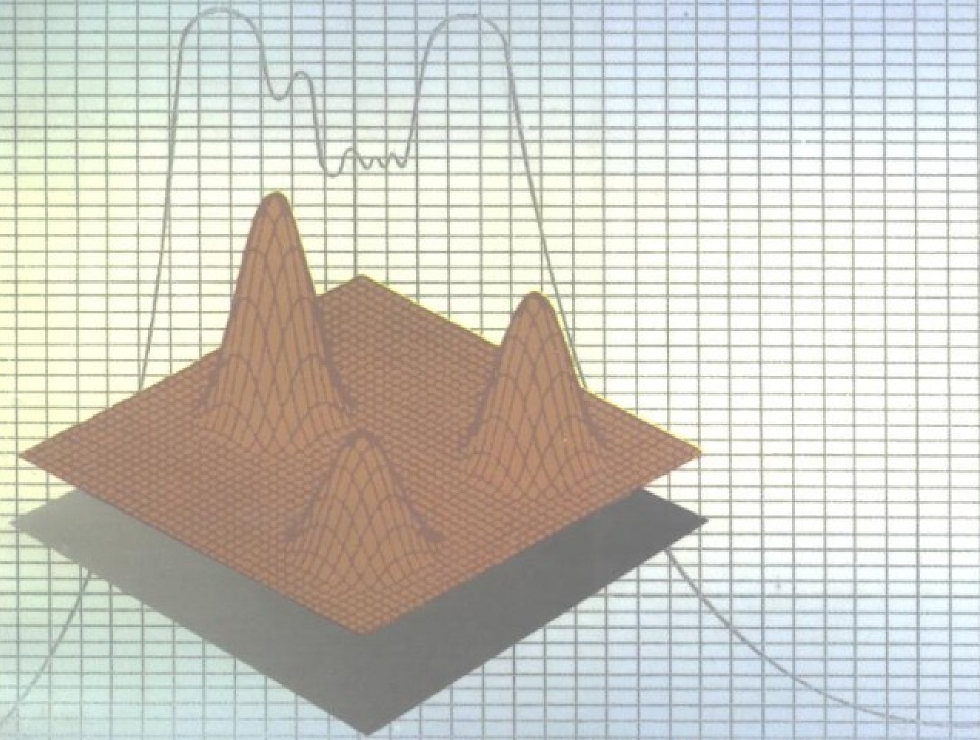
科学与工程计算丛书

代数特征值反问题

DAISHU TEZHENGZHI FANWENTI



周树荃　戴华　编著

河南科学技术出版社

SECS

科学与工程计算丛书

代数特征值反问题

周树荃　戴　华　编著

河南科学技术出版社

科学与工程计算丛书

代数特征值反问题

周树荃　戴　华　编著

责任编辑　赵中胜

河南科学技术出版社出版发行

国防科学技术大学印刷厂印刷

850×1168毫米　32开本　13.25印张　311千字

1991年6月第1版　　1991年6月第1次印刷

印数 1—1500册

ISBN 7-5349-0733-0/T·733

定价：6.50元

代　　序

为促进我国科学与工程计算事业的发展，1988年7月，中国核学会计算物理学会在青岛举办了全国计算物理学术研讨会，会议期间，经有关专家商议，决定出版一套《科学与工程计算丛书》，得到了许多著名科学家的热情关心和支持．经过两年多的筹备，正式开始了这套丛书的编辑出版工作．

计算机是一种延伸、强化人的思维的工具．当世界上第一台计算机 ENIAC 诞生时，冯·诺伊曼就预言这一新工具所拥有的巨大潜力和对人类社会的深远影响．在过去的40多年里，计算机迅猛发展，其应用范围从国防尖端部门扩大到科学技术和国民经济建设的各个领域，计算机已经给人类社会带来了一场深刻的技术革命，计算机的发展和计算方法的进步极大地提高了人们的计算能力，从而引起了科学方法论上的巨大变革，使计算成为科学研究的第三手段，对研究的定量化起到了特殊重要的作用．"实验、理论、计算"三位一体是现代科学研究的基本模式，三者既相对独立，又互相补充，互相依赖．人们在计算机上可充分利用数值计算来模拟现实世界的各种过程，部分替代实验或作为实验的补充，检验理论模型的正确性，尤其是还能呈现现实生活中无法重复或无法进行实验的现象，或模拟耗资巨大的实验工程，探索新的奥秘．由于有了计算这一强有力的手段，大大增强了人们科学研究的能力，促进了不同学科之间的交叉渗透，缩短了基础研究到应用开发的过程，加速了把科学技术转化为生产力的进程．

