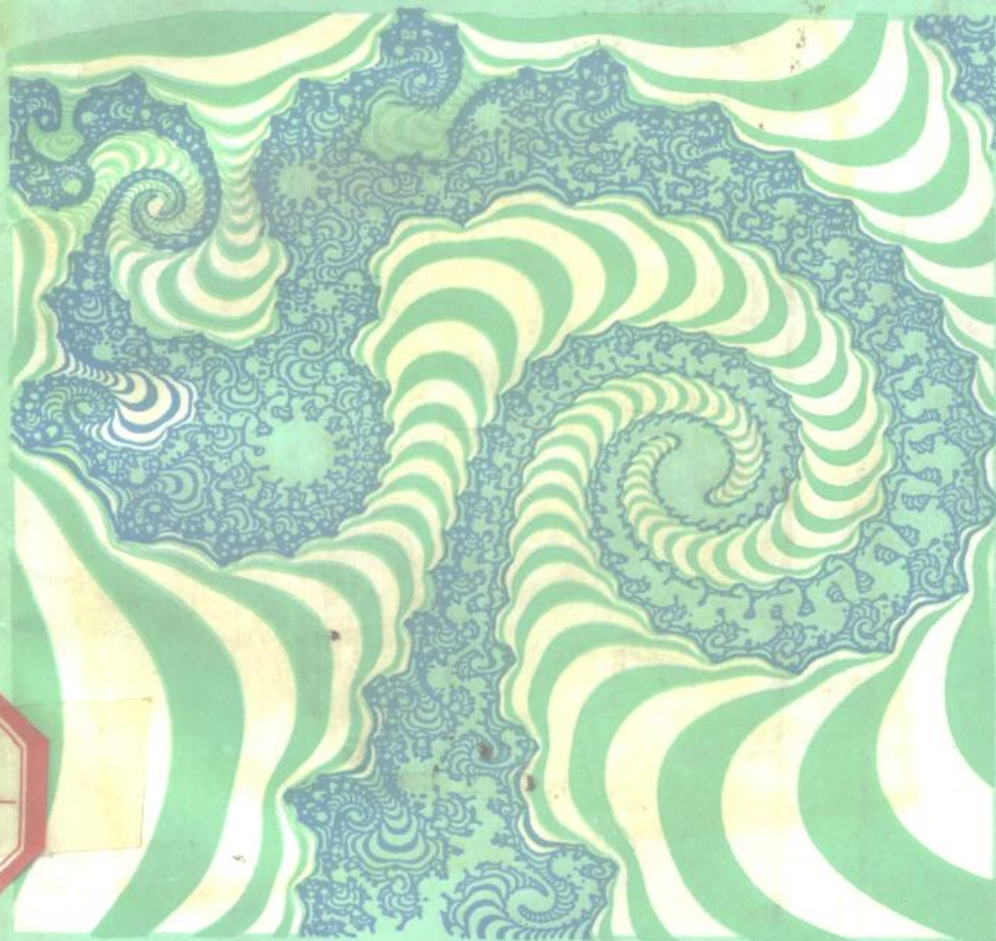


分形论—奇异性探索

林鸿溢 李映雪 编著



● ● 北京理工大学出版社

(京) 新登字149号

内 容 简 介

分形论是当代新兴学术思潮中的璀璨明珠。本书通俗系统地介绍了分形论的基本概念、原理和计算技巧；论述了混沌现象和奇异吸引子；讨论了分形论在物理、化学、材料、生物、医学、地震、计算机仿真、电子技术和社会科学（经济、管理、思维、文学、音乐、艺术、情报）中的应用。特别就凝聚、相变、渗流、自组织现象、表面、高分子、薄膜晶化、准晶形成、纳米晶体、断裂、灵感思维、人体科学、生理、穴位群、生命与健康、征服癌症、农业增产和石油开采等广泛领域中的分形问题作了探讨；介绍了诸位科学上的传奇人物。

