



研究生教材

非线性振动和 运动稳定性

朱因远 周纪卿 编

西安交通大学出版社

研究生教材

**非线性振动和
运动稳定性**

朱因远 周纪卿 编

西安交通大学出版社

内 容 提 要

本书系统地介绍了非线性振动和运动稳定性的基本理论,内容包括单自由度保守系统、散逸系统、自激振动、受迫振动、参数激发振动、运动稳定性、非线性振动的数值解法、点映射、胞映射和混沌现象,介绍了几何法和包括小参数法在内的7种定量研究方法,还介绍了几种计算机解法,最后附有5个计算机程序。

本书的特点是,除讲清数学推证外,着重阐述物理概念和工程应用,并吸收了国内外最新研究成果,内容丰富,由浅入深,便于教学。

本书可供机械、力学、物理等类专业研究生,或高年级本科生使用,也可供有关专业教师和技术人员参考。

(陕)新登字 007 号

非线性振动和运动稳定性

朱因远 周纪卿 编

责任编辑 王新安

西安交通大学出版社出版

邮政编码 710049

西安交通大学出版社印刷厂印装

陕西省新华书店经销

开本 850×1168 1/32 印张 10.125 字数:253千字

1992年6月第1版 1992年6月第1次印刷

印数:1—1200

ISBN7-5605-0459-0/O·79 定价:9.50 元

研究生教材总序

研究生教育是为国家培养高层次人才的,它是我国高等教育的最高层次。研究生必须在本门学科中掌握坚实的基础理论和系统的专门知识,具有从事科学研究或担负专门技术工作的能力。这些要求具体体现在研究生的学位课程和学位论文中。

认真建设好研究生学位课程是搞好研究生教学的重要环节。为此,我们组织出版这套以公共课和一批新型学位课程为主的研究生教材,以满足当前研究生教学的需要。这套教材的作者都是多年从事教学、科研、具有丰富经验的教师。

这套教材首先着眼于研究生未来工作和高技术发展的需要,充分反映国内外最新学术动态,使研究生学习之后能迅速接近当前科技发展的前沿,以适应“四化”建设的要求;其次,也注意到应有的基本理论和基本内容,以保持学位课程内容的相对稳定性和系统性,并具有足够的深广度。

这套研究生教材虽然从提出选题、拟定大纲、组织编写到编辑出版,都经过了认真的调查论证和细致的工作,但毕竟是第一次出版这样高层次的系列教材,水平和经验都感不足,缺点和错误在所难免。希望通过反复的教学实践,广泛听取校内外专家学者和使用者的意见,使其不断改进和完善。

西安交通大学研究生院

西安交通大学出版社

前 言

从 1985 年开始,作者每年为西安交通大学本科生和研究生开出“非线性振动和运动稳定性”课程。本书是根据作者历年的讲稿、讲义整理,几经修改、补充而写成的。

工程中有许多非线性问题,过去由于缺少解非线性微分方程的方法和计算手段,被迫按线性方程来解,解的精度差,甚至把许多本质的特征都舍弃了。近 20 年来,非线性振动和运动稳定性学科在国内外得到了迅速的发展(重要的因素之一是计算机的应用)。目前机械、能源、交通、化学、生物和航天航空等工程中提出了许多非线性问题,有待研究。特别是强非线性问题、大振动问题、多自由度系统非线性振动问题和振动系统的全局特性等都是力学工作者研究的热点。

本教材共分十章,从非线性振动方程的建立入手,介绍了非线性振动学科发展过程中主要的理论和求解方法,还介绍了本学科最新研究的成果。具体地讲就是分别用定性方法、定量方法和计算机数值解法研究单自由度保守系统、散逸系统、自激振动、受迫振动和参数激振系统的解和解的稳定性。第四章运动的稳定性可以供需要研究运动稳定性的读者单独选学。第八章、第九章和第十章内容是近几年来国内外学者研究的最新成果,可以根据需要有选择地讲授。本书所包括的内容可供 40~60 学时课程讲授使用。

本书是为工科院校高年级学生、研究生学习非线性振动和运动稳定性基本理论提供的一本合适的教材。同时也可做为教师和工程技术人员参考书。

在本书即将出版时,作者深深感谢曾经指导、帮助与鼓励过作者的师友和西安交通大学理论力学教研室的同仁们。西安交通大

学工程力学研究所副所长、博士指导教师徐健学教授认真地审阅了全书,指出了初稿中一些欠妥之处,他的宝贵意见使本书增色不少.作者向他表示深切的谢意.

