工程数学

# 计算方法

聂铁军 编

国防工业出版社

工 程 数 学

# 计 算 方 法

聂铁军 编

国防工业出版社

## 内 容 简 介

本书是西北工业大学、北京航空学院、南京航空学院等三院校数学教研室合编的"工程数学"七个分册之一。本分册介绍数值计算的基本概念和基本方法，着重于工程计算中的常用算法，如方程的近似解法、线性代数计算方法、代数插值、曲线拟合、数值微分与数值积分、常微分方程的数值解法、偏微分方程的差分解法等。书中附有适量习题，书后附习题答案。

本书可作为高等工科院校试用教材，也可供有关科技人员参考。



工程数学
计算方法
聂铁军 编
*
国防工业出版社出版
新华书店北京发行所发行 各地新华书店经售
国防工业出版社印刷厂印装
*
787×1092 1/32 印张 6 7/8 143千字
1982年7月第一版 1982年7月第一次印刷 印数：00,001—27,000册
统一书号：15034·2307 定价：0.73元

# 前　言

本书是西北工业大学、北京航空学院、南京航空学院等三院校数学教研室合编的一套"工程数学"教材之一。全套教材共分七册出版：矢量分析、复变函数、积分变换、线性代数、计算方法、数学物理方程与特殊函数、概率论与数理统计。

本册介绍数值计算的基本概念和基本方法，着重于工程计算中的常用算法，如方程的近似解法、线性代数计算方法、代数插值、曲线拟合、数值微分与数值积分、常微分方程的数值解法、偏微分方程的差分解法等。

本书各章内容具有一定的相对独立性，可以根据需要予以取舍。各章配有适量习题，书后附有习题答案。阅读本书只需具有一般的高等数学知识或线性代数基本知识。

本书由西北工业大学聂铁军编写，由南京航空学院何柏庆主审。西北工业大学张德珍、傅同奇两同志分别提供了第一、二章和第五章的初稿。参加审稿的还有西北工业大学、南京航空学院、北京航空学院、沈阳航空工业学院和南昌航空工业学院数学教研室的部分同志。我们对在本书编写过程中给予大力支持和提供宝贵意见的所有同志，在此致以

衷心的感谢。

由于我们的水平所限，书中的缺点和错误在所难免，诚望同志们批评指正。

编　　者

# 目　录

# 计 算 方 法

# 第一章　误差知识

人们在实践活动中所处理的数，往往是某一物理量在一定“误差范围”内的近似数值。在实际计算中，特别是使用快速电子数字计算机进行计算时，总是用具有有限位数的数值来进行的。如果参与计算的数的位数是无限的，就要用它们的近似值进行计算。

因此，就产生这样的问题：怎样从原始数据的误差估计出结果的误差；原始数据应具有怎样的准确程度，才能保证结果的误差不会超过指定的限度。

用数值计算方法解决科学技术中的具体问题时，误差的来源不外乎以下几种：

1．数学描述与实际现象之间的误差

各种实际问题的数学描述，都是在一定条件下理想化了的模型，它与实际现象之间总存在误差，这种误差称为“**描述误差**”。

2．观测误差

在各种计算公式中，通常包含有一些参量，而这些参量往往是由观测和实验得到的，它们和实际的大小之间有误差，这种误差称为“**观测误差**”。

3．截断误差

在计算问题中，常遇到超越运算，它们是要求用极限或无穷过程来求得的。但是，在实际上人们只能进行有限的算

术运算，只能用有限的步骤来求其近似值。例如，常用收敛无穷级数的前几项来代替无穷级数，也就是抛弃了无穷级数的后段，由此产生的误差叫“**截断误差**”。

4. 舍入误差

对于参与计算的数中，无穷小数用有限小数代替，或以位数较少的有限小数代替位数较多的有限小数，例如用3.14代替 $\pi$，用 1.414 代替 $\sqrt{2}$ 等等。这样所产生的误差叫“**舍入误差**”。

误差的来源虽然有以上种种，且了解这些对于数值计算是有帮助的，但前两种往往不是计算工作者所能独立完成的，因此我们下面将着重研究“截断误差”与“舍入误差”。

## §1.1　绝对误差、有效数字、相对误差

设 $x^*$ 代表准确值 $x$ 的一个近似值。我们定义

$$e^* = x - x^* \tag{1.1.1}$$

为近似值 $x^*$ 的**绝对误差**。通常无法准确地算出绝对误差的真值，只能根据具体测量或计算的情况估计它的绝对值的范围，也就是去估计 $|e^*|$ 的上界。设

$$|e^*| = |x - x^*| \leqslant \varepsilon^* \tag{1.1.2}$$

那末，$\varepsilon^*$ 就叫做近似值 $x^*$ 的**绝对误差限**。以后也把它简称为绝对误差。

例如，用有毫米刻度的米尺测量不超过 1 米的长度 $x$，读数法如下：如果长度接近于毫米刻度 $x^*$，就读出那个刻度数 $x^*$ 作为长度的近似值。显然，这个近似值的绝对误差为半毫米。

