高等数学

高等学校教材 GAODENG SHUXUE

下册

叶宗泽　蔡高厅　主编

天津大学出版社

高等数学

（下册）

叶宗泽　蔡高厅
编
邱忠文　梁立华

天津大学出版社

内容提要

本书系高等工业院校适用的数学教材，是在本社1987年版《高等数学》基础上重新组织编写的。全书参照高等工业院校“高等数学课程教学基本要求”，充分注意1987年版《高等数学》中的不足，并吸取多年教学中积累的经验，做到结构进一步合理，论述更简明通顺，内容愈臻完善。

该书分上、下册，下册包括多元函数微分学、重积分、曲线积分与曲面积分、级数、微分方程等5章。

高等数学

（下册）

叶宗泽　蔡高厅
邱忠文　梁立华　编

*

天津大学出版社出版

（天津大学内）

河北省邮电印刷厂印刷

新华书店天津发行所发行

*

开本：850×1168毫米 1/32　印张：12 5/8　字数：326千

1994年8月第一版　　1996年9月第二次印刷

印数：10 101—16 100

ISBN 7-5618-0604-3

O·61　定价：16.50元

目 录

第八章　多元函数微分学

到现在为止，本书研究过的函数都是仅有一个自变量的函数，叫做一元函数或单元函数．在自然科学与工程技术中的许多问题，往往是与多种因素有关，而这些因素之间在数量方面又存在着相互联系、相互制约的规律，这种客观存在的规律反映到数学上，就是一个变量依赖于多个变量的关系，这就是本章将要介绍的多元函数微分学的内容．

本章以二元函数为主，讨论它的微分法和应用，而二元以上的函数则可以类推．多元函数微分学是在一元函数微分学的基础上发展起来的．它的一些基本概念及研究问题的思想方法虽然与一元函数的情形相仿，但是由于自变量个数的增加，将会产生一些新的问题．因此学习本章内容时应注意与一元函数对照，比较它们的异同，掌握多元函数的特点．

§1　多元函数的概念

一　平面点集与区域

在讨论一元函数的有关概念时，要考虑变量的变化范围，经常用到区间与邻域的概念．由于研究二元函数的需要，我们首先介绍平面点集与区域的基本知识，把邻域的概念推广到平面上．

当考虑两个变量x与y时，x与y的一组值(x, y)可以看作平面上一点P，x、y为该点的直角坐标，于是两个变量x与y的变化范围（或取值范围）就相当于平面上某个点集．数学中常用D、E、F、…等大写英文字母表示平面上的点集．例如

$$D=\{(x, y)\mid x>0, y>0\};$$

$$E=\{(x, y)\,|\,x^2+y^2\leqslant 1\}.$$

D表示平面上所有满足$x>0$、$y>0$的点（x，y）所组成的集合，即由直角坐标平面上第一象限的一切点所组成的集合. E 表示平面上所有满足$x^2+y^2\leqslant 1$ 的点(x，y)所组成的集合，即由圆心在原点的单位圆内及圆周上的一切点所组成的集合.

1 邻域

设$P_0(x_0, y_0)$是平面上一点，δ是某一正数，那么点集$\{(x, y)\,|\,(x-x_0)^2+(y-y_0)^2<\delta^2\}$称为点$P_0$的$\delta$邻域，记为$U(P_0,\delta)$，即

$$U(P_0, \delta)=\{(x, y)\,|\,(x-x_0)^2+(y-y_0)^2<\delta^2\}.$$

在几何上，邻域$U(P_0, \delta)(\delta>0)$就是平面上以点$P_0(x_0, y_0)$为圆心、δ为半径的圆内的点$P(x, y)$的全体.

δ称为邻域$U(P_0, \delta)$的半径. 如果不需要特别强调邻域的半径δ，就用$U(P_0)$来表示P_0的某一邻域.

