

數學彈性力學的  
幾個基本問題

Н. И. МУСХЕЛИШВИЛИ

# 数学弹性力学的 几个基本问题

Н. И. Мусхелишвили 著  
赵 惠 元 译  
王柔怀 陈诗华 褚鹏霁 校

科 学 出 版 社

1958

Академик  
Н. И. МУСХЕЛИШВИЛИ  
НЕКОТОРЫЕ  
ОСНОВНЫЕ ЗАДАЧИ  
МАТЕМАТИЧЕСКОЙ  
ТЕОРИИ  
УПРУГОСТИ  
Изд. АН СССР

本書系根据苏联科学院出版社(Издательство Академии Наук СССР)出版的  
Н. И. Мусхелишвили 院士所著 некоторые основные задачи математической  
теории упругости 第四版(1954)譯出的。

本書共分七章：第一章精鍊完整地叙述彈性理論的一般基础，导出彈性力学的基本方程。第二章到第六章是本書的主要部分，其中严密地討論了与平面基本問題有关的理論，系統地介紹了平面基本問題借助复变函数理論的解法。具体内容：第二章：平面彈性理論的一般公式。第三章：平面彈性理論的基本問題借助幂級数的解法。第四章：柯西型积分。第五章：柯西型积分在解平面彈性理論边界問題上的应用。第六章：平面彈性理論边界問題借助化归黎合問題的解法。第七章：叙述著者所創意的均匀梁与复合梁的拉伸、扭轉、弯曲等問題的理論与解法。本書享有很高声誉，是公認的彈性力学方面的名著。

### 数学彈性力学的几个基本問題

原著者 Н. И. Мусхелишвили

翻譯者 赵 惠 元

出版者 科 学 出 版 社

北京朝陽門大街 117 号

北京市書刊出版業營業許可證出字第 061 号

印刷者 科 学 出 版 社 上 海 印 刷 厂

总經售 新 华 書 店

1958 年 2 月 第 一 版 書号：1039 字数：587,000

1958 年 2 月 第 一 次 印 刷 开本：787×1092 1/18

(號) 0001—2,088 印張：30 2/9 插頁：3

定价：(10) 5.30 元

## 第 四 版 序 言

本版异于前版的是,在原書里做了很多补充与修改,其中很多地方所占篇幅虽不大,但往往是很重要的。同时,著者曾注意到主要从事实际应用工作的讀者,也注意到对数学方面的问题有兴趣的讀者。

Г. Ф. Манджавидзе 同志細心地审閱了全書的校样,指出了一些不妥当的地方,并提出了在改进叙述上有裨益的批評意見,著者在此表示深切的感謝。

此外, А. Я. Горгидзе 同志审閱了第一章与第七章的校样,并檢查了某些計算,著者同样表示深切的謝意。

Н. Мухелишвили

1953 年 12 月于梯比里斯

### 第三版序言

本書的第二版是緊接着第一版(1933年)之後在1935年問世的。第二版早已絕版,因我忙於其他工作,致使很久未能着手準備新版。本書曾蒙歡迎並榮獲高獎,都使我有責對於它的再版予以特殊的注意。同時使我更為欣慰的是本書問世不久,就出現了許多著作,在這些著述中把我的方法應用到各種具體問題上或作了重要的補充和推廣。自然,應當把這些著作中的主要成果以及我所得的某些成果都在新版里加以補充。我已盡量地做到這點,但仍恐有些著作會因我不知而被遺漏,謹在此對這些著作的作者致以歉意。

在此版中關於講法的總的安排仍和以前一樣。但是書的本文除了最初兩章和最後一章<sup>1)</sup>外,都經過徹底的改寫和大量的補充,並增加了新的兩章,這就是第四章與第六章。在第四章里,僅有很少的部分是借用了前版的內容;在第六章中,除在前版中已用其他方法給出解答的少數問題不計外,都是由我以及在前版<sup>2)</sup>發行後不久由其他著者得到的成果。