有时也用

$$x = x^* \pm \varepsilon^*$$

表示近似值 $x^*$的精确度或准确值所在的范围。

我们表示一个近似数时，为了同时反映它的准确程度，常常用到“有效数字”的概念。设有一数 $x$，经过四舍五入，得到它的近似值

$$x^* = \pm(x_1 \cdot 10^{-1} + x_2 \cdot 10^{-2} + \cdots + x_n \cdot 10^{-n})10^m \quad (1.1.3)$$

其中 $x_1$, $x_2$, …, $x_n$ 都是 0, 1, 2, …, 9 这十个数字之一，$x_1 \neq 0$； $n$ 是正整数， $m$ 是整数。这里 $x^*$的绝对误差是

$$|x - x^*| \leqslant \frac{1}{2} \times 10^{m-n} \qquad (1.1.4)$$

这时我们说：$x^*$作为 $x$ 的近似值，具有 $n$ 位“**有效数字**”。其中 $x_1$, $x_2$, …, $x_n$ 都是 $x^*$的有效数字。$x^*$称为具有 $n$ 位有效数字的“有效数”，也可以说它准确到第 $n$ 位。

通常我们书写数字时，要求从其最左边第一位不是 0 的数字起，到它最右边的一位数字止，都是有效数字。例如 0.00203 的有效数字为 2、0、3。3.14 的有效数字为 3,1,4。需要注意的是有效数 0.0023 与 0.002300 是不同的，因为前者具有两位有效数字，其绝对误差不超过$\frac{1}{2} \times 10^{-4}$，后者具有四位有效数字，其绝对误差不超过$\frac{1}{2} \times 10^{-6}$。

下面我们再讨论相对误差的概念。

绝对误差的大小不能完全反映近似值的准确程度，例如设

$$x = 10 \pm 1$$

$$y = 1000 \pm 5$$

近似数 $y^* = 1000$ 的绝对误差比 $x^* = 10$ 的绝对误差大四倍，

不过若考虑到数本身的大小，在 1000 内差 5 比在 10 内差 1，显然前者更精确些。这说明绝对误差的大小不能完全地表明一个近似数的准确程度。为了表明一个近似数的准确程度，有必要引入相对误差的概念。

我们定义 $x$ 的近似值 $x^*$的相对误差为

$$e_r^* = \frac{e^*}{x^*} = \frac{x - x^*}{x^*} \tag{1.1.5}$$

相对误差说明了 $x^*$的绝对误差与 $x^*$本身比较起来所占的比例，它可以反映一个近似数的准确程度。

但是和绝对误差一样，我们不能定出 $e_r^*$ 的准确值，只能估计它的范围。如果

$$|e_r^*| = \left|\frac{x - x^*}{x^*}\right| \leqslant \varepsilon_r^* \tag{1.1.6}$$

我们就把这个上界 $\varepsilon_r^*$ 称做 $x^*$ 的**相对误差限**。以后也把它简称为相对误差。

一个具有 $n$ 位有效数字的近似值 $x^*$ 的相对误差可如下估计，由式（1.1.3）知

$$x_1 \cdot 10^{m-1} \leqslant |x^*| \leqslant (x_1 + 1) \cdot 10^{m-1} \tag{1.1.7}$$

所以

$$|e_r^*| = \left|\frac{x - x^*}{x^*}\right| \leqslant \frac{\frac{1}{2} \times 10^{m-n}}{x_1 \cdot 10^{m-1}} = \frac{1}{2x_1} \cdot 10^{-(n-1)} \tag{1.1.8}$$

但反过来，我们不能从不等式（1.1.8）推出 $x^*$一定具有 $n$ 位有效数字。例如：$A = \sin 29°20' = 0.4900$，设其近似值 $a = 0.484$，其相对误差为

$$\frac{0.4900-0.484}{0.434}=0.012397<0.0125=\frac{1}{2\times4\times10}$$

我们不能由此推出 $a$ 有两位有效数字，这是因为

$$A-a=0.4900-0.484=0.0060>0.005$$

由此可知近似值 $a$ 并不具备两位有效数字。

## §1.2 和、差、积、商的误差估计

### (一) 和、差的误差估计

设 $x$、$y$ 的近似值为 $x^*$、$y^*$，则有

$$(x\pm y)-(x^*\pm y^*)=(x-x^*)\pm(y-y^*) \quad (1.2.1)$$

$$|(x\pm y)-(x^*\pm y^*)|\leqslant|x-x^*|+|y-y^*| \quad (1.2.2)$$

即和或差的绝对误差限不超过各项绝对误差限之和。这个结论对于任意多个数之和也是正确的。

至于相对误差，对和与差要分别讨论如下，这里再设 $x^*$、$y^*>0$，则和的相对误差有如下估计：

$$\frac{(x+y)-(x^*+y^*)}{x^*+y^*}$$

$$=\frac{x-x^*}{x^*}\,\frac{x^*}{x^*+y^*}+\frac{y-y^*}{y^*}\,\frac{y^*}{x^*+y^*} \quad (1.2.3)$$