2 区域

设E为平面上的点集，点$P\in E$. 如果存在点P的某个邻域$U(P)$，使$U(P)$内的点都属于E，则称P为E的一个内点（见图8-1）. 纯由内点组成的点集称为开集.

例如点集$E_1=\{(x, y)\,|\,x^2+y^2<1\}$中的每一个点都是$E_1$的内点，因此$E_1$为开集.

设E为平面上的点集，如果点P的任意邻域内既有属于E的点，也有不属于E的点，则称P为E的一个边界点（见图8-2）. 至于点

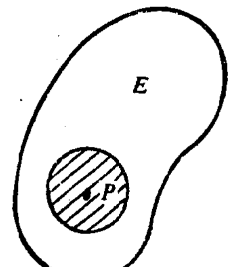

图8—1

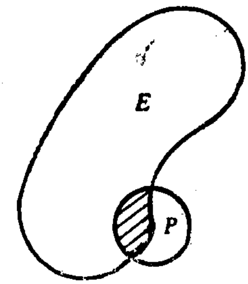

图8—2

P本身可以属于E，也可以不属于E．点集E的边界点的全体便称为E的边界．

例如上例的点集E_1，圆周$x^2+y^2=1$上的每一点都是E_1的边界点，此圆周是E_1的边界．

设E是开集，如果对于E内的任意两点P_1与P_2，都能用折线把它们连接起来，而该折线上的点都属于E，则称开集E是连通的．连通的开集就称为区域或开区域．开区域连同它的边界一起称为闭区域．

例如，$\{(x,\ y)\mid x^2+y^2<1\}$，$\{(x,\ y)\mid x-y>0\}$都是区域．$\{(x,\ y)\mid x^2+y^2\leqslant 1\}$，$\{(x,\ y)\mid x-y\geqslant 0\}$都是闭区域．

如果存在正数M，使得对于区域D中任何点$P(x,\ y)$，皆有$|x|\leqslant M$，$|y|\leqslant M$，就称区域D是有界的，否则区域就称为无界的．

例如$\{(x,\ y)\mid x^2+y^2<1\}$是有界区域，而$\{(x,\ y)\mid x-y>0\}$是无界区域．

3　聚点

设E是平面上的点集，P是平面上一点，它可以属于E，也可以不属于E．如果在点P的任意邻域内总有无限多个点属于点集E，则称P为点集E的聚点．

显然，如果E是一个区域，则E的内点及边界点都是E的聚点．

又如，点集$D=\{(x,y)\mid 0<x^2+y^2\leqslant 1\}$，点$O(0,\ 0)$既是$D$的边界点又是$D$的聚点，但是$O$不属于$D$．又圆周$x^2+y^2=1$上的每一点既是$D$的边界点，也是$D$的聚点，然而这些聚点都属于$D$．

4　n维空间

在数轴上的点M与实数x是一一对应的，那么实数的全体就表示数轴上一切点的集合，记为R^1，叫做一维空间．类似地，在平面上建立直角坐标系后，平面上的点M与二元有序数组$(x,\ y)$是一一对应的，那么二元有序数组$(x,\ y)$的全体就表示平面上一切

点的集合，记为R^2，叫做二维空间．在空间中建立直角坐标系后，空间中的点M与三元有序数组(x, y, z)是一一对应的，那么三元有序数组(x, y, z)的全体就表示空间中一切点的集合，记为R^3，叫做三维空间．如此加以推广，我们把n元有序数组$(x_1, x_2, \cdots, x_n)$的全体所组成的集合记为R^n，叫做n维空间，而每一个n元有序数组$(x_1, x_2, \cdots, x_n)$表示n维空间中一个点M，常记为$M(x_1, x_2, \cdots, x_n)$，数$x_i(i=1, 2, \cdots, n)$叫做点M的第i个坐标．