雖然我不認為有可能和必要一一指出對於以前各版所作的所有修改與補充,但是認為必須使讀者注意第五章的 I—III 部分(第 IV 部分是新的)的新的敘述方式。這些部分與前版比較雖然沒有給出原則上新的成果,但是所用方法已為我認為更切合實際的方法所代替。然而我要指出,新的方法(此方法受到 J. Plemelj 在變復函數論方面研究的影響,這些研究在拙著第一版發行以前好久已發表了,可惜當時我不知道)和以前的方法引致同樣的計算。因為這個緣故,而且也可能因為新的方法更要複雜些,我還能肯定這種更改是否做得對,可是不管怎樣,把新的和舊的處理辦法加以比較會有一定的好處的。

最後,我還補充一點,就是我儘可能把所闡述的這些或那些不屬於我的成果的作者詳細地介紹出來,同時對於自己的某些成果也這樣作,雖然有時這些成果甚至是次要的,僅作為例子而引用的。關於我自己的成果,我所以這樣做,並不是為了給它以過高的評價,而僅在避免一些不熟悉拙著以前各版的讀者,遇到某些其他出版物中(主要是外國的)援引本書而未清楚地指出來源時所產生的疑惑。

1) 但是,最後一章的第 IV 部分也經過大大的補充,使得關於梁的拉伸與彎曲的理論有了完善的形式。

2) 這些成果的大部分曾收集在我的“奇異積分方程”(M.—J. 1946)一書中,但是現在我發現把它們放在本書里是非常合適的(因此這些結果在“奇異方程”的下一版中將被刪去)。在這裡,這些成果的敘述已經重新改寫過了,以便把它從上述的書中分離出來。

为了易于参考，我把已引用的著作按作者姓氏的字母顺序列成一表附于书后。在引证时，我举出了著者的名字并在方括弧中注明著者的作品在此表中的号数。

已逝世的 А. Н. Крылов 院士对本书的第一版的序言大大地帮助了本书的改进。他对科学与社会的巨大功绩是众所周知的。我将对他永远怀着深切的感谢和尊敬。

А. Н. Крылов 院士的序言未加任何修改重载于下。在这一版里，我没有能够实现 А. Н. Крылов 在其序言的末尾关于数值解法的发展所说的希望。当然，这并不是我忽视了他的建议的正确性，而遗憾的是因为我对于这点不会做得很好。然而，А. Н. Крылов 的希望已为本书中所引用的其他著者们很好地实现了。

Н. Мухелишвили

1948年10月于梯比里斯

## 第一版序言摘要

本書是我在 1931 年春季应苏联科学院地震学研究所的邀請为該研究所的科學工作人員所編写的講义,以及在 1932 年为苏联科学院物理-数学研究所和列宁格勒大学的数学与力学研究所的研究生們所講过的講义,在內容上經過很多的修改与补充而作成的。当时講义是以大多数已經熟悉彈性理論的基础的人們为对象的,因而是討論一些个别的基本問題,这些問題主要是按我的意願选择的;自然,我所講述的是我曾經研究过的問題。

因此,在本書中对彈性理論只講了很少几章,但是其中的每一章都是相当完整的。在这里我不拟叙述本書的內容,因为讀者只要閱讀一下目录就可以了解其梗概,但是我認為必須指出以下几点。

因为,鑒于本書所涉及的問題,或能引起更广泛的人們,尤其是从事于彈性理論在工程上的应用領域內的人們的兴趣,所以我务使叙述易于为仅熟悉微积分的基础以及复变函数理論初步的讀者所理解。因此,凡是用到积分方程的問題都把它安排在个别的节里,閱讀时可以越过这些地方而不妨碍其他章节的理解。在第一章里所講述的彈性理論的数学基础其篇幅足供不以彈性理論为專業的讀者理解以后各章的內容之用(也許过多)。为了使叙述更易于理解,我避免使用張量,但在为地震研究所編写的講义里張量是使用了的;关于張量的初步知識在补充材料 I 里有所叙述。补充材料 II 与 III 是討論数学的某些初等問題,这些問題对于理解本書的內容是必須的,而且通常也是在初等解析教程里講解不够的。

Н. Мусхелишвили

1933 年春于列宁格勒

## A. H. Крылов 院士对第一版的序言<sup>1)</sup>

彈性是自然界中一切物体的基本性質。这个性質甚至只好認為是属于像假想的以太那样的东西，它的存在，在物理学上时而被確認又时而被否定的，同时在实际上它又是那样广泛地被使用着。

