李敏泉 著

阈值逻辑及其应用

国防工業出版社

阈值逻辑及其应用

李 敏 泉 著

国防工业出版社

内容简介

本书扼要地介绍了阈元及阈元网络，重点讨论了任意开关函数的阈元网络最佳综合问题。提出了用“阈值逻辑”理论实现“存贮压缩”的方法。并就“阈值逻辑”理论在计算机和信息科学上的应用给予简要地提示。本书可供计算机、通信、自动控制等技术领域的科技人员以及有关大专院校的师生参考。

阈值逻辑及其应用

李敏泉著

*

国防工业出版社 出版

新华书店北京发行所发行　各地新华书店经售

国防工业出版社印刷厂印装

*

787×1092 1/32　印张 7 3/8　155千字

1980年11月第一版　1980年11月第一次印刷　印数：0,001－4,100册

统一书号：15034·2080　定价：0.78元

前　言

1943年麦克劳什（Mcculloch）和皮特（Pitt)两人提出了神经的简化模型——阈元概念。从那时起，围绕着阈元的性质及其网络的性质问题，国外发表了大量的文献。目前，把讨论阈元性质、研究任意开关函数用阈元实现综合的课题称为“阈值逻辑”。

数字式“与非”门只是阈元的特殊形式，而阈元却是一种广义的门。因此，“阈值逻辑”理论实际上是关于开关及其网络的统一理论。阈元工作的判别原理是具有一般意义的。有理由期望,“阈值逻辑”的理论会像自动机和信息科学理论一样具有重要的意义。

到底阈元有些什么重要的性质？如何实现任意开关函数的阈元最佳综合？“阈值逻辑”理论目前提供了哪些值得注意的新概念？它有些什么可能的应用？本书将力图回答以上问题，并且将介绍我们在“阈值逻辑”研究工作上的一些进展。

书中扼要地介绍了阈元及阈元网络，提出了任意开关函数的阈元最佳综合的最大分离法算法，以及用“阈值逻辑”理论实现“存贮压缩”的方法。本书还就“阈值逻辑”理论在计算机和信息科学上的可能应用，给予了简要地说明。

在本书初稿写成后，中国自动化学会理事长宋健同志作了详细审阅，并给予了热情支持和鼓励。何新贵等同志对全稿提出了宝贵意见。在此，谨致衷心的感谢。

在编写过程中，尽管曾征求多方面的意见，并几经修改，但因水平所限，本书仍不免会有不少缺点和错误，希望读者批评指正。

目　录

第一章　阈元及阈值逻辑

此章主要叙述阈元的概念及阈元的电子实现。对于不熟习电路知识的读者来讲，阈元的电子实现一节可以不读。

1.1　阈元的定义

当初，阈元是作为神经的功能模拟被提出来的。以后，在大脑的模型理论——自组织系统中再次涉及到它[1]。

开关理论是讨论用“与非”门实现开关函数的综合问题的。其实，“与非”门只是阈元的一种特例。这就是说，阈元实际上是一种广义形式的门。

阈元（门）是以二进制数（x_1，x_2，…，x_n）为输入，而输出 y 取值 1 或 0 的逻辑部件。当输入向量（$x_1, x_2, \cdots, x_n$）与权向量（w_1，w_2，…，w_n）的内积超过阈值（实数）T 时，输出 $y=1$，否则输出为零。换句话讲，阈元的输出

$$y=f(x_1,\ x_2,\ \cdots,\ x_n)=\operatorname{sgn}\left(\sum_{i=1}^{n} w_i x_i - T\right) \tag{1.1.1}$$

式中

$$\operatorname{sgn}(u)=\begin{cases}1, & \text{当 } u \geqslant 0 \\ 0, & \text{当 } u < 0\end{cases}$$

实数 w_1，w_2，…，w_n 和 T 分别称为阈元的权和阈值，阈元的性质由权和阈值决定。阈元可用图 1.1 表示。

n 维开关函数 $y=f(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ 能用式(1.1.1)表示时，称此开关函数为阈函数，或叫线性可分函数，这种开关函数可用一个阈元实现其综合。一 n 维开关函数可能有 2^{2^n} 种形式，其中阈函数有 $2\cdot\sum\limits_{i=0}^{n}\binom{2^n-1}{i}$ 种$\left[式中\binom{2^n-1}{i}=\dfrac{(2^n-1)!}{(2^n-1-i)!\,i!}\right]$。单个“与非”门只能综合极有限的 2^n 种。