设点$M(x_1, x_2, \cdots, x_n)$，$N(y_1, y_2, \cdots, y_n) \in R^n$，我们规定$M$，$N$两点间的距离为

$$|MN|=\sqrt{(y_1-x_1)^2+(y_2-x_2)^2+\cdots+(y_n-x_n)^2}.$$

显然，当$n=1, 2, 3$时，上式就是解析几何中在直线上、平面上、空间中两点间的距离公式．

有了两点间的距离规定之后，就可以把平面点集中邻域的概念推广到R^n中去．设$P_0 \in R^n$，δ是某一正数，那么R^n中的点集

$$U(P_0, \delta)=\{P \mid |PP_0|<\delta, P \in R^n\}$$

就称为点P_0的δ邻域．有了邻域的概念，就可以定义R^n中点集的内点、边界点、区域、聚点等概念，这里不一一赘述．

二　多元函数的概念

我们着重介绍二元函数的概念．三元或更多元的函数，可以作类似的推广．

在很多具体问题的数量方面，经常会遇到一个变量依赖于多个变量的关系，下面先看几个例子．

例1　设由电阻R_1、R_2并联的电路，其总电阻为R．据电学知识可知R与R_1、R_2之间具有以下关系

$$R=\frac{R_1R_2}{R_1+R_2}.$$

对于点集$A=\{(R_1, R_2) \mid R_1>0, R_2>0\}$中的每一点$P(R_1, R_2)$，通过上式都有一个确定的数$R$与之对应．

例2　中心在原点$O(0, 0)$，在x轴、y轴、z轴上的半轴依次

为a、b、c的上半椭球面的方程为

$$z=c\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}},\ (a>0、b>0、c>0).$$

对于平面点集$A=\{(x,y)|\ \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\leqslant 1\}$中每一点$P(x,y)$通过上式都有一个确定的数$z$与之对应.

例 3 一定量的理想气体的体积V，压强p和绝对温度T之间存在关系

$$V=R\frac{T}{p},$$

这里R是常数. 对于平面点集$A=\{(p,\ T)|\ p>0,\ T>T_0\}$（其中$T_0$为该气体的液化点）中每一点$P(p,\ T)$，通过上面关系或都有一个确定的数$V$与之对应.

上面三个例子的实际意义虽然各不相同，但它们却有共同的特性，抽出其共性就可得出二元函数的定义.

定义 设有平面点集A和数集B. 如果对于A中的每一点$P(x,\ y)$，通过确定的规律f都有唯一的实数$z\in B$与之对应，则称f是A上的函数，记为$P(x,y)\xrightarrow{f}z$，习惯记作

$$z=f(x,\ y)\text{或}z=f(P).$$

也称z是x，y的函数，或z是点$P(x,\ y)$的函数，而x，y称为自变量，z称为因变量，具有两个自变量的函数$f(x,\ y)$通常称为二元函数.

定义中的点集A称为函数$z=f(x,\ y)$的定义域，当点$P(x,y)$遍取A中的一切点时，z的对应值的全体组成的数集$B_f(\subseteq B)$，$B_f=\{z|\ z=f(x,\ y),\ (x,\ y)\in A\}$称为函数的值域.

根据二元函数的定义，可知例 1 中的R是平面点集$A=\{(R_1,\ R_2)|\ R_1>0,\ R_2>0\}$上的函数，其定义域是区域$R_1>0$，$R_2>0$；例 2 中的$z$是平面点集$A=\{(x,\ y)|\ \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\leqslant 1\}$上的函数，其定义域是闭区域$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\leqslant 1$；例 3 中的$V$是平面点集$A=\{(p,$

$T)|\ p>0,\ T>T_0\}$上的函数，其定域是区域$p>0,\ T>T_0$.

从映射的概念看，二元函数f实质上就是一个由点集A到数集B的映射，数z就是点$P(x,\ y)$在映射f下的象，而点$P(x,\ y)$是z的原象.