在计算机的发展和数值计算的广泛应用的推动下，科学与工程计算（简称科学计算）作为一门工具性、方法性和边缘交

叉性的新学科，已经开始了自己的发展．它既包含了在各种科学与工程领域中逐步发展起来的计算性学科分支，如计算数学、计算物理、计算力学、计算化学以及计算地震学等计算工程学，又包括经济科学、医学、生物学和系统科学等发展中所需要的计算理论．计算方法则是它们联系的纽带和共性的基础．科学计算就其本质而言，是要解决现代科学与工程中提出的大规模、非线性、非均匀和几何形状非规则的复杂问题，是数学理论和计算艺术的高度结合，是复杂系统的数值计算或模拟．计算机的性能与算法水平的乘积是衡量计算能力高低的指标．

我国在科学与工程计算领域已有了一支较高水平的、能打硬仗的队伍．这支队伍在我国计算机水平相对落后的条件下，以其智力优势和拼搏精神为我国的国防建设和经济建设作出了重大贡献，积累了丰富的实践经验，急需加以总结、提高、推广和交流．编写《科学与工程计算丛书》，正是为了适应这种形势的需要，它的出版将会填补我国这方面的空缺．

这套丛书是采用“众人拾柴火焰高”的集资方式创办的，由于丛书的涉及面极广，故不设主编，由常务编委轮流担任执行主编．丛书作者都是奋战在教学和科研第一线的专家学者，他们为发展我国的科技事业不辞劳苦，呕心沥血，无私奉献．谨向他们表示崇高的敬意．

可以期望，《科学与工程计算丛书》的出版发行，必将有力地推动我国科学计算事业的发展．

《科学与工程计算丛书》编委会

1990年8月

前　言

代数特征值反问题（亦称矩阵特征值反问题）就是研究如何根据特征值、特征向量等信息（有时附加某些限制条件），确定矩阵的元素．这个课题的研究，不仅充实和丰富了矩阵理论和方法，而且在结构动力学、自动控制理论、分子光谱学、核物理学、结构设计与动态分析等许多领域都具有重要的应用．因此，这个问题在国内外引起了广泛的兴趣，日益为人们所重视．

代数特征值反问题的理论及主要结果是在最近30年里得到的．特别是近十多年来，随着各种科学与工程计算问题的深入与扩大，代数特征值反问题又有许多新的进展。当然，也还存在不少问题有待于进一步研究探索．

本书是从计算数学的角度，利用代数和分析方法，比较全面、系统地阐述各种类型的代数特征值反问题及其主要结果．

本书除了介绍必要的预备知识之外，重点在于阐述各种类型的代数特征值反问题．在内容上，力求向读者展示代数特征值反问题中最基本、最重要的理论、方法、技巧以及若干新的进展，并对所述结果给出完整的、严格的数学论证．书中各章后都作了文献注释(第1章除外)，并附有详细的参考文献目录．

作者感谢南京航空学院领导的支持和数理力学系一些同事的帮助，感谢南京航空学院吕炯兴教授对书稿认真仔细的审阅．

欢迎读者对本书提出批评指正。

作　者

1990年春于南京

目　录

第一章 引 言

1.1 反问题

数学中有各种各样的反问题（也称逆问题）．例如，计算$6+5=11$是一个求和问题（也称正问题），它的反问题是求两个数使它们之和等于11；求不定积分是求导数的反问题，等等．一般说来，反问题要比正问题复杂，而且反问题的解往往带有某种程度的不适定性．如果要求反问题的确定的解，则需要附加一些限制条件．例如，上面求和问题的反问题有无穷多个解，如果限制要求两个正整数之差的绝对值最小，则上述求和反问题的唯一解为(6, 5)（由于加法具有交换律，所以可不考虑两个数的次序）．

在数学物理问题中，人们根据给定系统的方程式和定解条件求系统的变化状态称为正问题；另一类是在给定的方程式下，从方程的解或解的某些部分或附加一些其它条件，反过来求方程的系数、边界条件等，这就是数学物理反问题．例如，著名的Sturm-Liouville问题的反问题就是利用特征值或/和特征函数确定Sturm-Liouville方程的系数及边界条件．

在数值代数中，已知一个矩阵，求其特征值或/和特征向量称为代数特征值问题（又叫矩阵特征值问题）．代数特征值反问题（又称矩阵特征值反问题或代数逆特征值问题），就是在

一定的限制条件下，求矩阵使其具有预先给定的特征值或/和特征向量.

代数特征值反问题的来源非常广泛. 它不仅来自对数学物理反问题的离散化，而且来自固体力学、粒子物理、量子力学、结构设计、系统参数识别、自动控制等许多领域. 数值代数自身也提出一些代数特征值反问题，例如，在求解线性代数方程组$Ax=b$的一些迭代法收敛性研究中，就要寻找一个非奇异矩阵D，使矩阵$D^{-1}AD^{-1}$的条件数最小，这本质上可以作为代数特征值反问题[1].

