

高等数学

高等学校教材 GAODENG
SHUXUE

下册



叶宗泽

蔡高厅 主编



天津大学出版社

高等数学

(下册)

叶宗泽 蔡高厅
邱忠文 梁立华 编

天津大学出版社

内 容 提 要

本书系高等工业院校适用的数学教材，是在本社1987年版《高等数学》基础上重新组织编写的。全书参照高等工业院校“高等数学课程教学基本要求”，充分注意1987年版《高等数学》中的不足，并吸取多年教学中积累的经验，做到结构进一步合理，论述更简明通顺，内容愈臻完善。

该书分上、下册，下册包括多元函数微分学、重积分、曲线积分与曲面积分、级数、微分方程等5章。

高 等 数 学

(下册)

叶宗泽 蔡高厅
邱忠文 梁立华 编

*

天津大学出版社出版

(天津大学内)

河北省邮电印刷厂印刷

新华书店天津发行所发行

*

开本：850×1168毫米 1/32 印张：12 5/8 字数：326千

1994年8月第一版 1996年9月第二次印刷

印数：10 101—16 100

ISBN 7-5618-0604-3

0·61 定价：16.50元

目 录

第八章 多元函数微分学	(1)
§ 1 多元函数的概念	(1)
一 平面点集与区域	(1)
二 多元函数的概念	(4)
三 二元函数的极限与连续性	(7)
§ 2 偏导数	(13)
一 偏导数的概念	(13)
二 高阶偏导数	(18)
§ 3 全微分及其应用	(22)
一 全微分的概念	(22)
二 全微分在近似计算中的应用	(28)
§ 4 多元复合函数微分法	(32)
一 多元复合函数微分法	(32)
二 全微分形式不变性	(39)
三 多元复合函数的高价偏导数	(40)
§ 5 隐函数微分法	(43)
一 一个方程所确定的隐函数的微分法	(43)
二 方程组所确定的隐函数的微分法	(46)
§ 6 方向导数与梯度	(52)
一 方向导数	(52)
二 梯度	(54)
§ 7 偏导数在几何上的应用	(57)
一 空间曲线的切线与法平面	(57)
二 曲面的切平面与法线	(62)

§ 8	多元函数的极值及求法	(66)
一	多元函数的极值及求法	(66)
二	条件极值——拉格朗日乘数法	(74)
§ 9*	二元函数的台劳公式	(79)
一	二元函数的台劳公式	(79)
二	二元函数极值充分条件的证明	(84)
第九章	重积分	(88)
§ 1	二重积分的概念及性质	(88)
一	二重积分问题的引例	(88)
二	二重积分的定义	(90)
三	二重积分的性质	(91)
§ 2	二重积分的计算	(93)
一	直角坐标系中二重积分的计算方法	(93)
二	极坐标系中二重积分的计算方法	(103)
*三	二重积分的一般变量代换	(109)
§ 3	三重积分的概念及性质	(112)
一	三重积分的定义	(112)
二	三重积分的性质	(113)
§ 4	三重积分的计算	(115)
一	直角坐标系中三重积分的计算法	(115)
二	柱面坐标系中三重积分的计算法	(121)
三	球面坐标系中三重积分的计算法	(123)
*四	三重积分的一般变量代换	(127)
§ 5	重积分的应用	(130)
一	几何方面的应用	(130)
二	物理、力学方面的应用	(134)
第十章	曲线积分及曲面积分	(140)

§ 1	第一类曲线积分	(140)
一	第一类曲线积分的概念及性质	(140)
二	第一类曲线积分的计算	(143)
§ 2	第二类曲线积分	(146)
一	矢量场的概念	(147)
二	第二类曲线积分的概念及性质	(147)
三	第二类曲线积分的计算法	(151)
四	第一、二类曲线积分之间的关系	(158)
§ 3	格林公式	(159)
一	格林 (Green) 公式	(160)
二	平面曲线积分与路径无关的条件	(168)
§ 4	第一类曲面积分	(174)
一	第一类曲面积分的概念及性质	(174)
二	第一类曲面积分的算法	(176)
§ 5	第二类曲面积分	(178)
一	有向曲面	(178)
二	第二类曲面积分的概念及性质	(179)
三	第二类曲面积分的算法	(184)
§ 6	高斯公式 曲面积分与曲面无关的条件	(189)
一	高斯 (Gauss) 公式	(189)
二	曲面积分与曲面无关的条件	(194)
§ 7	斯托克斯公式 空间曲线积分与路径无关的条件	(196)
一	斯托克斯 (Stokes) 公式	(196)
二	空间曲线积分与路径无关的条件	(201)
§ 8	矢量场的散度与旋度	(202)
一	矢量场的散度	(202)
二	矢量场的旋度	(205)
三	哈密尔顿 (Hamilton) 算子	(209)