类似地可以定义三元函数$u=f(x,\ y,\ z)$及三元以上的函数.一般地，如果把函数定义中的平面点集A换成n维空间R^n中的点集A，则可类似地定义n元函数$u=f(x_1,\ x_2,\ \cdots,\ x_n)$，也可记为$u=f(P)$，这里点$P(x_1,\ x_2,\ \cdots,\ x_n)\in A$. 显然，$n=1$时，就得到一元函数. 二元及二元以上的函数统称为多元函数.

设已给二元函数$z=f(x,\ y)$，其定义域为D. 对任意取定的点$P_0(x_0,\ y_0)\in D$，对应的函数值记为$z_0=f(x_0,\ y_0)$，在空间直角坐标系$Oxyz$中就确定了一点$M_0(x_0,\ y_0,z_0)$. 在一般情况下，当点$P(x,\ y)$遍取函数定义域D的一切点时，对应的点$M(x,y,z)$的全体组合成一个空间点集$\{(x,y,z)|\ z=f(x,y),(x,\ y)\in D\}$，这个点集称为二元函数的图形，其图形一般是一张曲面（见图8-3）.

如例 2 中的二元函数

$$z=c\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}}$$

的图形是中心在原点，三个半轴为a、b、c的上半椭球面（见图8-4）.

在上面的函数定义中，规定对点集A中的每一点P，通过确定的规律f都只有唯一的实数z与之对应，这样定义的函数是单值函数. 有时在点集A中有这样的点P，它通过f有多个实数z与之对应，例如由方程

$$x^2+y^2+z^2=R^2$$

在闭区域$D=\{(x,\ y)|\ x^2+y^2\leqslant R^2\}$上，除在圆周$x^2+y^2=R^2$上的点而外对任意的点$P(x,\ y)\in D$，通过上述方程有两个实数$z=\sqrt{R^2-x^2-y^2}$与$z=-\sqrt{R^2-x^2-y^2}$与之对应，这时我们

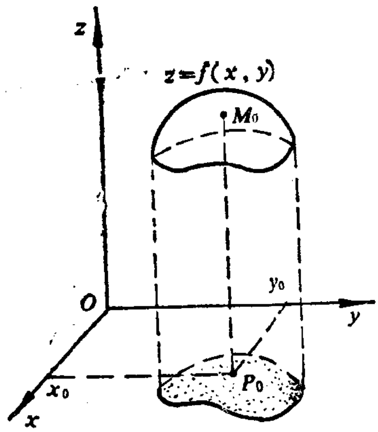

图8—3

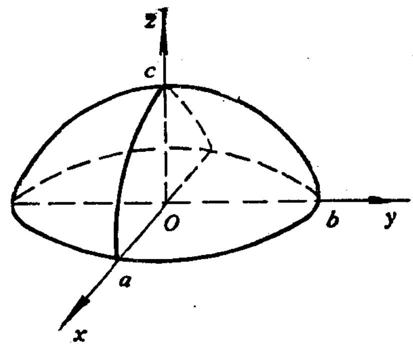

图8—4

称由该方程确定了多值函数. 通常把多值函数分成几个单值函数来讨论，如上例可以分为两个单值函数:

$$z=\sqrt{R^2-x^2-y^2} \text{ 与 } z=-\sqrt{R^2-x^2-y^2}.$$

以后如不作特别声明，本书所讨论的函数都是指单值函数.

三　二元函数的极限与连续性

1　二元函数的极限

设函数$z=f(x, y)$定义在平面点集E上，点$P_0(x_0, y_0)$为点集E的聚点，我们来讨论$P(x, y)\to P_0(x_0, y_0)$（其中$P\in E$），即$x\to x_0$，$y\to y_0$时函数$z=f(x, y)$的极限.

这里必须指出，$P\to P_0$是指点P以任意的方式趋于P_0，亦即两点P与P_0之间的距离趋于零，也就是

$$|P_0P|=\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}\to 0.$$

其中$P\in E$，因为P_0是点集E的聚点，那么在点P_0的任意邻域内都有属于E的无限多个点，所以点P以任意方式趋于P_0总是可能的.