1.2 代数特征值反问题的提法

代数特征值反问题由于所给条件不同或应用背景不同而有各种各样的提法. 现列举一些如下：

1. **加法问题**

给定矩阵A，求一个对角矩阵D使$A+D$具有事先给定的特征值. 例如，Sturm-Liouville问题的反问题离散化导出加法问题[2,3].

2. **乘法问题**

给定矩阵A，求一个对角矩阵D使DA具有事先给定的特征值. 例如，对复合摆的研究导致乘法问题[4].

3. **含参数的特征值反问题**

设$A(c)=A(c_1,\cdots,c_m)$为n阶矩阵，其元素为m个参数$c_1\cdots$，c_m的解析函数，求$c=(c_1,\cdots,c_m)$，使矩阵$A(c)$具有事先给定的特征值. 在粒子物理中，壳模型计算将遇到含参数的特征值反问题[5]，在分子光谱学研究中也遇到这类问题[6].

4. **Jacobi矩阵、实对称带状矩阵特征值反问题**

给定若干组特征值或若干个特征值及相应的特征向量，构

造Jacobi矩阵或实对称带状矩阵使其满足所给条件．例如，多自由度弹簧—质点系统的物理参数识别就归结为Jacobi矩阵特征值反问题[7]；梁振动系统的物理参数识别导致对称五对角矩阵特征值反问题[8]．

5．谱约束下矩阵的最佳逼近问题

给定若干个特征值及相应的特征向量和一个矩阵 $\tilde{A}$，求一个矩阵 A，使 A 具有事先给定的特征值及特征向量并且与 $\tilde{A}$ 最“接近”．结构振动系统的校正将遇到谱约束下矩阵的最佳逼近问题[9]；有限元模型的修正、自动控制系统的复原等都遇到这类问题[10]．

6．极点配置问题

状态反馈极点配置问题：给定矩阵 $A\in \boldsymbol{R}^{n\times n}$，$B\in \boldsymbol{R}^{n\times m}$，求矩阵 $F\in \boldsymbol{R}^{m\times n}$，使矩阵 $A+BF$ 具有事先给定的特征值．

输出反馈极点配置问题：给定矩阵 $A\in \boldsymbol{R}^{n\times n}$，$B\in \boldsymbol{R}^{n\times m}$，$C\in \boldsymbol{R}^{p\times n}$，求矩阵 $K\in \boldsymbol{R}^{m\times p}$，使矩阵 $A+BKC$ 具有事先给定的特征值．

在线性控制系统中，根据结构控制的稳定性要求，设计系统的状态反馈或输出反馈，将遇到上述两类问题[11]．

除了上述几种提法外，代数特征值反问题还有其他的提法．一般地，代数特征值反问题的提法可概述如下：

对于给定的一些特征信息（指特征值、特征向量、特征多项式等）和附加条件（如矩阵的部分元素已知或限制矩阵在某个指定的矩阵类中），讨论在什么条件下存在满足所给信息的矩阵以及当条件具备时怎样构造所需的矩阵．凡与此有关的理论、计算和应用问题都属代数特征值反问题的研究领域．

1.3 代数特征值反问题的研究内容

代数特征值反问题的研究内容包括如下四个方面：

1. 可解性，包括问题可解的条件（必要或/和充分条件）.

2. 适定性，包括问题解的存在性、唯一性和稳定性.

3. 数值方法，包括构造问题的解，并讨论与方法有关的问题.

4. 实际应用，包括问题的背景及应用.

代数特征值反问题在固体力学、物理学、量子力学、结构设计、系统参数识别、自动控制等许多领域都具有重要的应用，而反问题所具有的内在的不适定性给代数特征值反问题的研究带来了不少困难，但也使它更具有挑战性和吸引力. 60年代末至70年代初以来，代数特征值反问题的研究日益受到数学界的重视，其研究具有广阔的前景.

本章中所提到的一些术语的确切意义，我们将在以后各章中详细说明.

参考文献

[1] Forsythe, G.E. and Straus, E.G., On best conditioned matrices, Proc. Amer. Math. Soc., 6(1955), 340-345.

[2] Hadeler, K.P., Ein inverses Eigenwertproblem, Lin. Alg. and Its Applic., 1 (1968), 83-101.

[3] Nocedal, J. and Overton, M.L., Numerical methods for solving inverse eigenvalue problems, Lecture Notes on Math. 1005, Numerical Methods, Springer-Verlag, Berlin, (1983), 212-226.