第十一章 级数	(213)
§ 1 数项级数.....	(213)
一 无穷级数的基本概念.....	(213)
二 级数的基本性质.....	(216)
三 正项级数敛散性的判别法.....	(220)
四 任意项级数敛散性的判别法.....	(231)
§ 2 幂级数.....	(240)
一 幂级数的收敛区间与收敛半径.....	(241)
二 幂级数的性质.....	(247)
§ 3 函数的幂级数展开.....	(255)
一 台劳级数.....	(255)
二 函数展开成幂级数.....	(258)
三 台劳级数的应用.....	(265)
§ 4* 函数项级数的一致收敛性和一致收敛级数的基 本性质.....	(274)
一 函数项级数的一致收敛性.....	(276)
二 一致收敛级数的基本性质.....	(281)
§ 5 傅立叶级数.....	(286)
一 三角函数系的正交性.....	(288)
二 傅立叶级数.....	(290)
三 正弦级数与余弦级数.....	(298)
四 一般周期函数的傅立叶级数.....	(304)
五* 傅立叶级数的复数形式.....	(310)
第十二章 微分方程	(315)
§ 1 微分方程的基本概念.....	(315)
一 引例.....	(315)
二 微分方程的基本概念.....	(318)
§ 2 一阶微分方程.....	(320)

一	可分离变量方程	(320)
二	齐次方程	(324)
三	一阶线性方程	(327)
四	全微分方程	(332)
五	一阶微分方程应用举例	(338)
*六	一阶微分方程的近似解法	(345)
§ 3	可降阶的高阶微分方程	(350)
一	$y^{(n)} = f(x)$ 型	(351)
二	$y'' = f(x, y')$ 型	(352)
三	$y'' = f(y, y')$ 型	(353)
四	可降阶的高阶微分方程应用举例	(354)
§ 4	线性微分方程解的结构	(357)
一	线性齐次微分方程解的结构	(358)
二	线性非齐次微分方程解的结构	(360)
§ 5	常系数线性微分方程	(361)
一	常系数线性齐次微分方程	(361)
二	常系数线性非齐次微分方程	(366)
三	常系数线性微分方程的应用举例	(375)
§ 6	变系数线性微分方程	(382)
一	二阶变系数线性齐次方程	(383)
二	二阶变系数线性非齐次方程	(386)
三	欧拉方程	(388)
§ 7	常微分方程的幂级数解法简介	(390)

第八章 多元函数微分学

到现在为止，本书研究过的函数都是仅有一个自变量的函数，叫做一元函数或单元函数。在自然科学与工程技术中的许多问题，往往是与多种因素有关，而这些因素之间在数量方面又存在着相互联系、相互制约的规律，这种客观存在的规律反映到数学上，就是一个变量依赖于多个变量的关系，这就是本章将要介绍的多元函数微分学的内容。

本章以二元函数为主，讨论它的微分法和应用，而二元以上的函数则可以类推。多元函数微分学是在一元函数微分学的基础上发展起来的。它的一些基本概念及研究问题的思想方法虽然与一元函数的情形相仿，但是由于自变量个数的增加，将会产生一些新的问题。因此学习本章内容时应注意与一元函数对照，比较它们的异同，掌握多元函数的特点。

§ 1 多元函数的概念

一 平面点集与区域

在讨论一元函数的有关概念时，要考虑变量的变化范围，经常用到区间与邻域的概念。由于研究二元函数的需要，我们首先介绍平面点集与区域的基本知识，把邻域的概念推广到平面上。

当考虑两个变量 x 与 y 时， x 与 y 的一组值 (x, y) 可以看作平面上一点 P ， x, y 为该点的直角坐标，于是两个变量 x 与 y 的变化范围（或取值范围）就相当于平面上某个点集。数学中常用 $D, E, F, \dots$ 等大写英文字母表示平面上的点集。例如

$$D = \{(x, y) | x > 0, y > 0\};$$

$$E = \{(x, y) | x^2 + y^2 \leq 1\}.$$

D 表示平面上所有满足 $x > 0$ 、 $y > 0$ 的点 (x, y) 所组成的集合, 即由直角坐标平面上第一象限的一切点所组成的集合. E 表示平面上所有满足 $x^2 + y^2 \leq 1$ 的点 (x, y) 所组成的集合, 即由圆心在原点的单位圆内及圆周上的一切点所组成的集合.