本书得到西安交通大学研究生院和出版社的大力支持,责任编辑王新安同志为它作了细致加工,作者在此表示深切谢意.

在编写过程中,作者深感知识的不足,疏误在所难免,恳切期待来自各方面的批评与建议,以使本书质量不断提高.

作者

1991.11

目 录

前 言

第一章 绪 论

§ 1-1 非线性振动的特点	(1)
----------------------	-----

§ 1-2 非线性振动学科主要内容	(2)
-------------------------	-----

第二章 单自由度保守系统自由振动

§ 2-1 引 言	(5)
-----------------	-----

§ 2-2 单自由度非线性振动的例子	(6)
--------------------------	-----

§ 2-3 定性分析	(9)
------------------	-----

§ 2-4 普通小参数法	(16)
--------------------	------

§ 2-5 坐标变换法	(21)
-------------------	------

§ 2-6 多尺度法	(28)
------------------	------

§ 2-7 谐波平衡法	(32)
-------------------	------

§ 2-8 伽辽金法	(34)
------------------	------

§ 2-9 含参数的保守系统 临界值	(37)
--------------------------	------

练习题

第三章 单自由度耗散系统自由振动

§ 3-1 引 言	(45)
-----------------	------

§ 3-2 奇点分析	(49)
------------------	------

§ 3-3 相轨线的作图方法	(55)
----------------------	------

§ 3-4 耗散系统相平面上的相轨线	(59)
--------------------------	------

§ 3-5 多尺度法	(66)
------------------	------

§ 3-6 慢变参数法	(70)
-------------------	------

§ 3-7 KBM 法	(74)
-------------------	------

§ 3-8 等效线性化方法	(82)
---------------------	------

§ 3-9 各种分析方法的评述	(83)
-----------------------	------

练习题

第四章 运动稳定性

§ 4-1 引 言	(87)
§ 4-2 扰动方程	(88)
§ 4-3 稳定性的定义	(92)
§ 4-4 李亚普诺夫第二方法基本概念	(94)
§ 4-5 李亚普诺夫关于自治系统的稳定性定理	(99)
§ 4-6 稳定性定理的扩展	(104)
§ 4-7 V 函数的构造	(107)
§ 4-8 一阶线性常微分方程组的稳定性	(112)
§ 4-9 李亚普诺夫第一近似理论	(117)
§ 4-10 特征方程全部根具有负实部的判别准则	(120)

练习题

第五章 自激振动

§ 5-1 引 言	(124)
§ 5-2 自激振动的例子	(125)
§ 5-3 闭轨道和极限环	(131)
§ 5-4 范德波方程	(134)
§ 5-5 极限环的存在性	(139)

练习题

第六章 受迫振动

§ 6-1 引 言	(145)
§ 6-2 无阻尼杜芬方程和逐次逼近法	(146)
§ 6-3 有阻尼杜芬方程	(149)
§ 6-4 跳跃现象	(152)
§ 6-5 求受迫振动周期解的其它近似方法	(156)
§ 6-6 主共振 超谐共振 次谐共振 组合共振 ...	(160)
§ 6-7 自振系统的受迫振动	(172)

§ 6-8 非理想系统	(180)
练习题	
第七章 参数激励振动	
§ 7-1 引 言	(188)
§ 7-2 参数激励振动系统的例子	(189)
§ 7-3 福洛开理论	(194)
§ 7-4 用约束参数法确定马休方程稳定性区域	(200)
§ 7-5 用希尔无限行列式确定稳定区边界	(204)
练习题	
第八章 研究非线性振动的数值方法	
§ 8-1 引 言	(208)
§ 8-2 初始值问题	(209)
§ 8-3 刚性方程简介	(218)
§ 8-4 边值问题	(221)
§ 8-5 用打靶法求非线性振动的周期解	(226)
§ 8-6 周期运动稳定性的数值研究	(233)
练习题	
第九章 点映射法和胞映射法	
§ 9-1 引 言	(236)
§ 9-2 点映射动力系统周期解及其局部稳定性	(236)
§ 9-3 点映射动力系统全局稳定域的构造	(240)
§ 9-4 一维点映射系统和二维点映射系统	(244)
§ 9-5 参数激励振动问题的点映射	(250)
§ 9-6 简单胞映射	(254)
§ 9-7 简单胞映射的计算机算法	(261)
§ 9-8 胞映射的中心点法	(264)
练习题	
第十章 混沌现象	
§ 10-1 引 言	(271)

