappa + 2A_3\varepsilon \end{aligned} \tag{1-14}$$

比较方程(1-10)和(1-14)，可以看出系数D_{12}和D_{21}必定相等，因而刚度矩阵必定对称。

用同样的方式，我们可以引入一个与广义应力M、N相关连的余能函数

$$\Omega(\bar{M},\bar{N}) = \int_0^{\bar{M}} \kappa dM + \int_0^{\bar{N}} \varepsilon dN \tag{1-15}$$

对于线性相关的广义应力和广义应变，Ω也必为二次齐次形式

$$\Omega = B_1M^2 + B_2MN + B_3N^2 \tag{1-16}$$

对（1-15）式微分，并利用（1-16）式，可得

$$\begin{aligned} \kappa &= \frac{\partial \Omega}{\partial M} = C_{11}M + C_{12}N \\ \varepsilon &= \frac{\partial \Omega}{\partial N} = C_{21}M + C_{22}N \end{aligned} \tag{1-17}$$

刚度矩阵之逆——柔度矩阵也必为对称矩阵。

我们要求$W(\kappa,\varepsilon)$和$\Omega(M,N)$两者都应为其宗量的正定函数。这是一个合理的物理限制，它也保证了任意结构问题的解是唯一的。在大多数例子中，我们将限于讨论对称截面梁，梁的对称平面通过其截面中心线和加载平面的法线。

在这些情况下，施加弯矩不会引起中心线的伸长，施加轴力也不会引起曲率的改变。在方程(1-10)和(1-17)中的系数D_{12}和C_{12}因而为零，且弹性关系通常表为下述形式

$$\kappa = \frac{M}{EI}, \quad \varepsilon = \frac{N}{AE} \tag{1-18}$$

中其，E、I、A分别为材料的杨氏模量、横截面面积的惯性矩以及横截面面积。

1.3 承受轴对称横向载荷的圆形平板

在板的问题中，我们考虑的是其厚度远小于其它尺寸的薄片材料。为了讨论的需要，假设板是圆形的，载荷和支承条件是轴对称的，将采用如图1.4所示的极坐标系。

处于射线θ到$\theta+d\theta$、圆弧r到$r+dr$之间的一个小单元，将承受图1.5所示的内力或广义应力。M_r为单位长度上的径向弯矩，M_θ为单位长度上的周向弯矩。由于对称性，只出现一个单位长度上的剪力Q。单位面积的横向载荷为p，这些量仅是r的函数。考虑这个单元平衡，给出平衡微分方程为

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}(rM_r)=M_\theta-rQ_r \tag{1-19}$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}(rQ_r)=pr \tag{1-20}$$

从一开始我们就将忽略板的剪切变形，因而板的变形仅以横向位移 $w(r)$ 来 表示。广义应变为径向和周向曲率 κ_r 和 κ_θ，由下式给出

$$\kappa_r=-\frac{\mathrm{d}^2w}{\mathrm{d}r^2} \tag{1-21}$$

$$\kappa_\theta=-\frac{1}{r}\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}r} \tag{1-22}$$

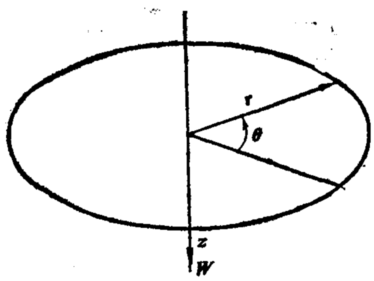

图1.4　用于轴对称板的坐标系

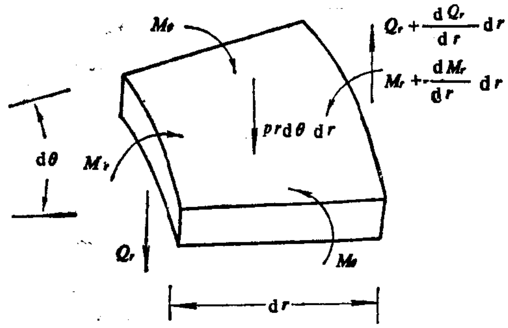

图1.5　一个轴对称板的微元

在板的任意圆形边界上，外力（横向力和径向力偶）直接由广义应力给出。如果平衡方程(1-19)和(1-20)对所有的 r 都满足，那么这一组广义应力、横向力和边界力将是静力许可的。如果应变-位移关系(1-21)和(1-22)得到满足，那么这一组曲率和位移是运动许可的。

虚功原理把任意一组静力许可量与运动许可量联系起来。对于半径为 R 的圆板，可以写出

$$2\pi\int_0^R p(r)w^*(r)r\,\mathrm{d}r+2\pi RM_r(R)\left.\frac{\mathrm{d}w^*}{\mathrm{d}r}\right|_{r=R}-2\pi RQ(R)w^*(R)$$
$$=2\pi\int_0^R(M_r\kappa_r^*+M_\theta\kappa_\theta^*)r\,\mathrm{d}r \tag{1-23}$$

在这个方程里静力许可的量与运动许可的量（用 * 表示）是互相独立的。

一个标准问题的数学提法是：给定横向载荷 $p(r)$，在板边界上给定 $M_r(R)$ 或 $\left(\frac{dw}{\mathrm{d}r}\right)_{r=R}$，给定剪力 $Q(R)$ 或 $w(R)$。会遇到两种普遍的边界条件：对简支板 $M_r(R)=0$，$w(R)=0$；对固支板 $w(R)=\left(\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}r}\right)_{r=R}=0$。

如果圆板是由各向同性的线弹性材料构成而且是均匀的，则弯矩和曲率之间具有下述关系

$$\begin{aligned}\kappa_r&=\frac{1}{D}(M_r-\nu M_\theta)\\ \kappa_\theta&=\frac{1}{D}(M_\theta-\nu M_r)\end{aligned} \tag{1-24}$$