1 邻域

设 $P_0(x_0, y_0)$ 是平面上一点, δ 是某一正数, 那么点集 $\{(x, y) | (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 < \delta^2\}$ 称为点 P_0 的 δ 邻域, 记为 $U(P_0, \delta)$, 即

$$U(P_0, \delta) = \{(x, y) | (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 < \delta^2\}.$$

在几何上, 邻域 $U(P_0, \delta)$ ($\delta > 0$) 就是平面上以点 $P_0(x_0, y_0)$ 为圆心、 δ 为半径的圆内的点 $P(x, y)$ 的全体.

δ 称为邻域 $U(P_0, \delta)$ 的半径. 如果不需要特别强调邻域的半径 δ , 就用 $U(P_0)$ 来表示 P_0 的某一邻域.

2 区域

设 E 为平面上的点集, 点 $P \in E$. 如果存在点 P 的某个邻域 $U(P)$, 使 $U(P)$ 内的点都属于 E , 则称 P 为 E 的一个内点 (见图8-1). 纯由内点组成的点集称为开集.

例如点集 $E_1 = \{(x, y) | x^2 + y^2 < 1\}$ 中的每一个点都是 E_1 的内点, 因此 E_1 为开集.

设 E 为平面上的点集, 如果点 P 的任意邻域内既有属于 E 的点, 也有不属于 E 的点, 则称 P 为 E 的一个边界点 (见图8-2). 至于点

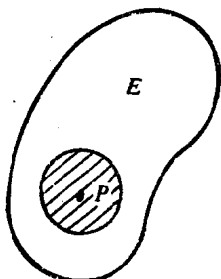


图 8-1

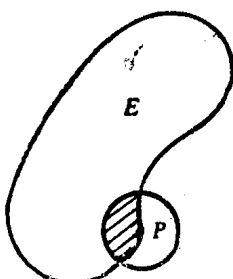


图 8-2

P 本身可以属于 E ,也可以不属于 E .点集 E 的边界点的全体便称为 E 的边界.

例如上例的点集 E_1 , 圆周 $x^2+y^2=1$ 上的每一点都是 E_1 的边界点, 此圆周是 E_1 的边界.

设 E 是开集, 如果对于 E 内的任意两点 P_1 与 P_2 , 都能用折线把它们连接起来, 而该折线上的点都属于 E , 则称开集 E 是连通的. 连通的开集就称为区域或开区域. 开区域连同它的边界一起称为闭区域.

例如, $\{(x, y) | x^2+y^2 < 1\}$, $\{(x, y) | x-y > 0\}$ 都是区域. $\{(x, y) | x^2+y^2 \leq 1\}$, $\{(x, y) | x-y \geq 0\}$ 都是闭区域.

如果存在正数 M , 使得对于区域 D 中任何点 $P(x, y)$, 皆有 $|x| \leq M$, $|y| \leq M$, 就称区域 D 是有界的, 否则区域就称为无界的.

例如 $\{(x, y) | x^2+y^2 < 1\}$ 是有界区域, 而 $\{(x, y) | x-y > 0\}$ 是无界区域.

3 聚点

设 E 是平面上的点集, P 是平面上一点, 它可以属于 E , 也可以不属于 E . 如果在点 P 的任意邻域内总有无多个点属于点集 E , 则称 P 为点集 E 的聚点.

显然, 如果 E 是一个区域, 则 E 的内点及边界点都是 E 的聚点.

又如, 点集 $D = \{(x, y) | 0 < x^2+y^2 \leq 1\}$, 点 $O(0, 0)$ 既是 D 的边界点又是 D 的聚点, 但是 O 不属于 D . 又圆周 $x^2+y^2=1$ 上的每一点既是 D 的边界点, 也是 D 的聚点, 然而这些聚点都属于 D .