可以說，从史前时代以来对于所有的建筑物，从原始人的茅舍到古代羅馬的大劇場，宏壯的宮殿与庙宇，对于日常生活中的一切工具和用器，以及对于多种多样的兵器，物体的彈性都是在本能地被利用着。既然石器时代的原始人或者現代的澳洲土人在制造石質箭头或骨制箭头的弓矢时利用了材料的彈性，那么 Vickers & Armstrong 公司在制造“Nelson”号与“Rodney”号战艦或者为 Dover 堡壘制造 150 吨、16 吋口徑的大炮时也同样利用了这样的性質。其所不同的地方只是在于，澳洲土人在制造弓箭时所依据的經驗是經過無数代的自然摸索而获得的，而 Vickers & Armstrong 公司所制大炮的設計則是以我們的院士 Гадолин 在六十年前所完成的精确的数学計算为根据的。

因此，如果說人类利用物体的彈性的历史可以追溯到無穷尽的年代去的話，那么探討它的科学基础的第一次嘗試却只有 295 年的历史。这就是伽利略所作的嘗試，这种記載在他 1638 年出版的名著“Discourses”中可以找到。

其后四十年，英国人胡克揭示了他自己的字謎“ceiinossttuv”的解答：ut tensio sic vis（多大的伸長多大的力），这个解答包含了关于材料的彈性所应服从的基本定律。

再經過六十年，在彼得堡科学院的彙报里發表了 Daniel Bernoulli 和欧勒（Euler）的著作，在該文中，他們所得出的方程，在很多的实际計算上，直到今天依然是被利用着。

又經過了八十年，法国工程师 Navier 关于物体彈性的研究，提出了新的課題，他創立了彈性的一般理論并建立了彈性体的平衡与运动的一般的微分方程。这个理論更得到著名的数学家 Cauchy 与 Poisson 的进一步的推进，但他們最初是把它用于研究彈性介質中振动（即音响）的傳播，因为那时他們还不承認光的波动理論。Pois-

---

1) A. H. Крылов 院士的序言是由第一版中未加修改重載的。因为 A. H. Крылов 院士是逐章地就書中內容来分析的，必須指出，第一版的第三章經過了相当扩充后構成了本版第五章的主体。而第一版的第四章却相当于本版的第七章。



son 在他的为 Ecole Polytechnique (高等工业学校) 出版的力学教程里发展了 Bernoulli 和 Euler 的理论。

在同一时期, 前此数年在彼得堡创立的交通工程学院里有两位佩俄国陆军中校衔的法国籍工程师 Lamé 和 Clapeyron 在该校任教授, 他们为了要把 Navier 的理论应用到建筑问题上而开始发展这个理论。可是尼古拉一世即位后不久, 他们就被解除了在俄国的职务同时并被遣送回国。

1852 年就在这里, Lamé 出版了第一本关于弹性理论的系统的著作 “Leçons sur la théorie mathématique de l'élasticité des corps solides”, 这本书已经成为一部经典著作, 甚至直到现在还不失其光辉。

随着铁路、铁路桥梁与巨型建筑的发展, 随着机械制造和轮船制造的发展, 随着为了材料的弹性性质的科学研究以及为了检验它们在一定条件下的性质而设备的实验室的建立, 使得有关材料弹性性质的理论, 以及在实际方面如何适当利用这些性质的理论, 都获得迅速的发展。

这种发展是循着两个方向进行着: 一方面, 是弹性的数学理论按照 Navier 所创立, 并为 Lamé 所阐明的形式的发展; 另一方面, 是由于名为 “材料力学” 的这一简单理论的发展; 材料力学所根据的方法是 Bernoulli 和 Euler 奠定的。

值得注意的是, Lamé 的公式和结论第一次获得实际应用, 是由于 Гадолин 的创议: 把它们用在为了用锚环加固大炮的设计上, 这种大炮最初是由 Krupp 兵工厂制造成功的, 其后不久, 我国在该时刚建成的 Обуховский 工厂也能制造了。

常常是实践本身要求人们用更严格更精确的理论来检查已经简化了的理论的结论, 以便使之更接近于真实, 并保证这种简化的结果不至于与真实相去太远, 而且也不至于使事情的本质由此遭到忽略。