§ 10-2	映射系统中的混沌性态	(272)
§ 10-3	由微分方程控制的系统中的混沌性态	(279)
§ 10-4	研究混沌的一些数值方法	(285)
§ 10-5	混沌的实验研究	(289)
§ 10-6	结束语	(292)

练习题

附 录

参考文献

第一章 绪 论

振动现象普遍存在于工程技术和日常生活中,严格地讲,描述这些振动现象的方程式大多是非线性方程.对于那些非线性因素很弱,而又不从根本上影响计算结果的问题,我们可以用线性方程来替代非线性方程,这种方法称为线性化方法.对于很多的振动问题,这种简化是合理的.而对某些非线性问题,这样简化所造成的结果误差却很大,甚至带来本质的变化,因此有必要研究非线性振动系统的性态.

非线性振动理论的主要任务是,研究不同振动系统的周期解的形式、性态和求解方法,研究解的稳定性、不同参数和初始条件对系统解的影响.对工程技术问题来说,其任务是为减小系统振动或有效利用振动,使系统具有合理的振动参数和结构形式等.

§ 1-1 非线性振动的特点

线性振动理论的研究始于牛顿(Newton, I.)时代.拉格朗日(Lagrange, J. L.)曾系统地研究过微振动理论,由于线性微分方程理论已经发展得比较完善,所以线性振动理论也发展得相当完善.作为线性振动理论的基础之一——叠加原理,在非线性的振动系统中不适用,因而线性振动理论中一系列的方法和定理,例如振型叠加法、瞬态振动中杜哈美(Duhamel)积分、模态分析和模态综合等等,在非线性的振动理论中都不再适用.非线性振动系统的解法往往因问题而异,至今没有一个统一的通用解法.

非线性系统中,特别是非线性高阶系统中,解的形式究竟有几种,目前尚未完全搞清楚.就已知解的形式中,往往一个非线性

系统有几个平衡状态和周期解. 其中有些平衡状态和周期解是稳定的, 即可以实现的; 而另一些平衡状态和周期解则是不稳定的, 即不可以实现的. 因而研究非线性振动的解的形式、求解方法与研究解的稳定性是不可分离的. 工程中某些非线性问题, 往往需要确定解的稳定区和不稳定区的分界线, 有时需要研究某些参数变化时解的稳定性的变化规律.

阻尼的机理目前尚未完全研究清楚. 在线性振动理论中, 人们往往将其假设为线性阻尼, 甚至有时假设为比例阻尼, 这样假设有一定的工程背景, 而且微分方程容易求解, 解也具有一定的精度. 线性阻尼的存在; 使线性系统振动衰减. 在非线性的系统中, 有时可能存在非线性阻尼 (例如负阻尼、平方阻尼、迟滞阻尼等等), 即使没有周期性干扰力的作用, 系统也会出现周期解.

在单一频率周期性干扰力作用下, 非线性系统受迫振动定常解会出现与干扰力同频成分, 有时又会出现不同频率成分, 即出现次谐波、超谐波和超次谐波等. 当干扰力的频率从大到小或从小到大连续变化时, 系统受迫振动的振幅会出现跳跃现象, 而且频率变化顺序不同时, 跳跃点的位置也不同.

非线性系统中, 解的形式往往因参数微小的变化而发生根本的改变, 就是出现分叉. 甚至于某些确定性方程的解, 会出现类似随机的过程, 致使对系统未来的预测成为不可能, 这就是混沌状态.

以上仅粗略地介绍非线性振动的一些特点, 在以后各章中, 我们将一一进行分析研究.

§ 1-2 非线性振动学科主要内容

1. 方程的建立

非线性系统的力学问题, 可以用一个或一组非线性微分方程、差分方程甚至代数方程来描述, 因而方程的建立是最根本的问题.

力学中的牛顿定律、达朗伯(d' Alembert, J. R.)原理、拉格朗日方程、哈密顿(Hamilton, S. K. R.)原理等都可以用来建立动力学方程。

建立方程的目的是为了求解方程,因而方程的建立与问题的性质有关这是不言而喻的。但是方程的建立还与求解的精度、求解的方法即现有手段有关,这点往往被人们特别是初学者所忽视。研究最一般的非线性系统,可以建立最一般的非线性方程,理论上可以得到最一般的结果,具有广泛的适应性和深度。但是缺乏解的手段,很难得到什么结果。对于简单模型,方程简单,求解容易,所得结论普遍性差,但换来了对系统更深入更具体的了解。所以建立方程(即建立数学模型)要考虑求解问题的手段,从已有手段来建立方程才有现实意义。

