蘇聯
機器製造百科全書

机械工業出版社

苏　　联

机器制造百科全書

机器制造百科全書編輯委員会編

第一部分

机器制造中的工程計算

第一卷

下　册

責任編輯 教授 技术科学博士 薩威林

机械工業出版社

1 9 5 6

几 点 說 明

1.本卷按原書分兩册出版，本下册共分五章。

2.鑒於專業名詞目前还沒有統一的規定，本册譯名除尽量採用較習用的和較恰当的外，並在書末附一‘中俄名詞对照表’，供讀者参考。

3.本册初稿譯就后，經由朱城同志統一校訂，並經杜庆华、解伯民同志再次审校全部譯稿。

本 册 譯 者

朱 城 章繼川 潘南鵬 陈子晴 李維揚 張直明 吳震堯

* * *

NO. 1038

1956年12月第一版 1956年12月第一版第一次印刷

787×10′2 $^1/_{16}$ 字数851千字 印張 $27^7/_8$ 插頁2 0,001—5,000册

机械工業出版社(北京东交民巷27号)出版

机械工業出版社印刷厂印刷 新华書店發行

北京市書刊出版業营業許可証出字第008号 定价(10)6.10元

本 册 著 者

教授、技术科学博士貝奇柯夫(Д. В. Бычков)；一級科学工作者、技术科学碩士基緬脫別尔格(Ф. М. Диментберг)；副教授、技术科学碩士柯洛米采夫 (А. А. Коломийцев)；工程师柯罗列夫(И. С. Королев)；工程师克拉松托維奇(Ю. Ф. Красонтович)；教授、技术科学博士普黎郭罗夫斯基(Н. И. Пригоровский)；一級科学工作者、技术科学博士尔讓尼靑 (А. Р. Ржаницын)；烏克蘭苏維埃社会主义共和国科学院院士謝联先(С. В. Серенсен)；副教授、技术科学碩士簡簡耳鮑姆(И.М.Тетельбаум)；教授、技术科学博士烏曼斯基(А. А. Уманский)。

*　　　*　　　*

科 学 編 輯

烏克蘭苏維埃社会主义共和国科学院院士謝联先(С. В. Серенсен)(第一至四章)；院士聶克拉索夫(А. И. Некрасов)(第一章)；工程师勃李揚斯基(А. С. Близнянский)(名詞和符号)。

*

圖表材料編輯：工程师卡爾干諾夫(В. Г. Карганов)

*

本册組織編輯：拉靈任斯卡婭(Б. А. Ладыженская)

編輯部主任：克魯新娜(А. Н. Клушина)

原編者的話

第一卷下册所論述的，是力学、桿件体系静力学、机械振动、材料力学和一般强度問題方面的知識。因此，本書的內容包括了在机器制造業中关於机器及結構的动力学計算和强度計算的基础知識。

由於机器运动幅度和速度的增大，溫度及压力的提高，以及各种日新月異的材料和結構形式的採用，促使我們在現代机器制造業中必須广泛地应用結構力学的各种理論方法与实驗方法。为此，本書对於彈性振动以及确定自由振动頻率的方法，給予了很大的注意，書中对於阻尼、減振等問題以及应用模型来进行振动計算等方法，也都加以闡明。

机器强度的研究必須与作用力的特性和材料机械性能的特点直接相联系。因此，本書中除去在彈性極限以內的計算以外，还闡述了在考慮机器零件的塑性变形（例如在高溫情况下發生蠕滑）时，确定其承載能力的方法。本書很注意在重复应力作用下抵抗疲乏的能力，以及結構形狀和絕对尺寸对於强度的影响；並且闡述了由我們的研究而得出的关於疲乏計算的方法。

在現代的結構中，已經很广泛地採用了薄壁構件，因此在'材料力学'一章中，也包括了計算薄壁構件的强度和稳定性的各种專用方法，这些方法是以在苏联所建立的关於这一問題的理論作为根据的。

机器零件的結構形式和受載情况的复杂性，追使我們日益更多地採取实驗方法来确定零件中所發生的实际应力。在'材料力学'一章中，我們闡述了各种确定应力的現代实驗方法，这些方法無論在机器制造厂的实驗工作或科学研究所的实驗工作中，都应当佔有适当的地位。

本書中所提供的关於确定平面桿件体系以及空間桿件体系中內力和位移的各种現代方法，保証了金屬結構計算的可靠性；这里不仅談到了分析法，而且还說明了应用模型以解决这方面問題的实驗方法。

由於目前机器制造業中所用材料的机械性能具有很广的范圍，同时零件的加工工艺对於其抵抗作用載荷的能力亦有重大的影响，这促使我們在估定强度和計算零件时，必須能够适当地应用根据材料試驗所定出的那些机械性能，同时也必須具有关於破坏条件的正确的理論概念。为此，在本書中包括了討論一般强度問題的一章，章末並附有关於应力集中以及加工工艺对於强度的影响等許多参考数据。

在本書中所提供的各种方法和数据，与本百科全書第二卷中所論述的关於机器零件的計算和設計的問題，以及在'机器設計'部分各卷中就这一問題所論述的許多專業知識，都有着直接的联系。結構材料的机械性質以及各种工艺因素对於强度的影响等方面的詳細資料，請参閱本百科全書第三卷及第四卷。

就各章节的次序、結構及內容方面进行評閱的各位人士，对本書的作者及編輯都提供

了鉅大的帮助。茲謹对下列各位的宝貴意見及指示，表示感謝：院士聶克拉索夫（А.И.Некрасов）（第一章）；教授、技术科学博士烏曼斯基（А. А. Уманский）（第二章）；教授、技术科学博士李布罗維奇（Б. Г. Либрович），技术科学碩士齐托米尔斯基（В. К. Житомирский）（第三章）；莫斯科巴烏曼高等工業学校‘材料力学’教研室以教授、技术科学博士尼古拉叶夫（Г. А. Николаев）为首的全体教师，俄罗斯苏維埃联邦社会主义共和国科学及技术功勳工作者、教授、技术科学博士季霍米罗夫（Е. Н. Тихомиров），教授、技术科学博士夏波夫（Н.П.Щапов）（第四章及第五章）。

必須特别感謝本百科全書編輯委員、烏克蘭苏維埃社会主义共和国科学院院士謝联先（С. В. Серенсен）在科学校閱方面所进行的辛劳工作。

‘机器制造百科全書’总編輯部敬請各位讀者將有关本書內容的一切批評意見和願望寄交总編輯部，以便在进一步修改本百科全書的材料时加以採用。

薩威林（М. Саверин）

目　次

第一章　普通力学

点的运动学

点的直線运动

运动規律　一点在直線上的位置，可以用这一点与直線上某一定点 O（計算距离的原点）的距离 S 來决定。距离 S 向某一个方向算作正，向另一个方向則算作負（圖 1）。

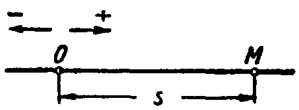

圖　1

距离 S 随时間 t 而变的关系，称为点的运动規律，即

$$S=S(t)。$$

速度　一点所經过的距离，与它經过該距离时所用的时間間隔 $\Delta t=t_2-t_1$ 之比，称为点直線运动的平均速度 v_{cp}，即

$$v_{cp}=\frac{S(t_2)-S(t_1)}{t_2-t_1}=\frac{\Delta S}{\Delta t}。$$

当 Δt 趋近零时，比值 $\frac{\Delta S}{\Delta t}$ 的極限，称为眞速度 v，或簡称为速度，即

$$v=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta S}{\Delta t}=\frac{dS}{dt}。$$