下述这些事件往往会推动我们的研究: 例如巨大的铁桥发生惊人的倒塌, 而这些铁桥看来还是经过正确的结构并按所有规则与规范计算过的; 又如远洋航船上的甲板常常发生龟裂与裂缝; 或如某些长形客船跟一些不大的船只相撞腰折而沉没的情况。在最后的情形, 人们可根据船只在即将沉没之前桅杆的倾角来推测船只破折的情况。

弹性理论常常能给我们以帮助, 并给予事故的原因以精确的数量的说明, 一旦究明每个原因, 就不难想出办法来预防由于这些原因所产生的有害的后果。

大约在三十年前钢筋混凝土在建筑事业中已开始使用, 并且得到了很迅速的发展, 到现在它在建筑事业中已占有非常重要地位了。就在这里产生了新的问题, 对于

其中很多問題, Bernoulli 和 Euler 的簡化了的的方法是無能为力的, 因此彈性理論又获得了一系列新的应用。

由此显然可知, 現在对于彈性理論这一科目的研究, 对于我們的形式繁多且規模巨大的建設事業來說, 該是多么重要的了, 因此 Н. И. Мусхелишвили 的這本書符合了我們迫切的要求。

著者在他的序言里讓讀者們自己去查看一下本書目录以便熟悉本書的內容, 但是單純的条文臚列不論在叙述的方法上或在內容的本身上都不能給人們以充分具体的了解。因此我打算簡短地介紹一下此書講法的特点, 尤其是要提一提它的獨創性, 由于这獨創性才达到了如此簡練的程度, 使得著者在不大的篇幅里含有那样广泛的和充实的全新的材料, 同时在叙述上还保持着十分明晰的特点。

Мусхелишвили 教授的書共分四章

**第一章 彈性体力学的基本方程** 在这章里用 75 頁的篇幅闡明了彈性理論所有的一般基础, 即: а) 关于物体的应力状态的研究; б) 关于形变的研究; в) 应力与形变之間的关系; г) 导出了彈性体平衡的微分方程并提出了两个基本問題: 1° 当作用于物体的力已給出时, 确定物体的状态; 2° 当物体的表面上的点的位移已給出时, 确定物体的状态。

**第二章 平面問題。一般公式与最簡單的应用** 在这章里共用 100 頁的篇幅闡明了平面問題的提法及其主要的解法。解是借助于应力函数及其复数表示而获得的; 首先是叙述解法的一般理論, 然后是將这些方法就一系列的例題实际地加以闡明。在这些例題里將特別提到: а) 穿有圓孔的薄板的拉伸; б) 作用于無限平面上一点的集中力的效果; в) 集中的力偶的效果; г) 在环內由于給定的力而产生的应力的研究; д) 圓形梁的弯曲; е) 温度形变及由形变所引起的应力的一般理論。

**第三章 保角映射与复积分对于平面問題的应用** 此处用 108 頁的篇幅首先闡明保角映射的理論与例題并且把它用来变换平面問題的方程及問題的边界条件, 之后指出基本問題的一般解法并通过对于連續橢圓情形的例題来闡明这类問題的解法。

然后著者叙述了柯西积分的理論并且在此給出为以后使用的新的普遍公式。

著者在导出对一个閉圍綫所圍成的域的基本問題的通解并將此解化为 Fredholm 方程以后, 就进而給出对于不同形式的域的許多例題的解答, 其中特別重要的是下述两种情形: 即他所研究的对于有橢圓形的切口的平面的基本問題的解, 以及对于嵌有圓形核的平面的基本問題的解; 然后他对于半平面和更一般形狀的域給出了兩

个基本问题的解答。

所有这些解答并不是依赖于偶然的特殊方法，而是使用由著者所导出的柯西积分性质为根据的一般方法获得的。

当我读这一章时，不由得想起了在 1898 年的造船工程师协会的春季会议。在这个会议上 Hele-Shaw 教授第一次把他的仪器拿来表演，这个仪器可以把流体的流线非常明晰地映射在银幕上，同时在银幕上还显示出这些流线绕过各种形式的障碍物的图画。第二年我又去伦敦出席了这个协会的春季会议。在许多报告中，挪威工程师 Bruhn 宣读了他的关于甲板上切口和小孔对整个船舶的坚固性的影响的报告。因为在此不久以前，在离纽约数英里之处曾发生一次巨大的罗马城号轮船由于和小帆船冲撞而破折了的事件，而且因为人们对这个惨事记忆犹新，所以 Bruhn 的报告引起了听众特别的兴趣。为了研究这个影响他取了一块长方形的胶皮，在胶皮上用一些与长边平行和与长边垂直的直线画成方格，在它上面作出各种形式的切口，再沿纵向拉伸这块胶皮，于是原来画在胶皮上的直线有一些变成了曲线，然后他把这些曲线的形状描出来。由这些曲线就得到了形变的分布图形，因而也就得到应力的分布状态。Bruhn 还作了些类似的模型，他建议大家利用这些模型去研究此一平面问题的解，这个问题已被 Н. И. Мухелишвили 如此出色地解析地解决了。