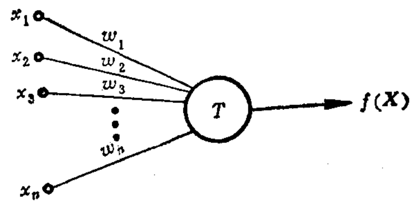


图1.1 阈元的图形表示

若 $w_1=w_2=w_3=\cdots=w_n=T=1$，则阈函数的逻辑表达式为

$$f(x_1, x_2, \cdots, x_n)=x_1\vee x_2\vee x_3\vee\cdots\vee x_n$$

当阈值 $T=n$ 时，有

$$f(x_1, x_2, \cdots, x_n)=x_1\wedge x_2\wedge x_3\wedge\cdots\wedge x_n$$

当 $w_1=-1$，$w_2=w_3=\cdots=w_n=1$，$T=n-1$ 时，有

$$f(x_1, x_2, \cdots, x_n)=\bar{x}_1\wedge x_2\wedge x_3\wedge\cdots\wedge x_n$$

式中，$\vee$、$\wedge$ 表示逻辑“或”及逻辑“与”；$\bar{x}_1$ 表示 x_1 的“非”。由此可见，阈元实际上是一种广义形式的门。

n 维输入量 $(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ 最多可取 2^n 种形式。若用向量 $\mathbf{X}^j$ 表示输入，则任意开关函数可对应一不等式方程组：

$$f(\mathbf{X}^j)=1 \qquad 当\sum_{i=1}^{n} w_i x_i^j \geqslant T \quad (j=1, 2, \cdots, \alpha) \qquad (1.1.2)$$

及

$$f(X^j)=0 \quad 当\sum_{i=1}^{n} w_i x_i^j < T \quad (j=\alpha+1, \cdots, m \leqslant 2^n) \quad (1.1.3)$$

这组线性不等式方程组可能相容，也可能不相容（矛盾）。不相容的方程组无解，而相容者一定有解。于是，不等式组（1.1.2）及（1.1.3）相容的开关函数是阈函数。不等式组（1.1.2）及（1.1.3）称为开关函数的阈元表示。开关函数还可以表示为

$$f(X^j)=1 \quad 当\sum_{i=0}^{n} w_i x_i^j \geqslant 0 \quad (j=1, 2, \cdots, \alpha) \quad (1.1.4)$$

及

$$f(X^j)=0 \quad 当\sum_{i=0}^{n} w_i x_i^j < 0 \quad (j=\alpha+1, \cdots, m \leqslant 2^n) \quad (1.1.5)$$

式中

$$x_0=1, \quad w_0=-T$$

此时，阈元可用图 1.2 表示。

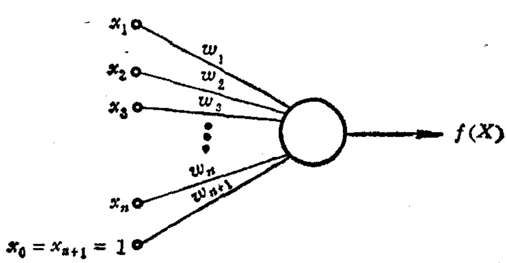
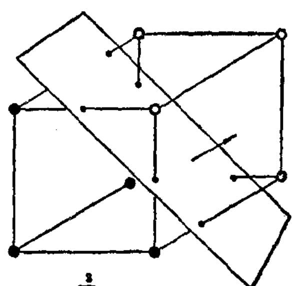