加速度　速度增量 Δv 与 Δt 之比，称为在时間間隔 Δt 內点直線运动的平均加速度 a_{cp}，即

$$a_{cp}=\frac{v(t_2)-v(t_1)}{t_2-t_1}=\frac{\Delta v}{\Delta t}。$$

当 Δt 趋近零时，比值 $\frac{\Delta v}{\Delta t}$ 的極限，称为点在瞬时 t 的眞加速度 a，或簡称为加速度，即

$$a=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta v}{\Delta t}=\frac{dv}{dt}=\frac{d^2S}{dt^2}。$$

如 v 与 a 的符号相同，則速度的絕对值逐漸增大，这种运动称为加速运动。如 v 与 a 的符号不同，則速度的絕对值逐漸減小，这种运动称为減速运动。

直線运动运动学的基本問題（当 $t=0$ 时，$S=0$，$v=v_0$）

1）已知：$S=S(t)$。求：v 及 a。

$$v=\frac{dS}{dt},\quad a=\frac{d^2S}{dt^2}。$$

2）已知：$v=v(t)$。求：S 及 a。

$$S=\int_0^t v\,dt,\quad a=\frac{dv}{dt}。$$

3）已知：$v=v(S)$。求：t 及 a。

$$t=\int_0^S\frac{dS}{v},\quad a=v\frac{dv}{dS}。$$

4）已知：$a=a(t)$。求：S 及 v。

$$v=v_0+\int_0^t a\,dt,\quad S=\int_0^t v\,dt。$$

5）已知：$a=a(S)$。求：t 及 v。

$$v=\sqrt{v_0^2+2\int_0^S a\,dS},\quad t=\int_0^S\frac{dS}{v}。$$

6）已知：$a=a(v)$。求：t 及 S。

$$S=\int_{v_0}^{v}\frac{v\,dv}{a},\quad t=\int_{v_0}^{v}\frac{dv}{a}。$$

直線运动的圖示法

1）时間-路程圖（$t-S$ 圖）（圖 2）表示 S 随时間 t 而变的关系。

自 t_1 到 t_2 的时間間隔內，点的平均速度是

$$v_{cp}=\frac{S(t_2)-S(t_1)}{t_2-t_1}=\operatorname{tg}\alpha。$$

点在瞬时 t 的眞速度是

$$v=\frac{dS}{dt}=\operatorname{tg}\beta。$$

$v_{cp}=\operatorname{tg}\alpha$ 和 $v=\operatorname{tg}\beta$ 的对比，只在 t 与 S 的比例尺相同时才有意义。

如果自位於 O 点左側單位距离处的 P 点，作直線 PC 及 PC'，对应地平行於 $t-S$ 曲線的割線及切線，則

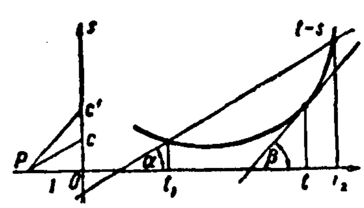

圖　2

这兩条直線在縱軸上所截割的線段 OC 及 OC' 之長度，对应地等於平均速度 v_{cp} 及眞速度 v。这一作圖方法，与所取的 t 及 S 的比例尺無关。

2)時間-速度圖（$t-v$ 圖）（圖 3）表示速度 v 随时間 t 而变的关系。

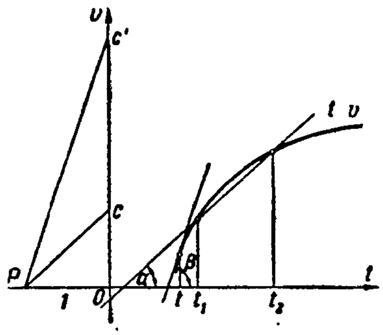

圖 3

自 t_1 到 t_2 的时間間隔內，点的平均加速度为

$$a_{cp}=\frac{v(t_2)-v(t_1)}{t_2-t_1}=\operatorname{tg}\alpha。$$

点在瞬时 t 的眞加速度为

$$a=\frac{dv}{dt}=\operatorname{tg}\beta$$

（在 t 与 v 的比例尺相等的条件下）。以速度比例尺所量得的線段 OC 及 OC' 之長度，对应地等於加速度 a_{cp} 及 a（作圖方法与前面節 1 中所示的相似）。

自 t_1 到 t_2 的时間間隔內，点所經过的距离，等於由 Ot 軸、$t-v$ 曲線及通过点 t_1、t_2 並平行於縱軸之兩直線所圍成的面積，除以乘積 n_t、n_v 所得之值，这里 n_t 为 t 比例尺之長，n_v 为 v 比例尺之長。

从 $t-v$ 圖可以作出 $t-S$ 圖（圖 4）。作連續的折線，使其各段与 $P1$、$P2$、$P3$……等諸联線平行，便得到 $t-S$ 圖如圖所示。其中 P 点是位於 O 点左側單位距离处的一点，1、2、3……諸点是 $t-v$ 圖上各平均縱座标在 $O\ v$ 軸上的投影。縱軸 S 的比例尺和速度的比例尺是相等的。这一作圖方法对於任意选擇的 t 和 v 的比例尺，均可適用。

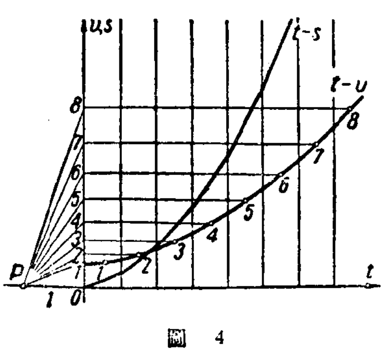

圖 4

3)距离-速度圖（$S-v$ 圖）（圖 5）表示速度 v 随距离 S 而变的关系。

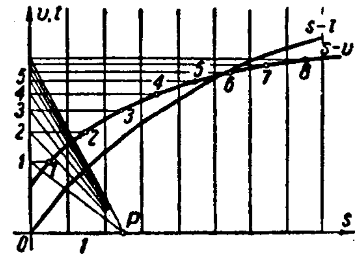

圖 5

从 $S-v$ 圖可以作出 $S-t$ 圖。作連續的折線，使其各段与 $P1$、$P2$、$P3$……等諸联線垂直，便得到 $S-t$ 圖如圖所示。其中 P 点是位於 O 点左側單位距离处的一点，1、2、3……諸点是 $S-v$ 圖各平均縱座标在 $O\ v$ 軸上的投影。这时作圖中 t 的比例尺的長度为

$$n_t=\frac{n_s}{n_v},$$

式中 n_s 为 S 的比例尺之長，n_v 为 v 的比例尺之長。

点的等速运动 如果在运动的全部时間中，点的速度固定不变，則这种运动称为等速运动。在等速运动时，点的速度 $v=\frac{S}{t}$，式中 S 为点在时間 t 內所經过的距离。

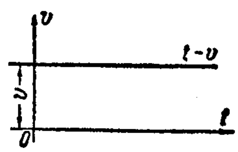

圖 6

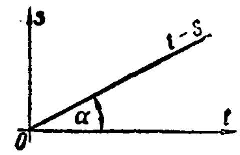

圖 7

在这一情况下，时間-速度圖（圖 6）是一条平行於 $O\ t$ 軸的直線。时間-距离圖（圖 7）是一条与 $O\ t$ 軸斜交成 α 角的直線 $S=vt$，这里 $\operatorname{tg}\alpha=v$。

点的等变速运动 如果在运动的全部时間中，点的加速度 a 固定不变，則这种运动称为等变速运动，这时假使速度的絕对值逐漸增大（v 与 a 符号相同），則称为等加速运动，假使速度的絕对值逐漸減小（v 与 a 符号不同），則称为等減速运动。