4 n 维空间

在数轴上的点 M 与实数 x 是一一对应的, 那么实数的全体就表示数轴上一切点的集合, 记为 R^1 , 叫做一维空间. 类似地, 在平面上建立直角坐标系后, 平面上的点 M 与二元有序数组 (x, y) 是一一对应的, 那么二元有序数组 (x, y) 的全体就表示平面上一切

点的集合, 记为 R^2 , 叫做二维空间. 在空间中建立直角坐标系后, 空间中的点 M 与三元有序数组 (x, y, z) 是一一对应的, 那么三元有序数组 (x, y, z) 的全体就表示空间中一切点的集合, 记为 R^3 , 叫做三维空间. 如此加以推广, 我们把 n 元有序数组 $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ 的全体所组成的集合记为 R^n , 叫做 n 维空间, 而每一个 n 元有序数组 $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ 表示 n 维空间中一个点 M , 常记为 $M(x_1, x_2, \dots, x_n)$, 数 $x_i (i=1, 2, \dots, n)$ 叫做点 M 的第 i 个坐标.

设点 $M(x_1, x_2, \dots, x_n), N(y_1, y_2, \dots, y_n) \in R^n$, 我们规定 M, N 两点间的距离为

$$|MN| = \sqrt{(y_1 - x_1)^2 + (y_2 - x_2)^2 + \dots + (y_n - x_n)^2}.$$

显然, 当 $n=1, 2, 3$ 时, 上式就是解析几何中在直线上、平面上、空间中两点间的距离公式.

有了两点间的距离规定之后, 就可以把平面点集中邻域的概念推广到 R^n 中去. 设 $P_0 \in R^n$, δ 是某一正数, 那么 R^n 中的点集

$$U(P_0, \delta) = \{P \mid |PP_0| < \delta, P \in R^n\}$$

就称为点 P_0 的 δ 邻域. 有了邻域的概念, 就可以定义 R^n 中点集的内点、边界点、区域、聚点等概念, 这里不一一赘述.

二 多元函数的概念

我们着重介绍二元函数的概念. 三元或更多元的函数, 可以作类似的推广.

在很多具体问题的数量方面, 经常会遇到一个变量依赖于多个变量的关系, 下面先看几个例子.

例1 设由电阻 R_1, R_2 并联的电路, 其总电阻为 R . 据电学知识可知 R 与 R_1, R_2 之间具有以下关系

$$R = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2}.$$

对于点集 $A = \{(R_1, R_2) \mid R_1 > 0, R_2 > 0\}$ 中的每一点 $P(R_1, R_2)$, 通过上式都有一个确定的数 R 与之对应.

例2 中心在原点 $O(0, 0)$, 在 x 轴、 y 轴、 z 轴上的半轴依次

为 a 、 b 、 c 的上半椭球面的方程为

$$z = c \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}}, \quad (a > 0, b > 0, c > 0).$$

对于平面点集 $A = \{(x, y) | \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \leq 1\}$ 中每一点 $P(x, y)$ 通过上式都有一个确定的数 z 与之对应。

例3 一定量的理想气体的体积 V ，压强 p 和绝对温度 T 之间存在关系

$$V = R \frac{T}{p},$$

这里 R 是常数。对于平面点集 $A = \{(p, T) | p > 0, T > T_0\}$ （其中 T_0 为该气体的液化点）中每一点 $P(p, T)$ ，通过上面关系或都有一个确定的数 V 与之对应。

上面三个例子的实际意义虽然各不相同，但它们却有共同的特性，抽出其共性就可得出二元函数的定义。

定义 设有平面点集 A 和数集 B 。如果对于 A 中的每一点 $P(x, y)$ ，通过确定的规律 f 都有唯一的实数 $z \in B$ 与之对应，则称 f 是 A 上的函数，记为 $P(x, y) \xrightarrow{f} z$ ，习惯记作

$$z = f(x, y) \text{ 或 } z = f(P).$$

也称 z 是 x, y 的函数，或 z 是点 $P(x, y)$ 的函数，而 x, y 称为自变量， z 称为因变量，具有两个自变量的函数 $f(x, y)$ 通常称为二元函数。

定义中的点集 A 称为函数 $z = f(x, y)$ 的定义域，当点 $P(x, y)$ 遍取 A 中的一切点时， z 的对应值的全体组成的数集 $B_f (\subseteq B)$ ， $B_f = \{z | z = f(x, y), (x, y) \in A\}$ 称为函数的值域。

根据二元函数的定义，可知例1中的 R 是平面点集 $A = \{(R_1, R_2) | R_1 > 0, R_2 > 0\}$ 上的函数，其定义域是区域 $R_1 > 0, R_2 > 0$ ；例2中的 z 是平面点集 $A = \{(x, y) | \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \leq 1\}$ 上的函数，其定义域是闭区域 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \leq 1$ ；例3中的 V 是平面点集 $A = \{(p,$

$T) | p > 0, T > T_0 \}$ 上的函数, 其定义域是区域 $p > 0, T > T_0$.