图1.2 阈元的另一种图形表示

向量（x_1，x_2，…，x_n）表示n维欧氏空间中的点坐标。方程$\sum\limits_{i=1}^{n} w_i x_i - T = 0$定义了一超平面。$x_i$取值0，1的$2^n$个点组成$n$维欧氏空间的单位立方格。从几何意义上讲，阈元确定了一超平面，此超平面把n维单位立方格的2^n个顶点分割在它的法向正侧向和负侧向。在超平面法向正侧向的点有$f(\mathbf{X}^j)=1$，负侧向的点有$f(\mathbf{X}^j)=0$。若把2^n个顶点都指定一种类属（设只取两种类属，一种为正集类，另一种是负集类，凡正集类的点$\mathbf{X}^j$要求$f(\mathbf{X}^j)=1$，负集类的点$\mathbf{X}^j$有$f(\mathbf{X}^j)=0$），则指定类属的顶点叫做样点，阈元的几何意义就是超平面分离样点的几何意义。三维问题的分离情况可用图1.3表示。$m \leqslant 2^n$个样点的分离问题，又称为二值分类问题。m个样点的n维立方格称为n维分类格。

由$\sum\limits_{i=1}^{n} w_i x_i - T = 0$定义的超平面称为分离面。因为以任意正常数同乘超平面的各系数和自由项，其超平面不变，因此，用任意正常数乘权值和阈值，其阈元性质不变。我们把阈元的这种特性称为阈元解的齐次性。



$\sum\limits_{i=1}^{3} w_i x_i = T$

图1.3　阈元的几何意义

1.2　阈元的物理（电子）实现

如果把阈元的输入x_i对应为0和1伏的电压，把权值视

为导纳，那末，阈元便可由电流作和线性电路与电压放大器组成。线性电路中负导纳是不存在的。可以采用两种方法实现$-w_i$：一种是把正权与负权分别接到比较放大器的正、负输入端；另一种是把负权值等效到阈值上。

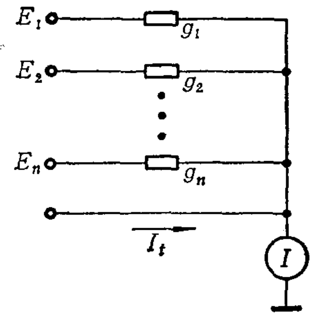


图1.4 电流作和线性电路

线性电路的模拟作和电路如图 1.4 所示。

电流和为

$$I=g_1E_1+g_2E_2+\cdots+g_nE_n+I_t \tag{1.2.1}$$

式中

$$g_i=|w_i|$$

当$w_i>0$时，有：$\begin{cases}x_i=0, & E_i=0\\ x_i=1, & E_i=1\end{cases}$

当$w_i<0$时，有：$\begin{cases}x_i=0, & E_i=0\\ x_i=1, & E_i=-1\end{cases}$

1.2.1 等值正权值变换

显而易见，以上物理系统要求有两种电源开关。现作以下变换：

令

$$E'=E_i,\quad 当 w_i>0$$
$$E'=E_i+1, 当 w_i<0$$

代入式 (1.2.1)得

$$I = g_1 E_1' + g_2 E_2' + \cdots + g_n E_n' + g_{n+1}'$$

式中

$$g_{n+1}' = I_t - \sum_{i' \in -w_i} g_{i'}$$

$\sum\limits_{i' \in -w_i} g_{i'}$表示对负值 w_i 对应的 $g_{i'}$ 求和。

经此变换，便得到只需要一种电源开关的物理系统。此时，负权值 w_i 对应的输入 x_i 应作 $0 \rightarrow 1$ 和 $1 \rightarrow 0$ 的反相变换（或叫“非”变换）。这就是说，阈元可以等效于一个 w_i（$i = 1, 2, \cdots, n$）全正的阈元。如果把 w_{n+1}(或 w_0)的正负用电源方向表示，则 w_{n+1} 也可以看为正的。以上变换可用图 1.5 表示。这种变换简称为阈元的正权值等值变换。很明显，阈元的正权值等值变换使分类格及其分离面产生相应的变化。必须指出，正权值变换只改变坐标原点在分类格顶点的位置，而不改变原来各样点间的相互关系。