在等变速运动中，点在任意时間間隔內的平均加速度等於其眞加速度，

$$a_{cp}=a=\frac{v_2-v_1}{t_2-t_1}=\frac{v_2^2-v_1^2}{2(S_2-S_1)},$$

式中 v_1、v_2 是点在瞬时 t_1 及 t_2 的速度，S_1、S_2 是点在瞬时 t_1 及 t_2 离开計算原点的距离。

点的平均速度为

$$v_{cp}=\frac{v_1+v_2}{2}。$$

点的眞速度为

$$v=at+v_0,$$

式中 v_0 为 $t=0$ 时的速度。

点在时間 t 内所經过的距离为

$$S=\frac{at^2}{2}+v_0t=\frac{v+v_0}{2}t=\frac{v^2-v_0^2}{2a}。$$

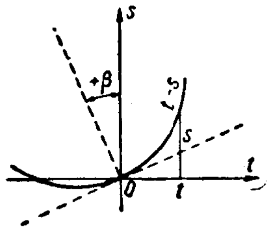

圖 8

这时时間-速度圖是一条直線 $v=at+v_0$。

时間-距离圖则是一条拋物線(圖 8)，其軸線与縱軸斜交成 β 角，而 $\mathrm{tg}\beta=v_0$。

如果忽略空气阻力，处在地球表面的物体自由降落时以加速度 $g=9.81$ 公尺/秒^{2}等加速進行。假使物体自高度 H 以等於零的初速度落下，则降落的时間 t 及降落終了时的速度 v 等於

$$t=\sqrt{\frac{2H}{g}},\quad v=\sqrt{2gH}。$$

假使物体以初速度 v 鉛垂上拋，则物体上升高度 H 及上升时間 t 等於

$$H=\frac{v^2}{2g},\quad t=\frac{v}{g}。$$

点的諧和振动運动 一点按規律

$$S=A\sin(\omega t+\varphi)$$

發生的直線运动称为諧和振动运动。这时，把点在直線运动中兩極端位置的中点取为距离 S 的計算原点 O，这样则点运动时左右方向的最大偏移相等並等於 A；O 点称为振动中心，而 A 值称为振幅。点的兩極端位置間的距离等於 $2A$，称为振动范圍。

自任一瞬时 t 开始，經过时間間隔 $T=\frac{2\pi}{\omega}$ 后，点就回复原有位置，同时具有原有速度和原有加速度。T 称为振动週期。点在一秒內的振动数 f 称为振动頻率：

$$f=\frac{1}{T}=\frac{\omega}{2\pi},$$

式中 $\omega=2\pi\times f$ 称为振动角頻率或振动圓周頻率。角 $\omega t+\varphi$ 称为振动位相；φ 称为振动初相。

点的曲線运动

运动規律。軌跡 点的运动規律确定它在任一瞬时的位置。在直角座标系中，运动規律以点的座标 x、y、z 随时間 t 而变的关系表示：

$$x=x(t),y=y(t),z=z(t),$$

或者以向量式 $\mathbf{r}=\mathbf{r}(t)$ 表示，这里 $\mathbf{r}$ 是自座标原点引出的点的向徑。

点运动时所沿的曲線称为軌跡。

軌跡方程式可以从表示点的运动規律的方程式中消去时間而得到。

点的运动規律可以用軌跡曲線 S 随时間 t 而变的关系(圖 9)表示，即，

$$S=S(t)。$$

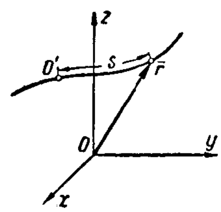

圖 9

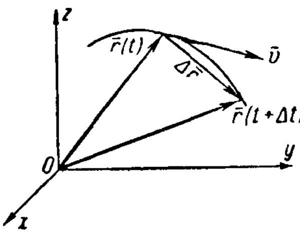

圖 10

速度 在时間間隔 Δt 内的点的平均速度可以用向量 $\mathbf{v}_{cp}$ 表示，$\mathbf{v}_{cp}$ 即等於点的位移 $\Delta\mathbf{r}$（圖 10）与 Δt 之比：

$$\mathbf{v}_{cp}=\frac{\Delta\mathbf{r}}{\Delta t}。$$

当 Δt 趋近零时，等於比值 $\frac{\Delta\mathbf{r}}{\Delta t}$ 之極限的向量 $\mathbf{v}$，称为点在瞬时 t 的眞速度，或簡称为速度：

$$\mathbf{v}=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta\mathbf{r}}{\Delta t}=\frac{d\mathbf{r}}{dt}。$$

速度在座标軸上的投影等於

$$v_x=\frac{dx}{dt},\quad v_y=\frac{dy}{dt},\quad v_z=\frac{dz}{dt}。$$

速度的数值为

$$v=\left|\frac{ds}{dt}\right|=\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2+\left(\frac{dz}{dt}\right)^2}。$$

速度的方向用速度向量与諸座标軸交角的余弦來决定：

$$\cos(\widehat{\mathbf{v},x})=\frac{v_x}{v}=\frac{\frac{dx}{dt}}{\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2+\left(\frac{dz}{dt}\right)^2}};$$

$$\cos(\widehat{\mathbf{v},y})=\frac{v_y}{v}=\frac{\frac{dy}{dt}}{\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2+\left(\frac{dz}{dt}\right)^2}};$$

$$\cos(\widehat{\mathbf{v},z})=\frac{v_z}{v}=\frac{\frac{dz}{dt}}{\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2+\left(\frac{dz}{dt}\right)^2}}。$$

加速度 在时間間隔 Δt 内的点的平均加速度可以用向量 $\mathbf{a}_{cp}$ 表示，$\mathbf{a}_{cp}$ 即等於速度增量 $\Delta\mathbf{v}=\mathbf{v}(t+\Delta t)$

$-\mathbf{v}(t)$与Δt的比(圖 11 a 及 $б$):

$$\mathbf{a}_{cp}=\frac{\mathbf{v}(t+\Delta t)-\mathbf{v}(t)}{\Delta t}=\frac{\Delta \mathbf{v}}{\Delta t}。$$

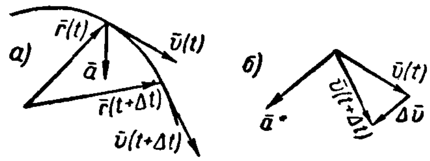

圖 11

当Δt趨近零时，等於比值$\frac{\Delta \mathbf{v}}{\Delta t}$之極限的向量$\mathbf{a}$，称为点在瞬时$t$的眞加速度或加速度:

$$\mathbf{a}=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta \mathbf{v}}{\Delta t}=\frac{d\mathbf{v}}{dt}=\frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2}。$$

加速度在座标軸上的投影为

$$a_x=\frac{d^2x}{dt^2},\quad a_y=\frac{d^2y}{dt^2},\quad a_z=\frac{d^2z}{dt^2}。$$

加速度的數值为

$$a=\sqrt{\left(\frac{d^2x}{dt^2}\right)^2+\left(\frac{d^2y}{dt^2}\right)^2+\left(\frac{d^2z}{dt^2}\right)^2}。$$

加速度的方向用加速度向量与諸座标軸交角的余弦來决定:

$$\cos(\widehat{\mathbf{a},x})=\frac{a_x}{a}=\frac{\frac{d^2x}{dt^2}}{\sqrt{\left(\frac{d^2x}{dt^2}\right)^2+\left(\frac{d^2y}{dt^2}\right)^2+\left(\frac{d^2z}{dt^2}\right)^2}};$$

$$\cos(\widehat{\mathbf{a},y})=\frac{a_y}{a}=\frac{\frac{d^2y}{dt^2}}{\sqrt{\left(\frac{d^2x}{dt^2}\right)^2+\left(\frac{d^2y}{dt^2}\right)^2+\left(\frac{d^2z}{dt^2}\right)^2}};$$

$$\cos(\widehat{\mathbf{a},z})=\frac{a_z}{a}=\frac{\frac{d^2z}{dt^2}}{\sqrt{\left(\frac{d^2x}{dt^2}\right)^2+\left(\frac{d^2y}{dt^2}\right)^2+\left(\frac{d^2z}{dt^2}\right)^2}}。$$