意外的，在 Bruhn 所作的一些切口之中有一个切口其形状与前一年 Hele-Shaw 所表演的实验里的某一个障碍物的形状完全相同。人们由此知道，Bruhn 的曲线与 Hele-Shaw 的流线是几乎完全相同的。

因为谁也没有注意到这点，于是我就找了一份协会前一年的报告，并请求发言，解释以下几点：即这种吻合决不是偶然的，这两个方法都是同一个一般 Dirichlet 问题的解法，不过 Bruhn 的方法是力学的解法而 Hele-Shaw 的方法是流体力学的解法，我们可以不必再去作 Bruhn 的复杂的模型和复杂的测量，也不必去描绘所得的曲线，而只要把相应的形式障碍物插入在 Hele-Shaw 的仪器里并将它映射在普通的感光纸上照下像来，这样，就得到形变的一切图像。将完全不同领域中的现象如此的相提并论，对这次会议来说是完全出乎意外的，因而大会的那位年迈和经验丰富的主席，即工程师 Benjamin Martel 在他的闭会辞中对我所作的这段发言表示特别的感谢。

现在流线已在用各种方法研究着，这是因为对于气体动力学来说，流线是有非常重要的价值的。这些方法都是从 Hele-Shaw 的以及其他的方法演变而来的。把这种“气体动力学的光谱”与 Н. И. Мухелишвили 所给的解加以比较并由此拟定出解弹

性理論的平面問題的實驗方法，這將是一件很有意義的工作。

我不禁又想起了另一個由院士 Н. Н. Павловский 所創導的優越的方法，即所謂“電力的”方法，這就是由確定在有給定形狀切口的金屬導板內的等位綫和電流綫來解流體力學問題的方法。

這一切都說明用保角變換的處理，而這方面的工作已為 Н. И. Мухелишвили 在解析形式上如此優美地發展了；這一切也指出了（通過微分方程的共通性）物理學的几个領域中的問題之間的相互聯系，而這些領域看起來好像是彼此毫無關係。

在此順便提一下，即應力函數乃是著名的皇家天文學者 James Biddel Airy 爵士引入彈性理論的問題的研究中的。他曾任格林威治天文台的台長有五十多年之久，在 1860 年初，他為天文台設立了一台具有 8 吋口徑對物鏡的望遠鏡的新的大子午儀，當時他不得不估計到對物鏡、對目鏡和其他構件的重量可以使得望遠鏡遭致彎曲這一事實，因為由於這些因素的影響曾經使得巴黎天文台產生過像 2 弧秒那樣的誤差，而在需要以  $\frac{1}{10}$  弧秒為有效讀數的那樣正確的觀測中，這樣的誤差是絕不容許的。

**第四章 均勻梁與組成梁的扭轉與彎曲** 在此處對 Saint-Venant 問題給了出色的說明，隨後用 Н. И. Мухелишвили 自己首創的完全新的方法研究了由不同材料所組成的梁，這些梁對於鋼筋混凝土結構來說是頗為重要的。

即使是把 Н. И. Мухелишвили 的書大致地瀏覽一遍，也可以發現著者不僅在他自己所提出的完全新的問題的解法上，而且在對早已為別的著者所解決的問題的解法上也表現了他的獨創性。就像在第一章里所講述的，就其內容的實質來說，原是早已熟知了的事實，可是著者在許多問題上還是作了比過去更為完滿更為明確的解釋。又 Saint-Venant 的與 Beltrami-Michell 的協調條件的新的推導法也是屬於著者自己的。