[4] Hadeler, K.P., Multiplikative inverse Eigenwertprobleme, Lin. Alg. and Its Applic..

2(1969),65-86.

[5] Brussard, P.J. and Glaudemans, P.W., Shell Model Applications in Nuclear Spectroscopy, Elsevier, 1977.

[6] Friedland, S., The reconstruction of a symmetric matrix from the spectral data, J. Math. Anal. Applic., 71 (1979),412-422.

[7] 蒋尔雄，一个固有频率的反问题及其解法，振动与冲击，No.4,(1983),1-6.

[8] Gladwell, G.M., The inverse problem for the vibrating beam, Proc. R. Soc. London, A 393 (1984), 277-295.

[9] 戴华，用振动试验最优校正刚度、柔度和质量矩阵，振动工程学报，1:2 (1988),18-27.

[10] 朱德懋、孙久厚，动态有限元模型建立的逆方法，南京航空学院学报，18:4 (1986),17-24.

[11] Wonham, W.M., Linear Multivariable Control: A Geometric Approach, Springer-Verlag, 1979.

[12] 周树荃　殷庆祥，代数特征值反问题（待发表），南京航空学院数理力学系，1986.

[13] 陈继承　黎罗罗，代数特征值反问题（待发表），中山大学计算机科学系，1987.

第二章　预备知识

本章给出学习代数特征值反问题所需要的矩阵理论．为了节省篇幅，我们只给出一些关键的或有特色的定义和定理，并省略了许多一般化的证明，或仅给出证明的提要．

2.1　线性空间与线性映射

2.1.1　线性空间及其维数

线性空间是线性代数最基本的概念之一，它是直观的二维与三维向量空间的自然推广．

定义 2.1　设V是一个非空集合，P是一个数域，在集合V的元素之间定义了一种代数运算，称为加法；这就是说，给出了一个法则，对于V中任意两个元素α与β，在V中都有唯一的一个元素γ与它们对应，称为α与β的和，记为$\gamma=\alpha+\beta$．又在数域P与集合V的元素之间还定义了一种运算，叫做数乘；这就是说，对于数域P中任一数k与V中任一元素α，在V中都有唯一的一个元素δ与它们对应，称为k与α的数乘，记为$\delta=k\alpha$．加法和数乘满足下述规则：

（1）结合律　$(\alpha+\beta)+\gamma=\alpha+(\beta+\gamma)$；

(2) 交换律　$\alpha+\beta=\beta+\alpha$;

(3) 有零元　存在$0\in V$，使$0+\alpha=\alpha$, $\alpha\in V$;

(4) 有负元　对于V中任一元素α，有$-\alpha\in V$使$\alpha+(-\alpha)=0$;

(5) 单位数乘不变律　$1\cdot\alpha=\alpha$;

(6) 数乘结合律　$k(l\alpha)=(kl)\alpha$;

(7) 分配律 $(k+l)\alpha=k\alpha+l\alpha$, $k(\alpha+\beta)=k\alpha+k\beta$.

在以上规则中，k，l表示数域P中的任意数，α、β、γ表示集合V中的任意元素，则称V是数域P上的线性空间，在不致混淆时就简称线性空间．线性空间中的元素称为向量．

线性空间中向量的减法可规定为

$$\alpha-\beta=\alpha+(-\beta).$$

关于线性空间中运算（如加、减、数乘）的一些性质，读者不难自己导出，我们将随意引用．

定义 2.2　设V是数域P上的线性空间，$\alpha_1,\cdots,\alpha_r\in V$．如果存在不全为零的数$k_1,\cdots,k_r\in P$，满足

$$\sum_{i=1}^{r}k_i\alpha_i=0,$$

则称$\alpha_1,\cdots,\alpha_r$线性相关；否则称$\alpha_1,\cdots,\alpha_r$线性无关．

定义 2.3　设V是数域P上的线性空间，$\alpha_1,\cdots,\alpha_r(r\geqslant 1)$是$V$中一组向量，$k_1,\cdots,k_r$是数域$P$中的数．如果向量

$$\alpha=\sum_{i=1}^{r}k_i\alpha_i,$$

则称向量α可以用向量组$\alpha_1,\cdots,\alpha_r$线性表出．

定义 2.4　设$\alpha_1,\cdots,\alpha_r$和$\beta_1,\cdots,\beta_s$是线性空间V中两个向量组，如果向量组$\alpha_1,\cdots,\alpha_r$中的任一向量都可以用向量组$\beta_1,\cdots,\beta_s$线性表出，则称向量组$\alpha_1,\cdots,\alpha_r$可以用向量组$\beta_1,\cdots,\beta_s$线性表出．可互相线性表出的两组向量称为等价的．

上述概念是线性空间理论的出发点．