从映射的概念看, 二元函数 f 实质上就是一个由点集 A 到数集 B 的映射, 数 z 就是点 $P(x, y)$ 在映射 f 下的象, 而点 $P(x, y)$ 是 z 的原象.

类似地可以定义三元函数 $u = f(x, y, z)$ 及三元以上的函数. 一般地, 如果把函数定义中的平面点集 A 换成 n 维空间 R^n 中的点集 A , 则可类似地定义 n 元函数 $u = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$, 也可记为 $u = f(P)$, 这里点 $P(x_1, x_2, \dots, x_n) \in A$. 显然, $n = 1$ 时, 就得到一元函数. 二元及二元以上的函数统称为多元函数.

设已给二元函数 $z = f(x, y)$, 其定义域为 D . 对任意取定的点 $P_0(x_0, y_0) \in D$, 对应的函数值记为 $z_0 = f(x_0, y_0)$, 在空间直角坐标系 $Oxyz$ 中就确定了一点 $M_0(x_0, y_0, z_0)$. 在一般情况下, 当点 $P(x, y)$ 遍取函数定义域 D 的一切点时, 对应的点 $M(x, y, z)$ 的全体组合成一个空间点集 $\{(x, y, z) | z = f(x, y), (x, y) \in D\}$, 这个点集称为二元函数的图形, 其图形一般是一张曲面 (见图 8-3).

如例 2 中的二元函数

$$z = c \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}}$$

的图形是中心在原点, 三个半轴为 a, b, c 的上半椭球面 (见图 8-4).

在上面的函数定义中, 规定对点集 A 中的每一点 P , 通过确定的规律 f 都只有唯一的实数 z 与之对应, 这样定义的函数是单值函数. 有时在点集 A 中有这样的点 P , 它通过 f 有多个实数 z 与之对应, 例如由方程

$$x^2 + y^2 + z^2 = R^2$$

在闭区域 $D = \{(x, y) | x^2 + y^2 \leq R^2\}$ 上, 除在圆周 $x^2 + y^2 = R^2$ 上的点而外对任意的点 $P(x, y) \in D$, 通过上述方程有两个实数 $z = \sqrt{R^2 - x^2 - y^2}$ 与 $z = -\sqrt{R^2 - x^2 - y^2}$ 与之对应, 这时我们

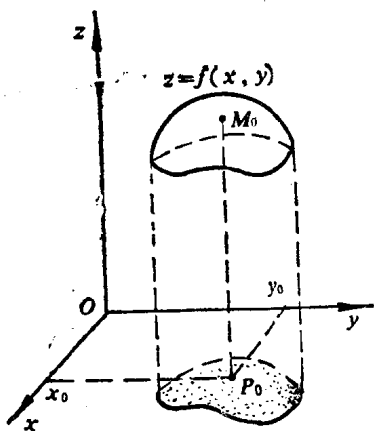


图 8-3

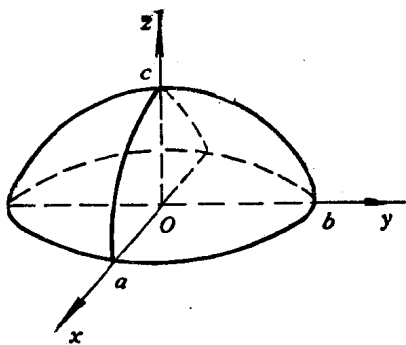


图 8-4

称由该方程确定了多值函数。通常把多值函数分成几个单值函数来讨论，如上例可以分为两个单值函数：

$$z = \sqrt{R^2 - x^2 - y^2} \text{ 与 } z = -\sqrt{R^2 - x^2 - y^2}.$$

以后如不作特别声明，本书所讨论的函数都是指单值函数。

三 二元函数的极限与连续性

1 二元函数的极限

设函数 $z = f(x, y)$ 定义在平面点集 E 上，点 $P_0(x_0, y_0)$ 为点集 E 的聚点，我们来讨论 $P(x, y) \rightarrow P_0(x_0, y_0)$ (其中 $P \in E$)，即 $x \rightarrow x_0, y \rightarrow y_0$ 时函数 $z = f(x, y)$ 的极限。

这里必须指出， $P \rightarrow P_0$ 是指点 P 以任意的方式趋于 P_0 ，亦即两点 P 与 P_0 之间的距离趋于零，也就是

$$|P_0 P| = \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} \rightarrow 0.$$