本书可供大学师生、中小学教师、科技工作者和社会科学工作者阅读与教学用书。

分 形 论

——奇异性探索

林鸿澄 李映雪 编著

北京理工大学出版社出版发行

各地新华书店经售

北京密云华都印刷厂印刷

*

787×1092毫米 32开本 10.625印张 238千字

1992年9月第一版 1992年9月第一次印刷

ISBN 7-81013-530-9/O·84

印数：1—4000册 定价：2.95元

序 言

今年春天来得很早。书稿在早春三月完成了。为了梳理一下书稿完成后的思绪，信步来到未名湖畔的小山岗上。阳光灿烂，春风拂面，听松涛声声，东望峥嵘的博雅塔，有一种雄伟与庄重的情感；疾风中，倔强的青松迎风伸展着刚劲的臂膀，给人以自强不息的精神；山坡和湖畔，小草青青，桃树含苞，迎春花黄艳艳，向人们展示着大自然的勃勃生机，和谐而充满活力。大自然孕育了分形论，分形论揭示大自然的美妙与神奇。

分形理论创立于70年代中期，其研究对象为自然界和社会活动中广泛存在的无序(无规则)而具有自相似性的系统。分形论借助相似性原理洞察隐藏于混乱现象中的精细结构；为人们从局部认知整体，从有限认识无限提供新的方法论；为不同学科发现的规律性提供崭新的语言和定量的描述；为现代科学技术提供新思想新方法。

世界正经历深刻而巨大的变化，一批崭新的科学概念和思潮正在崛起，并形成各具特色的新学科，以迎接世界向着未来发展中面临的挑战。分形论诞生在以多种概念和方法相互冲击和汇合为特征的当代。人们把分形论、耗散结构和混沌称为70年代科学上的三大发现。10多年来的发展趋势表明，分形论正被众多学科竞相引入，以新的驱动力推动各学科的新发展。据美国科学情报研究所的计算机显示，世界上1257种权威学术刊物在80年代后期发表的论文中与分形有关

的占37.5%，并呈增长趋势。其研究领域涉及自然科学、哲学和社会科学各个学科。事实上，不同领域现象之间存在惊人的相似性，因此，分形论有可能成为联结现代各学科的纬线。物质世界本来是复杂奇异的，常常具有受分形规律制约的无穷层次结构，在这里传统学科显得苍白无力；定量描述自然构型和现象（自然的和社会的）是学习各学科的第一步。因此，从大学开始应该学习分形的基本概念，以开拓视野、启迪思维、激发创造功能。这也正是作者的初衷。

全书十二章，分为两部分，第一部分着重介绍分形论的基本概念、原理和计算技巧，并对神奇的混沌现象和奇异吸引子作了论述。第二部分为应用方面，讨论分形论在物理、化学、材料、生物、医学、地震、计算机仿真、电子技术和社会科学（思维、文学、音乐、艺术、经济、管理、情报）中的应用。特别就凝聚、相变、渗流、自组织现象、表面、高分子、薄膜晶化、准晶形成、纳米晶体、断裂、混沌、灵感思维、人体科学、生理、穴位群、生命与健康、征服癌症、农业增产和石油开采等广泛领域中的分形问题作了探讨。书中还介绍了为创立分形论作出重要贡献的诸位科学上的传奇人物。

本书作为大学教材，可供大学师生阅读；为扩大视野，可供中小学教师阅读；作为新学科，特别为科技工作者和社会科学工作者推荐一种新思路新方法。

本书的完成得益于分形界学者和朋友们的优秀研究成果和真诚的支持，支持还来自同仁和我的学生们，谨此表示衷心的感谢！由于时间匆促，难免有不妥与错误，敬请读者指正。

林鸿溢

1992年3月于北京

目 录

第一章 引论	(1)
§ 1.1 新学科是怎样诞生的?	(2)
§ 1.2 非平衡的宇宙	(6)
§ 1.3 大自然的复杂性	(10)
§ 1.4 分形论的建立	(15)
第二章 分形论及其领域	(24)
§ 2.1 云彩、地震和血管	(24)
§ 2.2 自相似性	(27)
§ 2.3 分形元与分形子	(31)
§ 2.4 自然分形与社会分形	(34)
第三章 分维计算与诠释	(52)
§ 3.1 欧几里得几何	(52)
§ 3.2 拓扑维和豪斯道夫维	(54)
§ 3.3 集合论	(58)
§ 3.4 分形的数学定义	(62)
§ 3.5 分维计算的具体形式	(64)
§ 3.6 分形原理概要	(72)
第四章 规则分形	(77)
§ 4.1 康托尔点集	(77)
§ 4.2 谢尔宾斯基线集	(82)
§ 4.3 谢尔宾斯基面集	(85)
§ 4.4 柯曲雪花	(87)
§ 4.5 来自伊斯兰教的启示	(92)