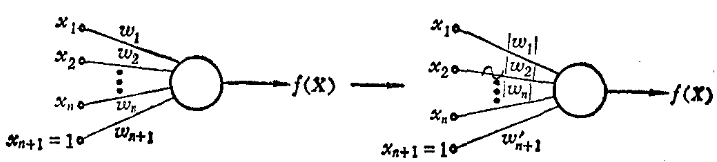


图1.5 阈元与正权值阈元

低维（$n < 4$）阈元可用图 1.6 所示的电路实现。

1.2.2 较精确的电路实现

当 n 较大时，由于输入容差（见 2.2 节）的限制，故必须采用精确的电路形式。这种电路可分为电压作和型与电流作和型两种，现分述如下：

1. 电压作和型

其框图如图 1.7 所示。图中的方框表示由输入x_i控制的电压（模拟）开关。

当输入$x_i=0$时，其输出$x_i'=0$电位；当输入$x_i=1$时，其输出$x_i'=E$电位。这时，应保证模拟开关的输出阻抗具有很小的数值。应用速调电源作开关时，其模拟开关的输出阻抗可以小到百分之几欧姆。

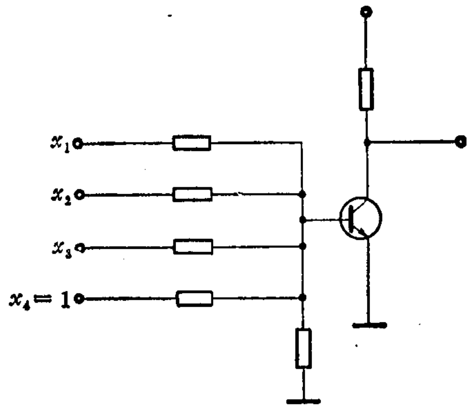


图1.6 实现低维阈元的电路

因为采用了差分放大线路，所以阈元的正、负权值可以分别接在差分放大器的正、负输入端上。正、负输入端独立进行作和，再经放大器将两独立和值相减并放大，最后给出饱和输出。

每一独立作和部分的线路可等效于图 1.8 所示的电路。

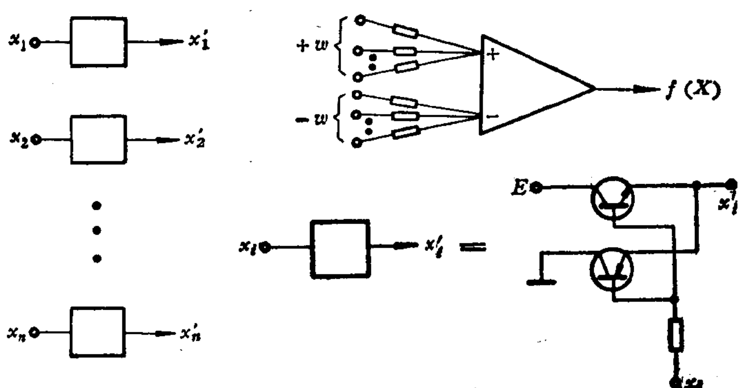


图1.7 电压作和型电路

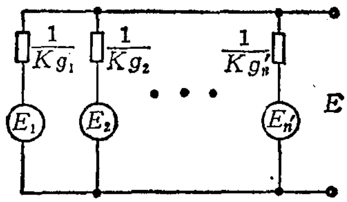


图1.8　作和等效电路

根据线性电路的叠加原理，可得输出电压为

$$E^{+}=\frac{\frac{1}{\Sigma g_{1'}}}{\frac{1}{g_{1'}}+\frac{1}{\Sigma g_{1'}}}E_{1'}+\frac{\frac{1}{\Sigma g_{2'}}}{\frac{1}{g_{2'}}+\frac{1}{\Sigma g_{2'}}}E_{2'}+\cdots$$

$$+\frac{\frac{1}{\Sigma g_{n'}}}{\frac{1}{g_{n'}}+\frac{1}{\Sigma g_{n'}}}E_{n'}=\frac{g_{1'}}{\Sigma g}E_{1'}+\frac{g_{2'}}{\Sigma g}E_{2'}+\cdots$$

$$+\frac{g_{n'}}{\Sigma g}E_{n'}=K(g_{1'}E_{1'}+g_{2'}E_{2'}+\cdots+g_{n'}E_{n'})$$