加速度向量$\mathbf{a}$位於軌跡的密切面內。

加速度在軌跡切線上的投影$a^{(t)}=\frac{dv}{dt}$(圖 12)，称为点的切線加速度或切向加速度。加速度在軌跡主法線上的投影$a^{(n)}=\frac{v^2}{\rho}$称为点的法線加速度；ρ为軌跡的曲率半徑。加速度在次法線上的投影等於零。

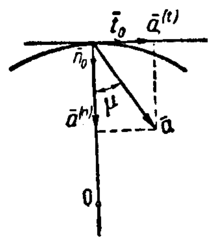

圖 12

点的总加速度为

$$\mathbf{a}=a^{(t)}\mathbf{t}_0+a^{(n)}\mathbf{n}_0=\frac{dv}{dt}\mathbf{t}_0+\frac{v^2}{\rho}\mathbf{n}_0,$$

式中 $\mathbf{t}_0$及$\mathbf{n}_0$是沿軌跡切線及主法線方向的單位向量。总加速度总是指向軌跡的凹側。

总加速度的數值为

$$a=\sqrt{\left(\frac{dv}{dt}\right)^2+\frac{v^4}{\rho^2}}。$$

如点以數值固定不变的速度作运动，則$a^{(t)}=\frac{dv}{dt}=0$。在$\rho=\infty$(軌跡的反曲点)或$v=0$諸点处，法線加速度$a^{(n)}=\frac{v^2}{\rho}$变为零。

假使速度增大($a^{(t)}>0$)，則总加速度离开主法線偏向运动方向。假使速度減小($a^{(t)}<0$)，則总加速度偏向与运动相反的方向。

主法線与总加速度間所成的μ角用下式决定:

$$\operatorname{tg}\mu=\frac{a^{(t)}}{a^{(n)}}=\frac{\rho\frac{dv}{dt}}{v^2}。$$

路程。运动时間 在自t_1到t_2的时間間隔內，点所經过的路程S为

$$S=\int_{t_1}^{t_2}v\,dt=\int_{t_1}^{t_2}\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2+\left(\frac{dz}{dt}\right)^2}\,dt。$$

点在自S_1到S_2的路程上运动的时間为

$$t=\int_{S_1}^{S_2}\frac{dS}{v(S)},$$

式中 S_1和S_2是点离开計算原点的距离。

点的平面运动。極座标中的速度和加速度 在極座标中，点的运动規律是用它的極座标r及φ随时間t而变的关系表示的，即

$$r=r(t),\ \varphi=\varphi(t)。$$

速度在極向徑方向上的投影(圖 13)为

$$v_r=\frac{dr}{dt}。$$

速度在垂直於向徑、指向φ角正值方向上的投影为

$$v_\varphi=r\frac{d\varphi}{dt}=r\omega,$$

式中 ω为向徑的轉动角速度。

总速度的數值为

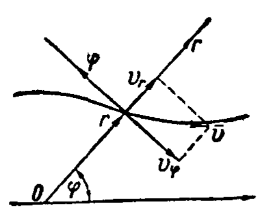

圖 13

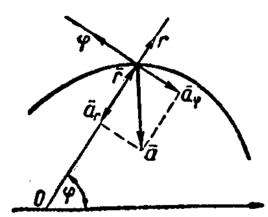

圖 14

$$v=\sqrt{v_r^2+v_\varphi^2}=\sqrt{\left(\frac{dr}{dt}\right)^2+r^2\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2}。$$

加速度在極向徑方向上的投影(圖14)为

$$a_r=\frac{d^2r}{dt^2}-r\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2。$$

加速度在垂直於向徑方向上的投影为

$$a_\varphi=r\frac{d^2\varphi}{dt^2}+2\frac{dr}{dt}\cdot\frac{d\varphi}{dt}=\frac{1}{r}\cdot\frac{d}{dt}\left(r^2\frac{d\varphi}{dt}\right)。$$

总加速度的数值为

$$a=\sqrt{a_r^2+a_\varphi^2}=$$
$$\sqrt{\left[\frac{d^2r}{dt^2}-r\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2\right]^2+\left(r\frac{d^2\varphi}{dt^2}+2\frac{dr}{dt}\times\frac{d\varphi}{dt}\right)^2}。$$

当 Δt 趋近零时，比值 $\frac{\Delta F}{\Delta t}$ 的極限称为点的面積速度；这里 ΔF 是点的向徑在时間 Δt 內所扫过的面積增量(圖 15)。

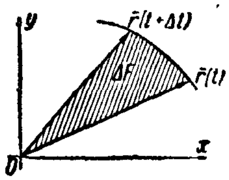

圖 15

面積速度等於

$$\frac{dF}{dt}=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta F}{\Delta t}。$$

如向徑 r 反时針向轉，面積 F 算作正，則在直角座标系中

$$\frac{dF}{dt}=\frac{1}{2}\left(x\frac{dy}{dt}-y\frac{dx}{dt}\right),$$

式中 x 及 y 为点的座标。

点的圓周运动 点的圓周运动速度为

$$v=R\omega,$$

式中 $\omega=\frac{d\varphi}{dt}$ 为自圓心引出的点之向徑的轉动角速度，而 R 为圓之半徑(圖 16)。

切線加速度为 $a^{(t)}=R\varepsilon$,

式中 $\varepsilon=\frac{d\omega}{dt}$ 为向徑的角加速度。

法線加速度为 $a^{(n)}=\frac{v^2}{R}=R\omega^2$。

总加速度的数值为

$$a=\sqrt{(a^{(t)})^2+(a^{(n)})^2}=R\sqrt{\varepsilon^2+\omega^4}。$$

当点以数值固定不变的線速度 v 作运动时，角速度值 ω 亦固定不变。这时 $\varepsilon=0$; $a^{(t)}=0$。总加速度 a 簡化成法線加速度 $a^{(n)}$，即 $a=a^{(n)}$。

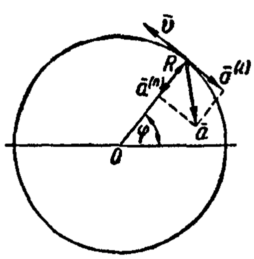

圖 16

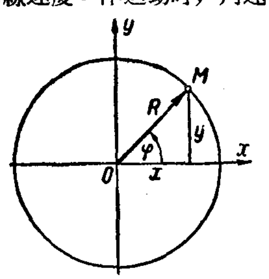

圖 17

在直角座标系(圖 17)中，速度数值固定不变的圓周运动的运动規律以下列方程式表示：

$$x=R\cos(\omega t+\varphi_0),\ y=R\sin(\omega t+\varphi_0),$$

式中 φ_0 是 $t=0$ 时 φ 角之值。

点的相对运动

点的相对运动 如有若干物体彼此相对地以任意方式运动，則某一点相对於其中一个当作基本物体的运动，有条件地称为'絕对'运动。这点相对於其他物体的运动称为相对运动。

如認为某一点 M 对於某一物体 A 的运动是'絕对'运动，則 M 点相对於 A 物体的速度 v 和加速度 a 称为'絕对'速度和'絕对'加速度。同样，如認为 M 点对於另一个本身在以任意方式相对於 A 物体作运动的 B 物体的运动是相对的，則 M 点相对於 B 物体的速度 v_0 和加速度 a_0 就称为相对速度和相对加速度。

在所給瞬时与 M 点重合的 B 物体上的一点，它相对於 A 物体的运动速度 v_n 及加速度 a_n，称为 M 点的牽連速度及牽連加速度。这时 B 物体相对於 A 物体的运动称为牽連运动。