第五章 随机分形	(97)
§ 5.1 随机性与不可逆性	(97)
§ 5.2 特征尺度与无标度域	(100)
§ 5.3 海岸线的分形性质	(105)
§ 5.4 城市边界的变迁	(109)
§ 5.5 随机行走	(112)
第六章 混沌现象	(117)
§ 6.1 蝴蝶效应	(118)
§ 6.2 非线性世界	(119)
§ 6.3 逐级分叉与混沌	(125)
§ 6.4 曼德布罗特集	(127)
§ 6.5 分形整体构造	(130)
§ 6.6 混沌与健康	(132)
§ 6.7 从涨落到有序	(134)
§ 6.8 混沌特征	(136)
§ 6.9 分叉实例——人口方程	(139)
第七章 奇异吸引子	(145)
§ 7.1 远离平衡态	(145)
§ 7.2 湍流	(149)
§ 7.3 奇异吸引子	(152)
§ 7.4 吸引域的分形边界	(164)
§ 7.5 普适性探索	(165)
第八章 多姿的分形世界	(170)
§ 8.1 凝聚现象及其模型	(170)
§ 8.2 金属树的分形生长	(178)
§ 8.3 枝晶与分形	(180)
§ 8.4 表面分形	(184)
§ 8.5 高分子的分形性	(189)

§ 8.6	准晶分维结构.....	(192)
§ 8.7	分形生长及其模型摘要.....	(198)
§ 8.8	化学钟.....	(206)
§ 8.9	自然景观仿真.....	(207)
第九章	分形生物学	(211)
§ 9.1	基因复制.....	(212)
§ 9.2	生命的功能单元.....	(217)
§ 9.3	生命活动基础的分形性.....	(221)
§ 9.4	生物分形概要.....	(225)
§ 9.5	生物分形的论据.....	(229)
§ 9.6	穴位群的实质.....	(234)
§ 9.7	癌变的新认识.....	(237)
§ 9.8	生物的统一性与人体发育的相似性.....	(240)
第十章	断裂与分形	(244)
§ 10.1	断裂面的分形特征	(245)
§ 10.2	断裂表面的模拟	(246)
§ 10.3	断裂力学与分形	(248)
§ 10.4	寻找真正的分维	(251)
§ 10.5	分维测量方法进展	(256)
第十一章	地震预报	(262)
§ 11.1	岩石断裂的分形模型	(264)
§ 11.2	岩石破碎的三角形效应	(268)
§ 11.3	裂纹分叉的分形规律	(269)
§ 11.4	地震的能量分维	(272)
§ 11.5	地震的时间分布	(274)
§ 11.6	地震的空间分布	(279)
第十二章	奇异的临界现象	(286)
§ 12.1	对称破缺	(287)

第一章 引 论

当今，科学技术的发展日新月异，人类对自然界奥秘的认识正在深化与飞跃。世界正经历深刻而巨大的变化。一批崭新的科学概念和思潮正在崛起，并逐步形成各具特色的新学科，以迎接世界向着未来发展中面临的挑战。分形论 (Fractal Theory) 诞生在以多种概念和方法的相互冲击和汇合为特征的当代。因此，加深对我们所处的物质世界的认识有助于对分形论的理解与掌握。作为本书的引论，我们将从当代科学发展的特点，非平衡宇宙，大自然的复杂性，到分形论的建立，作简要的阐述。

科学遗产中，至今尚未得到答案的两个基本问题之一，是无序与有序的关系。热力学中著名的熵增加原理把世界描绘成从有序到无序的演变。然而生物或社会的进化却向人们表明，进化的过程是从简单中出现复杂性，生命从低级形式到高级形式，从无区别的结构到互不相同的结构。按照熵增加原理这怎么可能呢？有序结构怎能从无序中得到？研究工作已有巨大的进展，今天我们知道，非平衡是有序的源泉。尚未得到答案的另一基本问题是可逆性与不可逆性。经典物理学和量子力学把世界描绘成可逆的。在这里没有进化可言，动力学给出信息不随时间变化，这与生物的进化，物理过程和化学反应中涌现的不可逆过程的大量事实形成鲜明的矛盾。事实证明正是通过不可逆过程组成了物质，并由此产生活性