总之,方程的建立依赖于问题的本质、现有科学水平、实际问题的要求、研究经费以及研究的时限等等多个方面。可以这样讲,建立方程是研究非线性振动的头等重要问题。

2. 求解方法

研究非线性振动的方法很多,大体上分为实验法和分析法,后者又可分为定性分析法和定量分析法。

实验法是指在实物或模型上进行实验研究,通过实验得出结论。由于现代科技的进步,实验分析手段发展很快,电子计算机的应用,使实验法研究的前景十分宽广。

定性分析法,又称几何法或相平面法,由庞卡莱(Poincaré, H.)首先提出,即在相平面上研究解或平衡点的性质和相图性质,从而定性地确定解的性态,一般以研究二维问题为主。计算机辅助绘图手段的引入,赋予定性分析法以新的活力。

定量分析法近几十年来发展很快,方法也很多。例如普通小参数法、林特斯蒂脱(Lindstedt)小参数法、多尺度法、平均法、KBM法、伽辽金(Галёркин, Г. Б.)法、谐波平衡法等等,它们各有特色。

定量分析法的另一个分支,使用电子计算机进行数值分析研

究非线性振动,近年来发展迅猛,而且实用价值很大.如初值法、边值法、点映射法、胞映射法等都得到广泛应用.

如上所述,非线性振动的求解方法如此之多,正好说明非线性振动理论的研究远远没有完善,到目前为止没有一个通用方法可供普遍应用.解决实际问题时往往需要同时使用几种方法,相互取长补短.

3. 非线性振动问题研究的一般步骤

对一般工程问题,非线性振动问题的研究可分四步进行:首先找平衡点及周期解;其次研究这些平衡点及周期解的稳定性;如果方程中含有参数,应研究参数变化时,平衡点及周期解的个数及性态是如何变化的,找出使解的拓扑结构变化的参数值(称为临界参数).最后,有条件且有必要时,应研究任一给定的初始条件下,系统长期发展的结果,即研究非线性系统整体性态.完成以上四步工作,非线性系统的性态算是比较彻底地被研究了.

4. 当前的研究方向

如前所述,非线性振动理论尚未发展完善,许多重要运动性态的机理尚不清楚.国内外大量的力学工作者正在奋力攻克一个又一个难关.当前许多专家、学者致力于研究多自由度系统的非线性振动问题;在多频激励力作用下系统非线性振动特性;强非线性大振动的求解方法和解的性态;非线性系统的分叉、突变理论及混沌特性和机理.除此而外,如何用非线性振动理论指导解决工程技术中的问题也是本学科迫切需要研究的重要方向.

总之,非线性振动理论已初步形成,在日益发展的科学技术相互影响、促进下,研究非线性振动的基础已经奠定而且已迈出坚实的步伐,相信在不远的将来,非线性振动理论会逐步完善,将会在工程中取得更多的应用.

第二章 单自由度保守系统自由振动

§ 2-1 引言

非线性方程至今还没有一般的解法,只能根据系统的特点采用一些特殊的方法来尽可能揭示出系统的某些重要的运动性态. 这些方法主要有两个分支:定性方法和定量方法. 在实际应用中,这两种方法常常是相辅相成的.

定性方法能直观地清楚地显示出解的主要性质和特征,也即非线性系统运动的主要性质和特征. 因此,在非线性和非线性微分方程的研究中得到了广泛的应用. 特别是当用分析方法研究非线性微分方程解的性态很难得到满意的结果时,用定性方法往往可以得到意外的收获.

定性方法不仅可以用于研究无阻尼非线性保守系统,也可用于研究有阻尼的非保守系统、多自由度非线性系统和非自治系统. 本章第二节通过单自由度保守系统自由振动介绍定性方法的基本内容:相平面、奇点和相轨线的性质.

定性方法的主要缺点是得不到定量的结果. 非线性微分方程的近似分析方法则能对非线性自治系统和非自治系统进行分析,得到定量的结果. 这一章第四节到第八节先介绍几种定量方法. 其中普通小参数法、坐标变换法和多尺度法中均假设系统是弱非线性的,而谐波平衡法和伽辽金法则无此假定,即它们既适用于研究弱非线性系统,也适用于研究强非线性系统. 这些方法当然也适用于研究非保守系统.

本章最后一节研究参数的变化对非线性保守系统运动性态的影响,并提出了临界值的概念.