在第二章里，Г. В. Колосов 的嚴密的推導方法以及將其結果表達成簡潔形式的一系列的其他的公式也是屬於著者的。在本章里，由於著者對於復連通域和無限域內平面問題的解的解析性質做了詳細的研討，遂使我們在這裡有可能來發現一些其他著者所做的錯誤結論。

著者關於集中力的作用問題的總的探討以及其最一般的表達式的獲得同樣具有很大的意義，而且在這裡他也幫助我們發現其他著者所犯的一些錯誤。

熱應力與多值位移間的關係的建立也是屬於 Н. И. Мухелишвили 的。

在這一章里所有的例題大都是著者首先解決的，即使有些是早就解決的，但也都

是用了比这里更为复杂的方法。

第三章整个是属于著者的,这不论就其独创性及已解决了的问题的普遍性,或是就著者所使用的方法的普遍性而言,都是如此。要想知道这个方法该是多么重要,只要由下面的事实就可以看到了。著者在 § 68<sup>1)</sup> 里只用了两页粗体字就给出了对于具有椭圆切口的无限域的第二基问题的通解。L. Föppl 在“Zeitschrift für angewandte Mathematik und Mechanik”杂志里曾就这个问题的特殊情形加以解决,其解答共占用了五大页小体字的篇幅,如用我们科学院的字型来排版,则将占约二十页;在 § 69<sup>2)</sup> 著者只用几行就解决了一个例子,而 Föppl 的例子又不过是它的最简单的特殊情形。

在第四章里,如已经说过的,所有关于非均匀物体的材料,从问题本身的提出开始,就都是属于 Н. И. Мухомелишвили 的。

由这一段粗略的介绍,可以看到本书的丰富的内容以及书中所论问题的多样性和重要性,解决问题所用方法的独创性和普遍性。

还表示一点希望,就是,我希望在未来的版本中——这无疑是很需要的——著者在说明一般的结论和公式时,最好能使用数值例题和计算图表,而在利用近似公式求积时,为了使结果达到某种指定的精确度,譬如说,精确度达到  $\frac{1}{2}\%$ ,最好还能指出所需要的纵坐标的个数或是需要采取的区间的分割方式。这样就会使他的这部优秀的著作更容易为那些只用他的结论来解决建筑事业中的纯粹实际问题的人们所理解,这样他就会对工程界作出更大的贡献。

院士 А. Крылов

1) 本版 § 82.

2) 本版 § 82a.

# 目 录

|                                     |          |
|-------------------------------------|----------|
| 第四版序言                               | i        |
| 第三版序言                               | ii       |
| 第一版序言摘要                             | iv       |
| A. H. КРЫЛОВ 院士对第一版的序言              | v        |
| <b>第一章 弹性体力学的基本方程</b>               | <b>1</b> |
| I. 应力状态                             | 1        |
| § 1. 体积力                            | 1        |
| § 2. 应力                             | 2        |
| § 3. 应力分量。应力与微面分的定向间的关系             | 3        |
| § 4. 关联应力诸分量的方程                     | 5        |
| § 5. 坐标变换。不变二次形式。应力张量               | 8        |
| § 6. 应力曲面。主应力                       | 11       |
| § 7. 求主应力与主轴                        | 15       |
| § 8. 平面应力状态的情形                      | 16       |
| II. 形变                              | 19       |
| § 9. 一般的说明                          | 19       |
| § 10. 远交变换                          | 20       |
| § 11. 无穷小远交变换                       | 22       |
| § 12. 分解无穷小变换为纯形变与刚性位移              | 23       |
| § 13. 关于形变的不变二次形式。形变曲面, 主轴。坐标变换     | 28       |
| § 14. 一般形变                          | 30       |
| § 15. 按形变分量确定位移。Saint-Venant 的协调条件  | 32       |
| III. 弹性理论的基本定律。基本方程                 | 38       |
| § 16. 弹性理论的基本定律(广义胡克定律)             | 38       |
| § 17. 各向同性物体的情形                     | 41       |
| § 18. 各向同性弹性物体的静力学基本方程              | 45       |
| § 19. 弹性平衡的最简情形。基本弹性常数              | 46       |
| § 20. 弹性物体的静力学基本边界问题。解的唯一性          | 49       |
| § 21. 表以位移分量的基本方程                   | 55       |
| § 22. 表以应力分量的方程                     | 55       |
| § 23. 关于基本问题有效解法的注意。Saint-Venant 原理 | 58       |