物质的概念。

图1-1是雪花图案，美丽典雅，自然之序明显坦露；图1-2是容器中的气体分子，毫无统一的动态特性，处于分子混沌状态，显示了自然界的多样性。

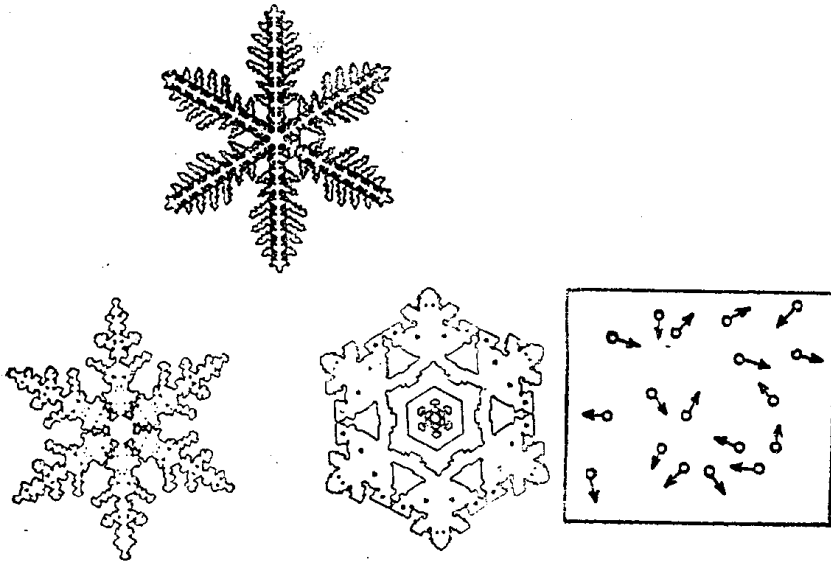


图1-1 雪花图案

图1-2 分子混沌

我们把分形论投入到无序的、涨落的和非平衡的物质世界之中，谨请读者深入研究，提出问题，举一反三，触类旁通，激发旺盛的创造功能。

§1.1 新学科是怎样诞生的？

我们所处的时代，正面临三个重大的课题，需要我们付出巨大的努力，寻找解决的办法。寻求和探索新的资源，首当其冲；了解人类自身所处的环境，不可回避；与大自然建

立较少破坏性的和谐关系，十分必要。要使这些目标发生质的改变，所需时间的数量级以10年计，正好干预我们这一代与下一代人的生活。这与生物和地质演化过程的浩瀚的时间跨度不可比拟。为达到这些目标，即为了迎接探寻资源，认识环境与改造环境的挑战，科学本身也正处在理论的变革期。对这些目标的认识，存在多种概念和方法相互冲击与汇合。这些概念和方法经历了长期隔离的发展道路之后，突然彼此遭遇，其结果是产生壮观的进展。在这种冲击与汇合的过程中，不同学科间新的界面不断被发现，事实上每一学科的前缘都在大大扩展，因而出现了交叉学科与边缘学科，我们统称为横断学科。其特点是打破了不同学科之间的壁垒，汇合起来，研究共同的问题。例如基本粒子物理与宇宙学，分子生物学与结晶学的合流，就是两个突出的例子。

本世纪之初，物理学家继续以传统的经典观点看待宇宙，处理问题。人们都承认宇宙的基本定律是决定性的和可逆性的，不符合基本定律的事件被认定为例外的人为的产物。现在，我们生活在本世纪之末，越来越多的人通过观察和思索，发现许许多多塑造着自然之形的基本过程是不可逆性的和随机性的。事实上，前者不可能告诉人们关于自然界的全部真情。当人们对周围物质重新进行考察时，抛弃了机械的被动的观点，代之以一种与自发的活性相联系的新观点，这已成为当代的潮流。

今天，放眼望去，人们不难发现物质世界是演变的多样化的与不稳定的，这在不同学科领域得到证实。事实上，在我们生活的这个复杂的世界，既可找到决定性的现象，也可找到随机性的现象；既可找到可逆性的事物，也可找到不