速度的合成 一点作任何相对运动时，它的絕对速度 v 等於牽連速度 v_n 与相对速度 v_0 的几何和：

$$v=v_n+v_0。$$

加速度的合成 一点的絕对加速度 a 等於三个加速度的几何和：即牽連加速度 a_n，相对加速度 a_0 及迴轉加速度〔或哥氏(Coriolis)加速度〕a_κ 的几何和：

$$a=a_n+a_0+a_\kappa。$$

如牽連运动为平行移动(無轉动)，則 $a_\kappa=0$ 故 $a=a_n+a_0$。

迴轉加速度为

$$a_\kappa=2\omega v_0\sin(\widehat{\omega,v_0}),$$

式中 ω 为牽連运动的角速度，而角 $\widehat{\omega,v_0}$ 为牽連运动瞬时角速度向量与点的相对速度向量間的夾角。向量 a_κ 垂直於向量 ω 及 v_0。为了要得到迴轉加速度的方向，

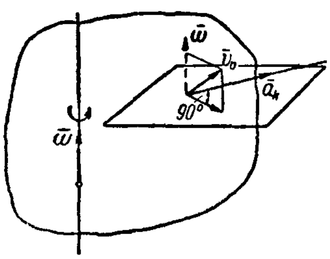

圖 18

应該把相对速度 $\mathbf{v}_0$ 在垂直於 $\boldsymbol{\omega}$ 的平面內的分量(圖18)順牽連运动的轉动方向轉过90°，这时所取的瞬时轉动軸就通过正在研究其相对运动的那一个点。

例題 垂直於 AB 的 CD 桿(圖19)以角速度 ω_1 繞 AB 軸轉动，而垂直於 CD 的 CM 桿以角速度 ω_2 繞 CD 桿轉动。

M点的相对速度 $\mathbf{v}_0$ 为

$$v_0=\omega_2 a,$$

式中 a 为 CM 桿的長度。

$$(\widehat{\mathbf{v}_0,\boldsymbol{\omega}_1})=\varphi+\frac{\pi}{2},$$

式中 φ 为 ω_1 与 CM 間的夾角。

M点的哥氏加速度 a_K 为

$$a_K=2\omega_1 v_0 \sin\left(\varphi+\frac{\pi}{2}\right)=2\omega_1\omega_2 a\cos\varphi,$$

並垂直於 $\mathbf{v}_0$ 及 $\boldsymbol{\omega}_1$，其指向如圖上所示。

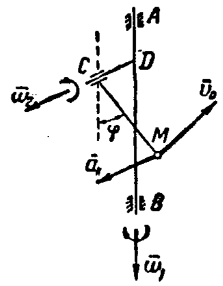

圖 19

剛体运动学

平移运动

剛体的平移运动 剛体作运动时，如果固結在剛体上的任一直線在运动中始終与本身平行，这种运动便称为剛体的平移运动。

在平移运动时，物体所有各点的軌跡都是相同的曲線。

在平移运动时，物体所有各点的速度都相同，所以物体任一点的速度可称为物体的平移速度。

剛体各点的加速度 物体上所有各点的加速度均相同，故物体任一点的加速度可称为物体平移运动时的加速度。

平移运动的合成 假使 C 物体相对於 B 物体以速度 $\mathbf{v}_{CB}$ 及加速度 $\mathbf{a}_{CB}$ 作平移运动，而 B 物体相对於 A 物体以速度 $\mathbf{v}_{BA}$ 及加速度 $\mathbf{a}_{BA}$ 作平移运动，則 C 物体相对於 A 物体也作平移运动，而其速度为

$$\mathbf{v}_{CA}=\mathbf{v}_{BA}+\mathbf{v}_{CB}$$

加速度为

$$\mathbf{a}_{CA}=\mathbf{a}_{BA}+\mathbf{a}_{CB}。$$

剛体繞固定軸的轉动

物体繞軸的轉动。轉动規律 在运动时，如果物体中的某一直線(轉动軸)始終固定不动，这种运动称作物体繞固定軸的轉动。

繞 AB 軸轉动的物体之位置(圖20)，由通过轉动軸的兩平面 α 与 β 之間的夾角 φ 决定。α 平面固定不动；β 平面固結於物体上，与物体一起运动。

物体的轉动規律用 φ 角随时間 t 而变的关系决定，即

$$\varphi=\varphi(t)。$$

角速度 自 t_1 到 t_2 的时間間隔內，物体的平均角速度为

$$\omega_{cp}=\frac{\varphi(t_2)-\varphi(t_1)}{t_2-t_1}。$$

物体的眞角速度或在瞬时 t 时的角速度为

$$\omega=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\varphi(t+\Delta t)-\varphi(t)}{\Delta t}=\frac{d\varphi}{dt}。$$

如果 $\omega>0$，則物体向 φ 角正值方向轉动；如 $\omega<0$，則物体向相反方向轉动。

假使在运动的全部时間中 $\omega=$ 常数，則轉动称为等速轉动。

在一般情况下 ω 是时間的函数。

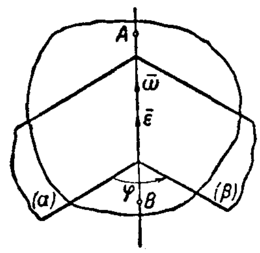

圖 20

角速度用向量 $\boldsymbol{\omega}$ 表示(圖20)，其值等於角速度 ω 的絕对值，即等於 $|\omega|$。向量 $\boldsymbol{\omega}$ 的方向沿轉动軸，如果順着向量观看，則所見物体的轉动为順时針向轉动。

角加速度 自 t_1 到 t_2 的时間間隔內，物体的平均角加速度为

$$\varepsilon_{cp}=\frac{\omega(t_2)-\omega(t_1)}{t_2-t_1}。$$

物体的眞角加速度即在瞬时 t 时的角加速度为

$$\varepsilon=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\omega(t+\Delta t)-\omega(t)}{\Delta t}=\frac{d\omega}{dt}=\frac{d^2\varphi}{dt^2}。$$

如 ω 的絕对值逐漸增大（ω 与 ε 符号相同)，这种轉动称为加速轉动；如 ω 的絕对值逐漸減小(ω 与 ε 符号不同)，这种轉动称为減速轉动。

角加速度可用向量 $\boldsymbol{\varepsilon}$ 表示(圖20)，其值等於角加速度 ε 的絕对值，其方向在 ω 与 ε 符号相同时与向量 $\boldsymbol{\omega}$ 同向，在 ω 与 ε 符号不同时与 $\boldsymbol{\omega}$ 反向。

物体各点的速度 在离轉动軸距离为 d 处物体一点的速度为

$$v=\omega d。$$

物体各点的加速度 在离轉动軸距离为 d 处一点的切向加速度 $a^{(t)}$ 为

$$a^{(t)}=d\varepsilon。$$

其法線加速度 $a^{(n)}$ 为

$$a^{(n)}=\frac{v^2}{d}=d\omega^2。$$

总加速度則为

$$a=\sqrt{(a^{(t)})^2+(a^{(n)})^2}=d\sqrt{\varepsilon^2+\omega^4}。$$

当 $\omega=$ 常数时，

$$\varepsilon=0;a^{(t)}=0;a=a^{(n)}=d\omega^2。$$

φ、ω、ε 及 t 間的基本关系（当 $t=0$ 时；$\varphi=0$，$\omega=\omega_0$）

1）已知：$\varphi=\varphi(t)$。求：ω 及 ε。

$$\omega=\frac{d\varphi}{dt},\quad \varepsilon=\frac{d^2\varphi}{dt^2}。$$

2）已知：$\omega=\omega(t)$。求：φ 及 ε。

$$\varphi=\int_0^t\omega\,dt,\quad \varepsilon=\frac{d\omega}{dt}。$$

3）已知：$\omega=\omega(\varphi)$。求：t 及 ε。

$$t=\int_0^\varphi\frac{d\varphi}{\omega},\quad \varepsilon=\omega\frac{d\omega}{d\varphi}。$$