$$=(w_1^+E_{1'}+w_2^+E_{2'}+\cdots+w_{n'}^+E_{n'}) \qquad (1.2.2)$$

式中

$\Sigma g_{i'}$ 为除 $g_{i'}$以外的导纳之和

$$\Sigma g=g_{1'}+g_{2'}+g_{3'}+\cdots+g_{n'}$$

$$w_i^+=Kg_{i'} \qquad (i'=1,2,\cdots,n')$$

同理

$$E^{-}=(w_1^-E_{1''}+w_2^-E_{2''}+\cdots+w_{n''}E_{n''})$$

E^+、E^-分别为各独立作和值。因为各独立作和电路的输出导纳不同，因此还不能对比较的尺度加以统一，从而必须要求各作和端导纳和相等，即有

$$\Sigma w_i^+ + \alpha=\Sigma w_i^- + \beta \qquad (1.2.3)$$

利用式（1.2.3）设定一α值，便得β值。α、β值相当于在正、负作和端上并联一个接地的阻值为$K\frac{1}{\alpha}$和$K\frac{1}{\beta}$的电阻。

常数K的选择是根据线路的速度要求决定的。根据式（1.2.3）可知，两独立作和部分的导纳相等。因此输入回路的时间常数

$$\tau=\frac{1}{K\Sigma g}\cdot C$$

式中

$C=n'C_1+C_2$；

C_1是电阻的等效电容；

C_2是放大器的输入电容。

为了降低功耗和放宽对电源开关的要求，K应选得尽量的小。当然，也要考虑到工艺的许可。

2．电流作和型

其框图如图1.9所示。每一权值（当输入等于1时）对应一电流值。电流开关由输入x_i决定其开或断。作和电流流经电阻R_0所产生的电压降信号被送入放大器。当w_i为负时，电流开关的输出端接至Σ作和点；当w_i为正时，电流开关的输出端接至Σ作和点。

由于寄生电容较小，所以K可取得很小。因此，这种作和电路具有高速低功耗性质。

1.2.3 数字电路实现（可调权值电路）

除用以上线性电路实现阈元外，还可用数字电路实现阈元。数字电路的实现原理是：用二进制数表示阈元的权值并把它存放在寄存器中；用输入$(x_1, x_2, \cdots, x_n)$的坐标x_i来控

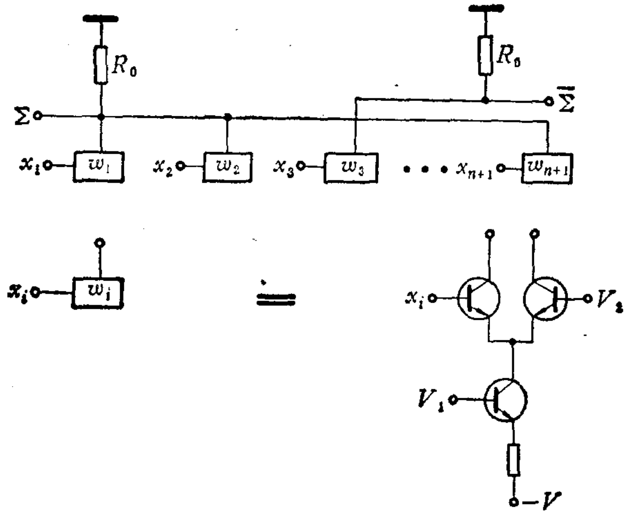


图1.9 电流作和电路

制寄存器的 w_i 二进制数究竟送不送到加法器中，以实现 $\sum_{i=0}^{n} w_i x_i$ 的作和。

由于阈元权值二进制数寄存器的内容可以程序更改（或者加 1，或者减 1），因此这种方案具有可调权值性质。于是，这种灵活的方案可以用到模式识别领域的自学习系统中去。

若权值可由 l 位二进制数表示（l 的具体决定，请参见后面的 5.1 节），则负权值可由 $2^l-|w_i|$（即以 2^l 的补码）表示。$(n+1)$个权值寄存器可排列成如图 1.10 所示的结构。每一个二进制寄存器兼有加 1 减 1 功能，并能直接从 O 端接收一代码到任意寄存器中。x_i输入端控制寄存器的各触发器的 1 端是否接至加法器中（若$x_i=1$，则接；若 $x_i=0$，则不接）。若令w_0寄存器的数为 $2^{l-1}+w_0$，则当输入x_1，x_2，$\cdots$，x_n时，其加法器中的二进制数为