不妨设 $x^*$为相加两项中具有最大相对误差的一项，则有

$$\left|\frac{(x+y)-(x^*+y^*)}{x^*+y^*}\right|\leqslant\left|\frac{x-x^*}{x^*}\right|$$

$$\times\left(\frac{x^*}{x^*+y^*}+\frac{y^*}{x^*+y^*}\right)=\left|\frac{x-x^*}{x^*}\right| \quad (1.2.4)$$

这就是说，和的相对误差限不超过相加各项中最不准确的一项的相对误差限。这个结论对于任意多个数之和也是正确的。

差的相对误差为

$$\frac{(x-y)-(x^*-y^*)}{x^*-y^*}=\frac{x-x^*}{x^*}\cdot\frac{x^*}{x^*-y^*}$$

$$-\frac{y-y^*}{y^*}\cdot\frac{y^*}{x^*-y^*} \qquad (1.2.5)$$

由此可见，当 $x^*\gg y^*$ 时，$\frac{y^*}{x^*-y^*}$ 很小，上式右边第二项可以忽略不计，此时有

$$\left|\frac{(x-y)-(x^*-y^*)}{x^*-y^*}\right|\approx\left|\frac{x-x^*}{x^*}\right| \qquad (1.2.6)$$

即被减数和减数相差很大时，其中大数的相对误差起决定性的作用。当 $x^*$ 与 $y^*$ 相差不多时，由 (1.2.5)式可知 $x^*-y^*$ 的相对误差可能很大，有效数字的位数就可能大大减少。例如 $13.5846-13.5839=0.0007$，因为减数和被减数的相对误差不大于 $0.5\times10^{-5}$，而它们的差的相对误差可能不小于 $0.5\times10^{-5}$，这样在这个小的差数中，可能连一个有效数字都没有。因此在计算中应尽量设法避免两个相差很小的数相减。如果遇到这种情况，或变换计算公式以防止这类情况出现，或对 $x^*$ 和 $y^*$ 多保留几位有效数字进行运算。例如计算 $y=2-\sqrt{4-x}$，当 $x$ 很小时，计算式可改写成如下形式：

$$y=\frac{x}{2+\sqrt{4-x}}$$

后面这个计算公式虽然比较复杂一些，不过当 $x$ 很小时，用原式计算要损失几位有效数字，必须多保留几位有效数字才能保证计算结果的准确程度，用后面公式计算就不会发生这种问题。

### （二）积、商的误差估计

我们不妨设 $x^*$、$y^*$均为正数，任何一数 $x^*$的绝对误差可记为 $x-x^*=dx^*$，相对误差可记为$\frac{x-x^*}{x^*}=\frac{dx^*}{x^*}=d\ln x^*$。则得到乘积和商的绝对误差分别为

$$d(x^*y^*)=x^*dy^*+y^*dx^* \tag{1.2.7}$$

及

$$d\left(\frac{x^*}{y^*}\right)=\frac{y^*dx^*-x^*dy^*}{y^{*2}} \tag{1.2.8}$$

乘积和商的相对误差分别为

$$d\ln(x^*y^*)=d(\ln x^*+\ln y^*)=\frac{dx^*}{x^*}+\frac{dy^*}{y^*} \tag{1.2.9}$$

及

$$d\ln\frac{x^*}{y^*}=d(\ln x^*-\ln y^*)$$

$$=\frac{dx^*}{x^*}-\frac{dy^*}{y^*} \tag{1.2.10}$$

由式（1.2.9）与（1.2.10）我们可以得出结论：积（或商）的相对误差限不超过参与运算的两数的相对误差限之和。

另外需要注意的是，由式（1.2.8）可以看出，当 $y^*$很小时，商的绝对误差就会很大，在计算时应注意避免这种情况出现。

应当指出，上述关于和、差、积、商运算误差限的估计法则，是按最坏的可能情况推出的，因而是十分保守的估计。一个计算方案的完成，往往需要做大量的四则运算，如果我们对计算的每一步都按上述法则进行估计，势必需要过多地保留数据的位数，这不仅费时费力，也是不必要的。事实上出现这种最坏的情况可能性很小，因此在实际计算时，为了保证结果的精确度，只需视计算量的大小，多取一至二位有效

数字进行运算即可。对于这方面的问题，在有关计算误差的概率估计的文献中已有很多论述，由于这已超出本书所讨论的要求，这里就不介绍了。

## 习 题 一

1. 证明如果近似数的相对误限小于$\frac{1}{2(x_1+1)}\cdot\frac{1}{10^{n-1}}$，那末，这个数便准确到$n$位有效数字，其中$x_1$是第一位有效数字。

2. 下列各数准确到末位数字，试求其和，并估出和的绝对误差：

136.421，28.3，231，68.243，17.482。

3. 计算$t=\sqrt{10}-\pi$的值准确到五位有效数字。