可逆的事物。例如无摩擦的单摆，或月球绕地球的运动轨道等等，就是决定性的可逆性的现象。

单摆是这样一个系统，一质量为 m 的小球固定在长度为 l 的细线的一端，细线的质量比 m 小得多，忽略不计，细线的长度 l 不变，细线的另一端固定，如图1-3所示，这就是单摆的模型。当单摆自然下垂静止时，摆球处于平衡位置 O 点。当将小球略为移离平衡位置，然后释放，则单摆将在平面内围绕平衡位置作往复周期性摆动。假定空气的摩擦阻力很小，忽略不计。设小球在某瞬间通过 P 点向平衡点运动，此时角位移为 θ ，弧位移为 $\widehat{OP} = s = l\theta$ ，所受的切向分力为

$$f = -mg\sin\theta \quad (1-1)$$

此力为使小球趋向于回到平衡位置的恢复力，所以取负号。

小球在 P 点的切线速度为

$$v = \frac{ds}{dt} = l \frac{d\theta}{dt} \quad (1-2)$$

而切向加速度为

$$a = \frac{d^2s}{dt^2} = l \frac{d^2\theta}{dt^2} \quad (1-3)$$

根据牛顿第二定律，有

$$-mg\sin\theta = ml \frac{d^2\theta}{dt^2} \quad (1-4)$$

因为 θ 很小，故可把 $\sin\theta$ 展开为级数

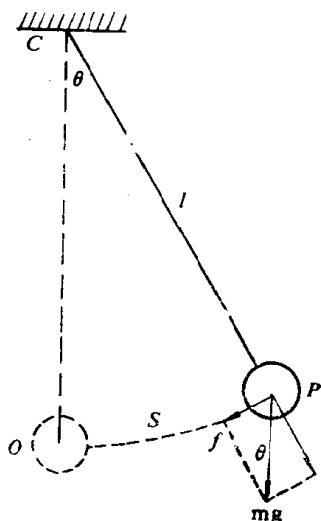


图1-3 单摆

$$\sin \theta = \theta - \frac{\theta^3}{3!} + \frac{\theta^5}{5!} - \dots \quad (1-5)$$

略去高次项，代入式 (1-4)，得到

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \omega^2\theta = 0 \quad (1-6)$$

上式实际上是一个谐振方程，式中

$$\omega = \sqrt{g/l} \quad (1-7)$$

是单摆摆动的角频率，这里 g 为重力加速度。

我们看到，无摩擦单摆的运动是可逆的，因为在描写单摆运动的方程中，过去、现在和未来是完全相同的。

但是，也存在许许多多不可逆的过程，它们涉及时间的方向性。例如把水掺入酒精，经过一段时间后，这两种液体将混合起来，通过扩散和相互碰撞达到均匀分布，但从来没有见过这种混合液体会自发地彼此分离成为水和酒精，即不存在逆过程。换句话说，这是一类不可逆过程。经过长时间的事件不可能自行重演，这意味着时间有方向性。实际上，人们正越来越多地观察到众多的事实，在所有的层次上，从基本粒子到无限的宇宙，随机性和不可逆性起着越来越大的作用。只有当一个系统的行为具有足够的随机性时，在描述此系统时才可能区分未来与过去，因而才可能形成不可逆过程。

今天我们大体上认为这是很自然的。就达尔文的进化论而言，进化的过程是从简单到复杂，从生命的低级形式到生命的高级形式，从无区别的结构到互不相同的结构。这里也存在过程的时间定向。

但在牛顿构造的世界模型中，时间是没有方向性的。某一时刻，无论是现在、过去还是未来，都被假定与另一时刻完全相同。行星的圆周运行，既可以走向过去，也可以走向未来，因此牛顿系统的时间是可逆的。