4）已知：$\varepsilon=\varepsilon(t)$。求：$\varphi$ 及 ω。

$$\omega=\omega_0+\int_0^t\varepsilon\,dt,\quad \varphi=\int_0^t\omega dt。$$

5）已知：$\varepsilon=\varepsilon(\varphi)$。求：$t$ 及 ω。

$$\omega=\sqrt{\omega_0^2+2\int_0^\varphi\varepsilon\,d\varphi},\quad t=\int_0^\varphi\frac{d\varphi}{\omega}。$$

6）已知：$\varepsilon=\varepsilon(\omega)$。求：$t$ 及 φ。

$$\varphi=\int_{\omega_0}^{\omega}\frac{\omega\,d\omega}{\varepsilon},\quad t=\int_{\omega_0}^{\omega}\frac{d\omega}{\varepsilon}。$$

由於物体作轉动运动时，φ、ω、ε 及 t 間的关系，与点作直線运动时 S、v、a 及 t 間的关系完全相同，因此点作直線运动时的圖示方法，完全適用於物体的轉动运动。

剛体的等速轉动 以固定不变的角速度所作的轉动称为等速轉动。

在等速轉动时，任一时間間隔內的平均角速度 ω_{cp} 都等於眞角速度 ω：

$$\omega_{cp}=\omega=\frac{\varphi}{t},$$

式中 φ 是物体在时間 t 內轉过的轉角。

剛体的等变速轉动运动 凡角加速度固定不变的这种运动，称为等变速轉动运动。

假使角速度的絕对值逐漸增大（ω 与 ε 符号相同），这种轉动称为等加速轉动，假使角速度值逐漸減小（ω 与 ε 符号不同），則称为等減速轉动。

在等变速轉动时，任一时間間隔內的平均角加速度 ε_{cp} 等於眞角加速度，即

$$\varepsilon_{cp}=\varepsilon=\frac{\omega_2-\omega_1}{t_2-t_1}=\frac{\omega_2^2-\omega_1^2}{2(\varphi_2-\varphi_1)},$$

式中 ω_1、ω_2 及 φ_1、φ_2 为在瞬时 t_1 及 t_2 时的角速度和轉角。

自 t_1 到 t_2 时間間隔內的平均角速度为

$$\omega_{cp}=\frac{\omega_1+\omega_2}{2}。$$

在瞬时 t 时的眞角速度为

$$\omega=\varepsilon t+\omega_0,$$

式中 ω_0 为 $t=0$ 时的 ω 值。

轉角 φ 等於，

$$\varphi=\frac{\varepsilon t^2}{2}+\omega_0 t=\frac{\omega+\omega_0}{2}t=\frac{\omega^2-\omega_0^2}{2\varepsilon}。$$

剛体的平面平行运动

剛体的平面平行运动 物体运动时，如果所有各点都平行於某一固定平面而运动，則这种运动称为剛体的平面平行运动。物体內在垂直於这个平面的任一直線上的各点，其运动均相同。在已知与固定平面平行的任一个在物体內的平面上各点之运动后，就能完全决定整个物体的运动。所以，物体平面平行运动的研究，归結到对平面圖形在其平面內的运动之研究。

令 $x'O'y'$ 及 xOy 相应地为在固定平面內和在固結於运动着的平面圖形之平面內的直角座标軸系（圖21）。平面圖形的位置，决定於活动原点 O 的座标 x'_O、y'_O 和 $O'x'$ 軸与 Ox 軸間的夾角 φ。

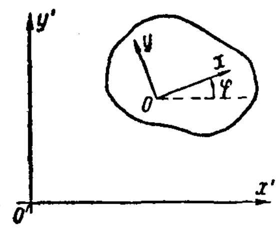

圖 21

平面圖形的运动規律，以 x'_O、y'_O 及 φ 隨时間而变的关系表示，即

$$x'_O=x'_O(t);\ y'_O=y'_O(t);\ \varphi=\varphi(t)。$$

平面圖形上其座标为 x 及 y 之任意一点的运动規律为

$$x'(t)=x'_O+x\cos\varphi(t)-y\sin\varphi(t);$$

$$y'(t)=y'_O+x\sin\varphi(t)+y\cos\varphi(t)。$$

瞬时轉动中心。各点的速度。瞬时中心軌跡 在时間間隔 Δt 內平面圖形在其平面中的任何位移，都可以借平面繞某一称为有限轉动中心的中心点轉过一 $\Delta\varphi$ 角而得到。当 Δt 趋近零时有限轉动中心的極限位置，称为平面圖形的瞬时轉动中心。当 Δt 趋近零时，比值

$\frac{\Delta\varphi}{\Delta t}$的極限称为平面圖形的瞬时角速度 ω：

$$\omega=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta\varphi}{\Delta t}。$$

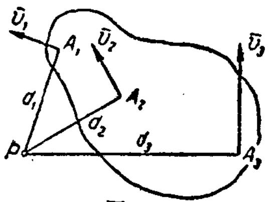

圖　22

在任一瞬时，瞬时轉动中心的速度都等於零。

圖形的瞬时运动，就是它以瞬时角速度 ω 繞瞬时轉动中心 P 所作的轉动(圖 22)。

A_1、A_2、A_3、……各点的速度，其方向沿 PA_1、PA_2、PA_3、……各線段的垂線方向，其大小則相应地等於 $v_1=\omega d_1$、$v_2=\omega d_2$、$v_3=\omega d_3$、……，这里 d_1、d_2、d_3 是各点离中心 P 的距离。

如果已知圖形上兩点 A 和 B 的速度方向，則瞬时轉动中心就是自 A 点和 B 点所作垂直於它們的速度方向之兩直線的交点(圖 23)。

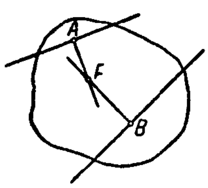

圖　23

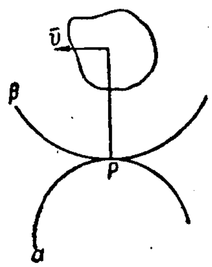

圖　24

各个瞬时轉动中心在固定平面上的几何位置，称为定瞬时中心軌跡(曲線 α)(圖 24)。各个瞬时轉动中心在运动的平面上的几何位置，称为动瞬时中心軌跡(曲線 β)。圖形的运动，在几何上就相当於动瞬时中心軌跡沿着定瞬时中心軌跡作無滑动的滚动。兩瞬时中心軌跡在瞬时轉动中心处相切。如果要考慮固定平面相对於运动的平面的运动（运动的反演)，則瞬时中心軌跡 β 將是固定的，而瞬时中心軌跡 α 在运动着。

由圖形中 A 点的速度和 B 点速度的方向，可决定圖形內任一点 C 的速度(圖 25)。

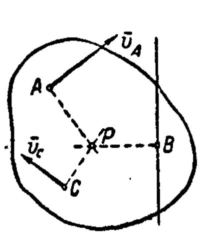

圖　25

A 点与 B 点兩速度方向的垂線之交点，决定瞬时轉动中心 P 的位置。由於 $\omega=\frac{v_A}{PA}$，故可求得：$v_C=\omega\times PC=v_A\frac{PC}{PA}$，速度 v_C 垂直於直線 PC 並指向轉动方向。

如 A、B 兩点的速度方向平行(圖 26a 及 $б$)，則在决定圖形各点速度时，必須已知这兩点速度的大小和指向。这时，瞬时轉动中心 P 位於通过这兩点速度向量起点及終点之兩直線的交点处。