§ 2-2 单自由度非线性振动的例子

对于单自由度保守系统,其振动方程可表示为

$$\ddot{x} + f(x) = 0 \quad (2-2-1)$$

其中“ $\cdot$ ”表示对时间 t 的导数, $-f(x)$ 为非线性恢复力. 在线性系统中,假设恢复力与位移或变形成正比,材料满足胡克(Hooke, R.)定律,这只有位移或变形比较小或材料在弹性极限范围内变形时才是正确的. 当恢复力与位移或变形不成正比(称几何非线性)或材料不满足胡克定律(称物理非线性),或系统中有其它因素(如惯性等)引起的非线性时,就不能把系统简化为线性系统. 下面举例说明.

1. 几何非线性

例 2-1 单摆的大摆动. 最简单的非线性物理系统是数学摆,如图 2-1 所示. 它的无阻尼自由振动微分方程为

$$ml^2\ddot{\theta} + mgl\sin\theta = 0$$

或

$$\ddot{\theta} + \omega_0^2 \sin\theta = 0 \quad (2-2-2)$$

其中 m 为摆锤质量, l 为摆长, g 为重力加速度, $\omega_0^2 = g/l$. 将 $\sin\theta$ 展开成级数

$$\sin\theta = \theta - \frac{\theta^3}{3!} + \frac{\theta^5}{5!} - \frac{\theta^7}{7!} + \dots$$

若摆作微摆动,摆角 θ 很小,取上式第一项作为近似,这就是简谐振动. 当摆角不很小时,取级数的前两项作为近似,则方程化为

$$\ddot{\theta} + \omega_0^2\theta - \alpha\theta^3 = 0 \quad (2-2-3)$$

其中 $\alpha = \omega_0^2/6$. 这是有名的自由振动杜芬(Duffing, G.)方程. 非线性

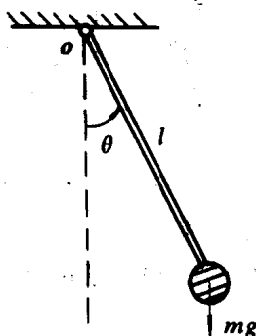


图 2-1 单摆

性是由于大位移的几何因素引起的。

例 2-2 拉紧钢丝中的质点. 设质量为 m 的质点, 位于长为 $2l$ 的钢丝中点, 钢丝的预拉力为 s . 当质点从平衡位置产生侧向位移 x 时, 钢丝产生恢复力, 如图 2-2 所示. 这样质点的运动方程为

$$m\ddot{x} + 2\left(s + \frac{AE\Delta l}{l}\right)\sin\theta = 0 \quad (2-2-4)$$

其中 $A, E, \Delta l$ 分别为钢丝的横截面积、弹性模量和长度增量。

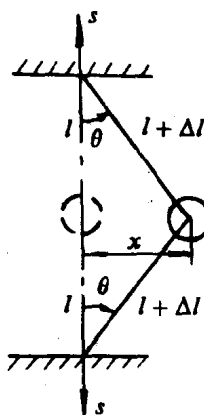


图 2-2 两根
钢丝中的质点

由图 2-2 的几何关系可知

$$\Delta l = \sqrt{l^2 + x^2} - l \approx \frac{x^2}{2l},$$

$$\sin\theta = \frac{x}{\sqrt{l^2 + x^2}} \approx x/l$$

代入方程 (2-2-4) 得

$$m\ddot{x} + \frac{2s}{l}x + \frac{AE}{l^3}x^3 = 0$$

或

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x + \alpha x^3 = 0 \quad (2-2-5)$$

其中 $\omega_0^2 = 2s/lm$, $\alpha = AE/ml^3$. 如果初始拉力很大, 同时 x 很小, 方程中的立方项可以忽略不计, 这时质点的振动近似简谐振动. 在

这个例子中, 非线性也是来源于大位移的几何因素。

2. 物理非线性

例 2-3 非线性弹簧. 质量为 m 的质点, 在弹性力作用下, 沿光滑水平面运动, 如图 2-3(a) 所示. 其运动方程仍可写为 (2-2-1) 式.

大家知道, 材料在弹性极限范围内, 力与变形成正比, 弹性力为 $-kx$, 弹簧的刚性系数 k 是常数. 但是, 有些材料, 其弹性力与变形不成正比, 弹簧的刚性系数也就不为常数, 称这种弹簧为非线性弹簧. 当变形加大时, 刚性系数变小, 则称为软弹簧 (恢复力称软特性恢复力); 当变形加大时, 刚性系数也变大, 称为硬弹簧 (恢复力