|                                     |            |
|-------------------------------------|------------|
| § 24. 动力学的方程。关于弹性物体动力学的基本问题         | 58         |
| <b>第二章 平面弹性理论的一般公式</b>              | <b>64</b>  |
| <b>I. 平面弹性理论的基本方程</b>               | <b>64</b>  |
| § 25. 平面形变                          | 65         |
| § 26. 薄板受到作用于其平面内的力的形变              | 67         |
| § 27. 平面弹性理论的基本方程                   | 70         |
| § 28. 化归无体积力的情形                     | 74         |
| <b>II. 应力函数。平面弹性理论方程的通解的复数表示</b>    | <b>76</b>  |
| § 29. 一些术语与命题                       | 76         |
| § 30. 应力函数                          | 79         |
| § 31. 双调和函数的复数表示                    | 83         |
| § 32. 位移与应力的复数表示                    | 85         |
| § 33. 函数 $f$ 的力学的意义。主向量与主力矩的表达式     | 87         |
| § 34. 已引入的诸函数确定的程度                  | 88         |
| § 35. 对有限多连通域的一般公式                  | 91         |
| § 36. 无限域的情形                        | 95         |
| § 37. 从解的解析性所导出的某些性质。关于越过给定的圆线的解析延展 | 99         |
| § 38. 直角坐标变换                        | 102        |
| § 39. 极坐标                           | 104        |
| § 40. 基本边界问题。解的唯一性                  | 105        |
| § 41. 化基本问题为复变函数论的问题                | 109        |
| § 41a. 补注                           | 116        |
| § 42. 正则解的概念。正则解的唯一性                | 118        |
| § 43. 关于作用在边界上的集中力                  | 121        |
| § 44. 应力状态与弹性常数的相依关系                | 123        |
| <b>III. 多值位移。热应力</b>                | <b>124</b> |
| § 45. 多值位移。脱位                       | 124        |
| § 46. 热应力                           | 127        |
| <b>IV. 在保角映射之下基本公式的变换</b>           | <b>131</b> |
| § 47. 保角映射                          | 131        |
| § 48. 保角映射的最简单的例                    | 134        |
| § 49. 与到圆域上的保角映射相关联的曲线坐标            | 142        |
| § 50. 平面弹性理论公式的变换                   | 144        |
| § 51. 在变换后的域中的边界条件                  | 146        |
| <b>第三章 平面弹性理论的某些问题借助幂级数的解法</b>      | <b>148</b> |
| <b>I. 关于富氏级数</b>                    | <b>148</b> |

|  |            |
|--|------------|
| § 52. 关于复数形式的富氏級数 .....  | 148        |
| § 53. 关于富氏級数的收敛性态 .....  | 150        |
| II. 对于由圓周所圍成的域的解 .....   | 151        |
| § 54. 对于圓的第一基本問題的解 .....   | 151        |
| § 55. 对于圓的第二基本問題的解 .....   | 154        |
| § 56. 对于帶有圓孔的無限平面的第一基本問題的解 .....   | 155        |
| § 56a. 例: 1. 穿有圓孔的平板的單向拉伸. 2. 全面拉伸. 3. 于圓孔周边上作用有<br>均匀的垂直压力. 4. 在無限平面的一点作用有集中力. 5. 集中力偶 .....                            | 157        |
| § 57. 关于一般集中力 .....  | 162        |
| § 58. 在無限平板上嵌有不同材料的圓垫圈时的某些平衡情形. 1. 有圓孔的無限<br>平板, 在圓孔里嵌入較原半徑稍大的彈性圓形垫圈. 2. 嵌入或焊接了剛性<br>垫圈的平板的拉伸. 3. 嵌入或焊接了彈性垫圈的平板之拉伸 ..... | 165        |
| III. 对于圓环的解 .....  | 171        |
| § 59. 第一基本問題对于圓环的解 .....   | 171        |
| § 59a. 例与推广. 1. 受到均匀的外压力与內压力的管. 2. 圓环繞圓心迴轉时应力<br>的分布. 3. 某些推广 .....  | 175        |
| § 60. 在圓环情形的多值位移 .....   | 176        |
| § 61. 应用 .....   | 180        |
| § 62. 在空心圓柱內的热应力 .....   | 183        |
| IV. 保角映射的应用 .....  | 185        |
| § 63. 單連通域的情形 .....  | 185        |
| § 64. 到圓环上的映射的应用之例. 对于完整的橢圓的基本問題的解 .....   | 191        |
| <b>第四章 关于柯西型积分 .....</b>   | <b>196</b> |
| I. 柯西型积分的基本性質 .....  | 196        |
| § 65. 一些記号与術語 .....  | 196        |
| § 66. 柯西型积分 .....  | 199        |
| § 67. 柯西型积分在积分曲綫上的值. 积分的柯西主值 .....   | 199        |
| § 68. 柯西型积分的边界值. Сохоцкий-Plemelj 公式 .....   | 203        |
| § 69. 关于柯西型积分的导函数 .....  | 205        |
| § 70. 一些便利計算柯西型积分的初等公式 .....   | 207        |
| § 71. 关于在無限直綫上的柯西型积分 .....   | 211        |
| § 72. 續上 .....   | 218        |
| II. 关于全純函数的边界值 .....   | 219        |
| § 73. 某些一般命題 .....   | 219        |
| § 74. 推广 .....   | 222        |
| § 75. Harnack 定理 .....   | 222        |