如果 A 点与 B 点的速度相等，即 $v_A=v_B$，則瞬时轉动中心在無限远处。这时圖形作平行移动，即無轉动。

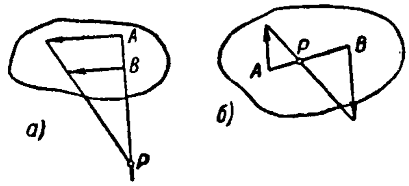

圖　26

平面圖形上線段 AB 的兩个端点的速度，在線段方向上的投影彼此相等(圖 27)，即 $\mathbf{BB}'=\mathbf{AA}'$。

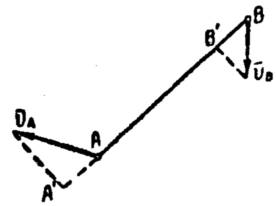

圖　27

根据这一定理，我們可用圖解方法來求出圖形上各点的速度。設已知：A 点速度 $\mathbf{v}_A$ 和 B 点速度方向(圖 28)。

自 C 点作向量 $\mathbf{CC}'$，等於速度 $\mathbf{v}_A$ 在 $\mathbf{CA}$ 上的投影 $\mathbf{AA}'$。自 C' 点所作的垂直於 AC 的垂線，在过 C 点所作的垂直於 PC 的垂線上所截的線段 $\mathbf{CC}''=\mathbf{v}_C$。

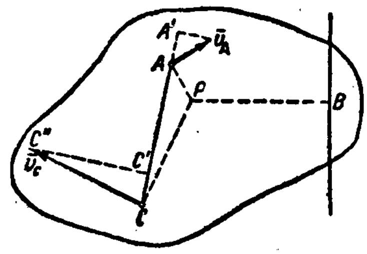

圖　28

平面圖形的运动，可以由以圖形任意一点 O 为原点，其軸平行於固定系 $x'O'y'$ 的座标系 $x''Oy''$ (圖 29) 的平移运动，以及圖形对於座标系 $x''Oy''$ 以角速度 $\omega=\frac{d\varphi}{dt}$ 所作的轉动(圖形相对於 O 点的轉动)，这兩种运动的合成來代表。角速度 ω 与 O 点的选择無关，並等於圖形繞瞬时轉动中心轉动的角速度。

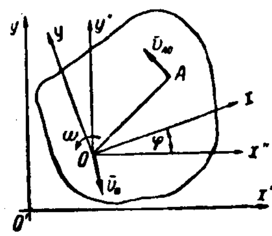

圖　29

角速度 ω 以通过 O 点、垂直於平面圖形的向量 $\boldsymbol{\omega}$ 表示。

圖形任意一点 A 的速度，由圖形 O 点的速度 $\mathbf{v}_O$ 与圖形繞 O 点轉动时 A 点的速度 $\mathbf{v}_{AO}$ 合成，即

$$\mathbf{v}_A=\mathbf{v}_O+\mathbf{v}_{AO}。$$

速度 $\mathbf{v}_{AO}$ 之值等於 $v_{AO}=\omega\cdot AO$。

各点的加速度。瞬时加速度中心 圖形任意一点 A 的加速度 $\mathbf{a}_A$，由圖形 O 点的加速度 $\mathbf{a}_O$ 和圖形繞 O 点轉动时 A 点的加速度 $\mathbf{a}_{AO}$ 組成(圖 30)，即

$$\mathbf{a}_A=\mathbf{a}_O+\mathbf{a}_{AO};$$

$$\mathbf{a}_{AO}=\mathbf{a}^{(t)}{}_{AO}+\mathbf{a}^{(n)}{}_{AO},$$

式中 $\mathbf{a}^{(t)}{}_{AO}$ 为加速度 $\mathbf{a}_{AO}$ 的切線分量，而 $\mathbf{a}^{(n)}{}_{AO}$ 为加速度 $\mathbf{a}_{AO}$ 的法線分量；

$$a^{(t)}{}_{AO}=OA\frac{d\omega}{dt}=OA\times\varepsilon,$$

式中 $\varepsilon=\frac{d\omega}{dt}$ 为圖形的角加速度（ε 与 O 点的选擇無关）❶，而

$$a^{(n)}{}_{AO}=OA\times\omega^2。$$

在所給瞬时，圖形上总加速度等於零的一点，称为瞬时加速度中心。

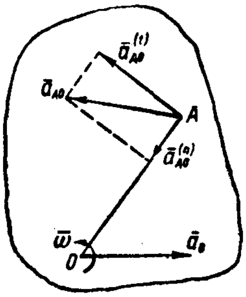

圖 30

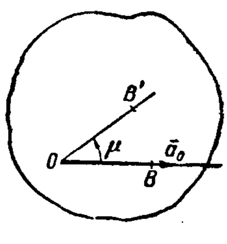

圖 31

要决定瞬时加速度中心的位置，可以从 O 点在 $\mathbf{a}_O$ 方向引一線段 $OB=\frac{a_0}{\sqrt{\varepsilon^2+\omega^4}}$(圖 31)，並將 OB 轉过一 μ 角使成为 OB'，$\mathrm{tg}\,\mu=\left|\frac{\varepsilon}{\omega^2}\right|$，当 ε 与 ω 符号相同时，將 OB 按物体的轉动方向轉过 μ 角，如果符号不同，則向轉动的相反方向轉过 μ 角。这样得到的 B' 点就是瞬时加速度中心。

剛体繞定点的运动

物体繞定点的运动 为了要决定具有一个固定点 O 的物体的位置(圖 32)，选擇一个固定直角座标系 $Ox'y'z'$ 和一个运动(固結於物体)直角座标系 $Oxyz$。物体的位置决定於平面 $x'Oy'$ 及 xOy 之交線 OK 軸与 Ox 軸之間的夾角 φ、Ox' 軸与 OK 軸之間的夾角 ψ、以及 Oz' 軸与 Oz 軸之間的夾角 θ。角 φ、ψ 和 θ 称为欧拉(Euler)角。

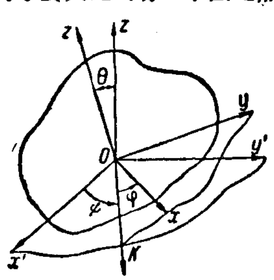

圖 32

物体的运动規律，决定於欧拉角随时間而变的关系：

$$\varphi=\varphi(t),\ \psi=\psi(t),\ \theta=\theta(t)。$$

瞬时轉动軸。瞬时軸軌跡面。瞬时角速度 具有一个固定点的剛体，它在自 t 到 $t+\Delta t$ 的时間間隔內的位移，可以借繞某一軸旋轉过一 $\Delta\Omega$ 角而得到。这个軸在 $\Delta t\to 0$ 时的極限位置，称为物体的瞬时轉动軸。

当 Δt 趋近零时，比值 $\frac{\Delta\Omega}{\Delta t}$ 的極限称为物体的瞬时角速度：

$$\omega=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta\Omega}{\Delta t}=\frac{d\Omega}{dt}。$$

在每一瞬时，物体以瞬时角速度 ω 繞瞬时轉动軸 α 轉动(圖 33)。

各个瞬时轉动軸的几何位置在固定座标系中構成一曲面 A，称为定瞬时軸軌跡面（圖 33)。各个瞬时轉动軸的几何位置在运动物体自身中構成一曲面 B，称为动瞬时軸軌跡面。