如果在点$P(x, y)\to P_0(x_0, y_0)$的过程中，$P(x, y)$所对应的函数值$f(x, y)$无限接近于一个常数A，就说当$x\to x_0$，$y\to y_0$时，函数$z=f(x, y)$以A为极限. 下面仿照一元函数极限的定义，

用"$\varepsilon-\delta$"的语言方式来描述二元函数的极限.

定义 设二元函数$z=f(x, y)$定义在点集E上，$P_0(x_0, y_0)$是E的聚点，A为一常数. 如果对于任意给定的正数ε，都存在正数δ，使得满足不等式

$$0<|PP_0|=\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}<\delta$$

的一切点$P(x, y)\in E$，恒有

$$|f(x, y)-A|<\varepsilon$$

成立，则称当$x\to x_0$，$y\to y_0$时，函数$z=f(x, y)$以A为极限，记为

$$\lim_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} f(x, y)=A,$$

或
$$f(x, y)\to A\ (\rho=|PP_0|\to 0).$$

二元函数的极限也叫做二重极限.

例 4 证明$\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\left[(x^2+y^2)\sin\dfrac{1}{x^2+y^2}\right]=0$.

证明 由于

$$\left|(x^2+y^2)\sin\frac{1}{x^2+y^2}-0\right|=$$

$$|x^2+y^2|\cdot\left|\sin\frac{1}{x^2+y^2}\right|\leqslant x^2+y^2,$$

因此，对任意给定的$\varepsilon>0$，取$\delta=\sqrt{\varepsilon}>0$，当

$$0<\sqrt{(x-0)^2+(y-0)^2}<\delta$$

时，恒有

$$\left|(x^2+y^2)\sin\frac{1}{x^2+y^2}-0\right|\leqslant x^2+y^2<\varepsilon$$

成立，依二元函数极限的定义，证得

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\left[(x^2+y^2)\sin\frac{1}{x^2+y^2}\right]=0.$$

根据二元函数极限的定义，所谓二重极限

$$\lim_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} f(x,\ y)=A,$$

其中A为常数，系指点$P(x,\ y)\in E$按任何方式趋近于$P_0(x_0, y_0)$时，函数$f(x,\ y)$都无限接近于同一常数A. 如果当$P(x,\ y)$以不同的方式趋近于$P_0(x_0, y_0)$时，函数$f(x,\ y)$趋近于不同的常数，就可以断定这函数的极限不存在. 而且当$P(x,\ y)$以某一种特殊的方式趋近于$P_0(x_0,\ y_0)$时，即使函数$f(x,\ y)$无限接近于某一常数，也不能据此断定函数的极限存在. 请看下面的例子.

例5 讨论当$P(x,\ y)\to O(0,\ 0)$时，函数

$$f(x,\ y)=\frac{xy}{x^2+y^2}$$

的极限是否存在.

解 显然，如果点$P(x,\ y)$沿着过原点$O(0,\ 0)$的直线$y=kx$趋近于点$O(0,\ 0)$时，则有

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y=kx\to 0}} f(x,\ y)=\lim_{x\to 0}\frac{kx^2}{x^2+k^2x^2}=\frac{k}{1+k^2}.$$

其值因k而异，这与极限定义中$P(x,\ y)$按任何方式趋近于$P_0(x_0, y_0)$时，$f(x,\ y)$都无限接近于同一数值的要求相违背，因此当$P(x,\ y)\to O(0,\ 0)$时，函数的极限不存在.

如果R^n空间中的n元函数$f(x_1,\ x_2,\ \cdots,\ x_n)$，看作$n$维空间点$P(x_1,\ x_2,\ \cdots,\ x_n)$的函数$f(P)$，那么$n$元函数的极限定义可叙述如下.

定义 设n元函数$u=f(P)$定义在R^n中的点集E上，P_0为E的聚点，A为一常数. 如果对于任意给定的正数ε，都存在正数δ，使得满足不等式