其中 $P \in E$ ，因为 P_0 是点集 E 的聚点，那么在点 P_0 的任意邻域内都有属于 E 的无限多个点，所以点 P 以任意方式趋于 P_0 总是可能的。

如果在点 $P(x, y) \rightarrow P_0(x_0, y_0)$ 的过程中， $P(x, y)$ 所对应的函数值 $f(x, y)$ 无限接近于一个常数 A ，就说当 $x \rightarrow x_0, y \rightarrow y_0$ 时，函数 $z = f(x, y)$ 以 A 为极限。下面仿照一元函数极限的定义，

用“ $\varepsilon-\delta$ ”的语言方式来描述二元函数的极限。

定义 设二元函数 $z=f(x, y)$ 定义在点集 E 上, $P_0(x_0, y_0)$ 是 E 的聚点, A 为一常数. 如果对于任意给定的正数 ε , 都存在正数 δ , 使得满足不等式

$$0 < |PP_0| = \sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2} < \delta$$

的一切点 $P(x, y) \in E$, 恒有

$$|f(x, y) - A| < \varepsilon$$

成立, 则称当 $x \rightarrow x_0, y \rightarrow y_0$ 时, 函数 $z=f(x, y)$ 以 A 为极限, 记为

$$\lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ y \rightarrow y_0}} f(x, y) = A,$$

或 $f(x, y) \rightarrow A (\rho = |PP_0| \rightarrow 0)$.

二元函数的极限也叫做二重极限.

例 4 证明 $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \left[(x^2 + y^2) \sin \frac{1}{x^2 + y^2} \right] = 0$.

证明 由于

$$|(x^2 + y^2) \sin \frac{1}{x^2 + y^2} - 0| =$$

$$|x^2 + y^2| \cdot \left| \sin \frac{1}{x^2 + y^2} \right| \leq x^2 + y^2,$$

因此, 对任意给定的 $\varepsilon > 0$, 取 $\delta = \sqrt{\varepsilon} > 0$, 当

$$0 < \sqrt{(x-0)^2 + (y-0)^2} < \delta$$

时, 恒有

$$\left| (x^2 + y^2) \sin \frac{1}{x^2 + y^2} - 0 \right| \leq x^2 + y^2 < \varepsilon$$

成立, 依二元函数极限的定义, 证得

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \left[(x^2 + y^2) \sin \frac{1}{x^2 + y^2} \right] = 0.$$

根据二元函数极限的定义, 所谓二重极限

$$\lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ y \rightarrow y_0}} f(x, y) = A,$$

其中 A 为常数, 系指点 $P(x, y) \in E$ 按任何方式趋近于 $P_0(x_0, y_0)$ 时, 函数 $f(x, y)$ 都无限接近于同一常数 A . 如果当 $P(x, y)$ 以不同的方式趋近于 $P_0(x_0, y_0)$ 时, 函数 $f(x, y)$ 趋近于不同的常数, 就可以断定这函数的极限不存在. 而且当 $P(x, y)$ 以某一种特殊的方式趋近于 $P_0(x_0, y_0)$ 时, 即使函数 $f(x, y)$ 无限接近于某一常数, 也不能据此断定函数的极限存在. 请看下面的例子.

例 5 讨论当 $P(x, y) \rightarrow O(0, 0)$ 时, 函数

$$f(x, y) = \frac{xy}{x^2 + y^2}$$

的极限是否存在.

解 显然, 如果点 $P(x, y)$ 沿着过原点 $O(0, 0)$ 的直线 $y = kx$ 趋近于点 $O(0, 0)$ 时, 则有

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y = kx \rightarrow 0}} f(x, y) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{kx^2}{x^2 + k^2 x^2} = \frac{k}{1 + k^2}.$$

其值因 k 而异, 这与极限定义中 $P(x, y)$ 按任何方式趋近于 $P_0(x_0, y_0)$ 时, $f(x, y)$ 都无限接近于同一数值的要求相违背, 因此当 $P(x, y) \rightarrow O(0, 0)$ 时, 函数的极限不存在.

如果 R^n 空间中的 n 元函数 $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$, 看作 n 维空间点 $P(x_1, x_2, \dots, x_n)$ 的函数 $f(P)$, 那么 n 元函数的极限定义可叙述如下.

定义 设 n 元函数 $u = f(P)$ 定义在 R^n 中的点集 E 上, P_0 为 E 的聚点, A 为一常数. 如果对于任意给定的正数 ε , 都存在正数 δ , 使得满足不等式