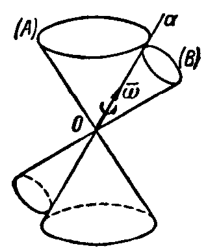

圖 33

物体的运动在几何上就相当於动瞬时軸軌跡面沿着定瞬时軸軌跡面作無滑动的滚动。这兩个瞬时軸軌跡面沿瞬时轉动軸相切。

瞬时角速度以向量 $\boldsymbol{\omega}$ 表示，其數值等於 $|\omega|$，它的方向沿轉动軸，如果順着向量观看，則可見物体的轉动为順时針向轉动。

物体的角速度在活动座标系各軸上的投影 ω_x、ω_y、ω_z 可以按照欧拉角 φ、ψ、θ，用欧拉运动方程式表示之，即

$$\omega_x=\frac{d\psi}{dt}\sin\theta\sin\varphi+\frac{d\theta}{dt}\cos\varphi;$$

$$\omega_y=\frac{d\psi}{dt}\sin\theta\cos\varphi-\frac{d\theta}{dt}\sin\varphi;$$

$$\omega_z=\frac{d\psi}{dt}\cos\theta+\frac{d\varphi}{dt}。$$

各点速度在原点为固定点的活动座标軸上的投影，可以用公式表示为

$$v_x=\omega_y z-\omega_z y,\ v_y=\omega_z x-\omega_x z,\ v_z=\omega_x y-\omega_y x,$$

上式中 x、y、z 是点的座标。

---

❶ 角加速度 ε 由通过 O 点並在平面圖形垂直方向的向量 $\boldsymbol{\varepsilon}$ 表示。

我們通常採用符号 p、q、r 來代替 ω_x、ω_y、ω_z，即令 $p=\omega_x$、$q=\omega_y$、$r=\omega_z$。

如果物体以数值固定不变的角速度 $\boldsymbol{\omega}_2$ 繞通过固定点 O 的一軸轉动（圖 34a 及 $б$），而这个軸以固定不变的角速度 $\boldsymbol{\omega}_1$ 繞通过同一固定点的另一軸轉动，則物体所作的合运动称为正規進动。

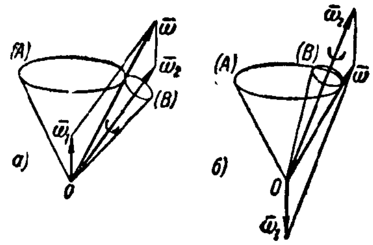

圖 34

这种运动的定瞬时軸軌跡面和动瞬时軸軌跡面相应为圓錐面（A）和（B），而物体在每一瞬时均以角速度 $\boldsymbol{\omega}=\boldsymbol{\omega}_1+\boldsymbol{\omega}_2$ 繞这兩个圓錐面的公共母線轉动。

如果向量 $\boldsymbol{\omega}_1$ 与 $\boldsymbol{\omega}_2$ 之間的夾角是銳角，則進动称为正進动；这时活动圓錐面从外側与固定圓錐面相切（圖34a）。如果 $\boldsymbol{\omega}_1$ 与 $\boldsymbol{\omega}_2$ 之間的夾角是鈍角，則活动圓錐面从內側与固定圓錐面相切（圖34$б$）；这时進动称为反進动。

物体的瞬时角加速度。物体各点的加速度 繞固定点 O 运动的物体的瞬时角加速度可以用向量 $\boldsymbol{\varepsilon}$ 表示（圖35），它等於当 Δt 趋近零时比值 $\frac{\Delta\omega}{\Delta t}$ 的極限值，即

$$\boldsymbol{\varepsilon}=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta\omega}{\Delta t}。$$

任意一点 M 的加速度 $\mathbf{a}$ 由兩个分量 $\mathbf{a}_\omega$ 和 $\mathbf{a}_\varepsilon$ 組成（圖 36）：

$$\mathbf{a}=\mathbf{a}_\omega+\mathbf{a}_\varepsilon。$$

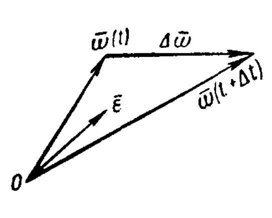

圖 35

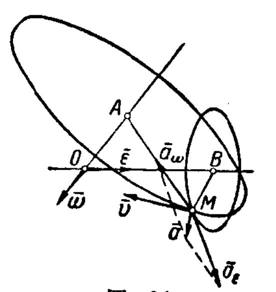

圖 36

分量 $\mathbf{a}_\omega$ 称为加速度的向心分量，其方向沿垂直於轉动軸的直線並指向轉动軸。分量 $\mathbf{a}_\varepsilon$ 称为加速度的轉动分量，其方向沿以 B 为圓心的圓周切線方向，B 位於沿向量 $\boldsymbol{\varepsilon}$ 方向的直線上且 $BM\perp\boldsymbol{\varepsilon}$。分量 $\mathbf{a}_\varepsilon$ 的指向为在順着 $\boldsymbol{\varepsilon}$ 观看时，所見向量 $\mathbf{a}_\varepsilon$ 之轉动为順时針向[1]。

向心加速度之值 $a_\omega=\omega^2\times AM=\frac{v^2}{AM}$，这里 v 是点的速度。

轉动加速度之值为

$$a_\varepsilon=\varepsilon\times BM。$$

剛体运动的一般情况

剛体的一般运动 剛体在自 t 到 $t+\Delta t$ 的时間間隔內的任何位移，都可以把剛体沿某一軸平移一向量 $\Delta\mathbf{v}$，再繞該軸轉过一角 $\Delta\Omega$ 而得到[2]。

这軸在 $\Delta t\to 0$ 时的極限位置称为瞬时轉动滑动軸。

在每一瞬时，物体的运动就是物体沿瞬时滑动-轉动軸以平移速度 $\mathbf{v}=\lim\limits_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta\mathbf{v}}{\Delta t}$ 的滑动加上繞这軸以角速度 $\boldsymbol{\omega}=\lim\limits_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta\Omega}{\Delta t}$ 的轉动。

各瞬时滑动-轉动軸的几何位置在固定物体中構成一曲面（A），称为定瞬时軸軌跡面。各瞬时滑动-轉动軸的几何位置在运动物体本身中構成一曲面（B），称为动瞬时軸軌跡面。兩瞬时軸軌跡面沿瞬时滑动-轉动軸 α 相切（圖 37）。物体所作的运动犹如动瞬时軸軌跡面（B）沿 α 軸順定瞬时軸軌跡面（A）作有滑动的滾动。

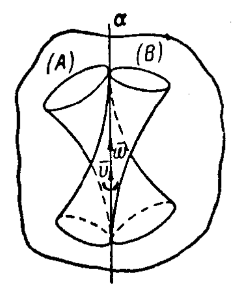

圖 37

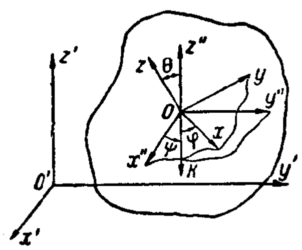

圖 38

如取直角座标系 $Ox''y''z''$，其軸平行於固定座标系 $O'x'y'z'$ 的各軸，其原点为物体中任意一点 O（圖38），則物体相对於座标系 $O'x'y'z'$ 的运动是由座标系 $Ox''y''z''$ 的牽連平移运动和物体对於座标系 $Ox''y''z''$ 的相对运动（繞 O 点的轉动）組成的。

物体的运动規律，用活动原点的座标 x'_O、y'_O、z'_O 以及决定物体相对於座标系 $Ox''y''z''$ 之位置的角 φ、ψ、θ，随时間 t 而变的关系來表示，即

[1] $\mathbf{a}_\varepsilon$ 的指向規則与 $\boldsymbol{\omega}$ 的指向規則符合。

[2] 轉过的角 $\Delta\Omega$ 可用向量 $\Delta\Omega$ 表示，其值等於轉角，其方向沿轉动軸，当順着向量观看时，所見物体的轉动为順时針向轉动。