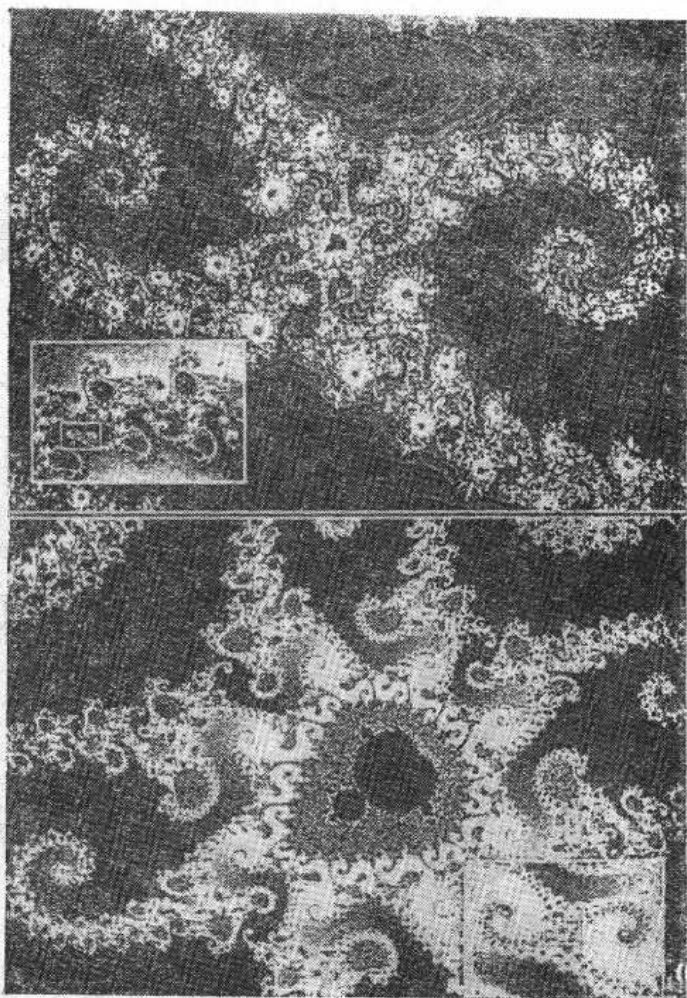
总之，物质世界的绝大部分不是有序的、稳定的和平衡的，而是充满无序、非稳定和涨落的沸腾世界。自然界多得惊人的构型正归因于此。

在一大批崭新的横断学科中，分形论是一支突起的新军。分形论打破了各个学科的壁垒，把思考者从相距甚远的各个学术领域带到一块共同的领地。他们具有共同的敏感性。他们凝视着多变的图样花纹，及其不规则的边缘和突然的跳跃；他们思考着多姿的自然构型；他们探索变幻的自然现象；他们关注着随机性、奇异性和复杂性。请参见图1-4中几幅曼德布罗特集那奇异而复杂的图形。分形论试图透过混乱现象和不规则构型，揭示隐藏于现象背后的局部与整体的本质联系和运动规律。

§1.2 非平衡的宇宙

量子力学和相对论的确立，是20世纪的两度科学革命，导致影响深远的后果。量子力学和相对论把普适常数：真空中的光速 c 和普朗克常数 h ，纳入经典力学的框架之中，即相对论和量子力学的观点似乎仍坚持牛顿力学所表达的世界观。

量子力学中，在势场 $u(r)$ 中运动的微观粒子遵循薛定鄂方程



(a.)

图1-4 曼德布罗特集 (a)