- § 76. 对于圆与半平面的一些特殊公式 ..... 223  
 § 77. 最簡單的应用:在圆与半平面的情形位函数的基本问题的解 ..... 227

## 第五章 柯西型积分在解平面弹性理论边界问题上的应用 ..... 233

### I. 对于一个闭围线所围成的域的基本问题之通解 ..... 233

- § 78. 基本问题之导向函数方程 ..... 233  
 § 79. 导向 Fredholm 方程. 存在定理 ..... 238  
 § 79a. 前述积分方程的某些应用 ..... 245

### II. 基本问题对于可用有理函数映射到圆上的域的解. 在对一般形状的域的近似解法上的应用 ..... 245

- § 80. 对于圆的情形第一基本问题的解 ..... 245  
 § 80a. 例. 1. 圆盤受到作用于周边上的集中力. 2. 在作用于内点的集中力与力偶的影响下的圆盤. 3. 带有固定着的集中质量而迴轉着的圆盤 ..... 248  
 § 81. 第二基本问题对于圆的解 ..... 254  
 § 82. 第一基本问题对于带有椭圆孔的无限平面的解 ..... 254  
 § 82a. 例. 1. 带有椭圆孔的平板的拉伸. 2. 椭圆孔周边上受到均匀压力. 3. 椭圆孔的周边上受到均匀的切应力  $T$ . 4. 在椭圆孔 (或直綫裂隙) 的边界的一部分上受到均匀的压力. 5. 关于有椭圆孔的帶条 (梁) 的弯曲问题的近似解 ..... 257  
 § 83. 第二基本问题在带有椭圆孔的无限平面情形的解 ..... 265  
 § 83a. 例. 1. 带有刚性椭圆核的无限平板的拉伸. 2. 当椭圆核被支持住不轉动的情形. 3. 在椭圆核上作用有给定力矩的力偶的情形. 4. 在椭圆核上有作用在中心的力的情形 ..... 266  
 § 84. 第一基本问题对于借助于多项式可映射到圆上的域的通解 ..... 268  
 § 85. 在借助有理函数来作映射的情形上的推广 ..... 274  
 § 86. 第二基本问题的解. 关于基本混合问题的解 ..... 277  
 § 87. 基本问题的其他解法 ..... 278  
 § 87a. 例. 第一基本问题对于有圆孔的无限平面的解 ..... 278  
 § 88. 其他的例. 在某些其他边界问题上的应用 ..... 281  
 § 89. 在对一般情形的近似解法上的应用 ..... 282

### III. 对半平面与半无限域的基本问题的解 ..... 285

- § 90. 在半平面情形的一般公式与命题 ..... 286  
 § 91. 对于半无限域的一般公式 ..... 290  
 § 92. 与映射到半平面上的保角映射有关的基本公式 ..... 292  
 § 93. 第一基本问题对于半平面的解 ..... 294  
 § 93a. 例 ..... 297  
 § 94. 第二基本问题的解 ..... 298  
 § 95. 基本问题对于可借助有理函数映射到半平面上的域的解. 抛物綫圍綫的情形 ..... 300