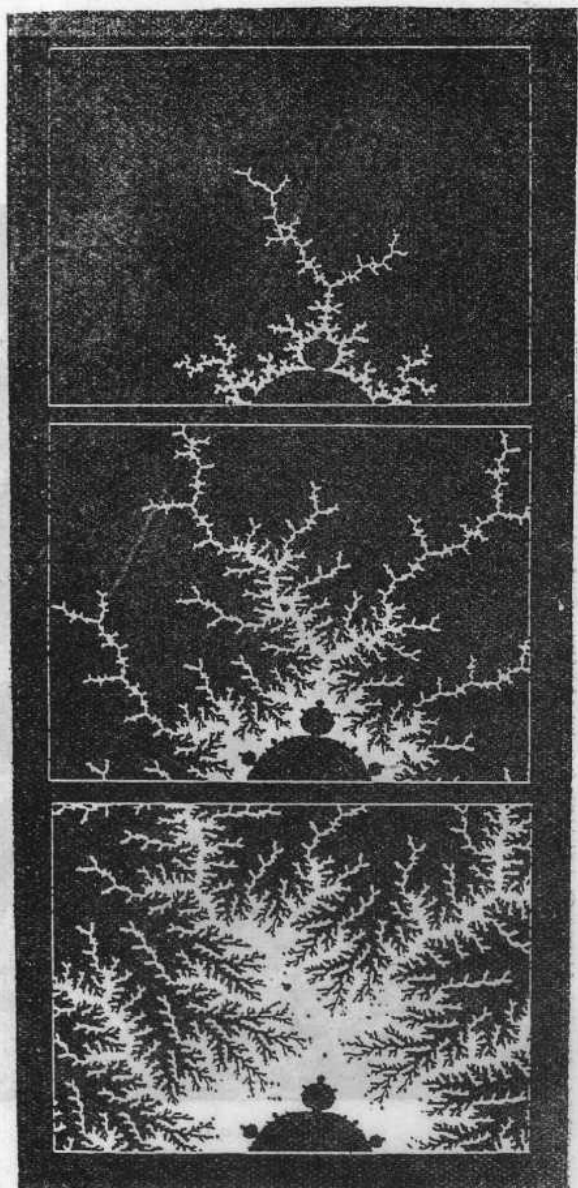


图1-4 曼德布罗特集(3)

$$i\hbar \frac{\partial \varphi(r, t)}{\partial t} = \left[-\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 + u(r) \right] \varphi(r, t) \quad (1-8)$$

其中 $\hbar = h/2\pi$, m 是粒子的质量, r 是粒子的位置坐标, ∇^2 是拉普拉斯算符

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \quad (1-9)$$

$\varphi(r, t)$ 是粒子的波函数。只要知道了在此刻 $t=0$ 时的波函数, 则过去和未来的波函数便确定了。而在相对论中, 常常使用3维空间加时间维成为4维相空间, 强调时间的静态几何性质。

近半个世纪来, 情况发生了很大的变化。量子力学已经成为处理基本粒子及其变换的主要工具。相对论也已经受到变革, 成为研究宇宙热史的主要工具。

量子力学的创始人之一狄拉克应用量子力学和相对论证明: 必须把每一个具有质量 m 和电荷 e 的粒子和具有相同质量和相反电荷的反粒子相联系。我们知道, 在高能加速器中已经能够产生正电子 (电子的反粒子) 以及反质子。由反粒子构成的物质称为反物质。粒子物理学已把反物质作为重要的研究课题。

粒子与其相应的反粒子碰撞时彼此湮灭, 产生光子, 光子是具有能量 $E = h\nu$ (ν 是光子的振荡频率) 而没有质量的粒子。波动方程对粒子和反粒子的交换是对称的。但在我们周围现实世界中, 却存在着粒子和反粒子之间的非对称性。

现实世界物质是由电子、质子等基本粒子组成的, 而反粒子只是不可多得的实验室产物。如果粒子与反粒子等量共

存，其结果是一切物质全部湮灭。已经证明，在我们的星系中不存在反物质，但并不排斥别的星球存在反物质的可能性。

于是对宇宙机制提出了不同的可能模型，宇宙中可能存在一种机制，有效地把粒子和反粒子隔开，或把反粒子隐蔽在某个地方；更可能是我们生活在非对称的宇宙中，物质完全统治着反物质；物理学家萨哈罗夫（Sakharov）于1966年提出一个模型，其要点是，在物质形成的时刻，宇宙必须处于非平衡条件下，因为在平衡态，根据质量作用定律，要求有等量的物质和反物质。

我们看到，如果不存在非平衡态和与之相联系的不可逆过程，则宇宙将具有完全不同的结构。因为等量物质和反物质的要求，无异于物质的全部湮灭。即使考虑到涨落现象也不会有明显数量的物质，只可能在某些局域物质超过反物质，或反物质超过物质。这并非现实世界。从现实世界出发得出的结论是：宇宙在物质形成之时便处于非平衡态。非平衡态是物质存在的前提。

§1.3 大自然的复杂性

1.3.1 简单性与复杂性

复杂性与简单性是日常生活中的两个概念，但在一些问题上要区分简单性与复杂性却并非易事，而且往往也不象人们直观想象的那么明显。例如，冰雹和雪花有什么不同？琴弦的振动与心脏的脉动有什么区别？物理过程和化学反应是