



R. 巴 塔 查 雅

海洋 运载工具动力学

海 洋 出 版 社

161106

海洋运载工具动力学

(美) R·巴塔查雅 著

邬明川 戴仁元 陶尧森 译

严似松 刘楚学 舒家骥 校



海洋出版社

1982年·北京

内 容 简 介

本书系美国威莱父子公司出版的海洋工程丛书之一，是原作者根据他在各大学任教十年的讲稿写成的。全书共分17章和5个附录，系统地介绍了各种海洋运载工具在波浪作用下的运动和受力情况，重点置于对基本概念的叙述。本书附有大量的图表和算例，以帮助读者掌握基本概念及其应用。

本书可供海洋工程和船舶工程的科研、设计人员和高等院校的师生参考。

本书由邬明川、戴仁元、陶尧森翻译，严似松、刘楚学、舒家骥校对，并由严似松统稿审阅。

DZ45/12



海洋运载工具动力学

(美) R·巴塔查雅著

邬明川 戴仁元 陶尧森 译

*

海洋出版社出版

(北京复兴门海贸大楼)

北京印刷一厂印刷

新华书店北京发行所发行 各地新华书店经售

*

1982年8月第1版 1982年8月第1次印刷

开本: 787×1092 1/16 印张: 38¹/₂

字数: 940,000 印数: 1—900

统一书号: 13193·0106 定价: 7.50元

译者序

有鉴于海洋工程的迅速发展,美国威莱父子出版公司组织编写一套海洋工程丛书,主编是美国海军学院的麦克考密克教授(M.E. Mc Cormick),付主编即本书作者。由于海洋工程涉及的专业面很广,出版这套丛书的目的是为了使从事海洋工程的工程师和科研人员便于掌握其自身专业以外的其他领域的基本原理和技术。同时,这套丛书也可用来作为有关专业的大学高年级学生的教材或研究生的参考书。自1973年起,该丛书已先后出版过以下一些分册:

1. F.W. Wheaton, "Aquacultural Engineering"(水产养殖工程), 1977;
2. C.S. Clay & H. Medwin, "Acoustical Oceanography, Principles & Applications," (声学海洋学——原理和应用), 1977;
3. R. Bhattacharyya, "Dynamics of Marine Vehicles," (海洋运载工具动力学), 1978;
4. R.M. Sorensen, "Basic Coastal Engineering," (基础海岸工程), 1978;
5. S.C. Dexter, "Handbook of Oceanographic Engineering Materials" (海洋工程材料手册), 1979;
6. J. Williams, "Introduction to Marine Pollution Control" (海洋污染控制引论), 1978;
7. H.O. Berteaux, "Buoy Engineering" (浮标工程), 国内已有译本 1976;
8. H.E. Mc Cormick, "Ocean Engineering Wave Mechanics, (海洋工程波浪力学);
9. J. B. Woodward, "Marine Gas Turbines" (船用燃气轮机)。

“海洋运载工具动力学”一书是由美国海军学院造船系系主任巴塔查雅教授(R. Bhattacharyya)根据他十年来先后在密执安大学、美国海军学院、美国天主教大学,以及墨西哥维拉克鲁斯大学等处授课的讲稿写成。全书共分十七章,系统地介绍了海洋运载工具(包括常规船舶,各种新船型,可潜器和平台等)在波浪作用下的运动和受力情况,书末还有五个附录。该书原意是被用来作为船舶耐波性的教程,因此重点是置于对基本概念的叙述。本书附有大量的图、表和数例,以帮助读者掌握基本概念及其应用。本书的出版对于我国从事海洋工程工作的科技人员具有相当的参考价值。

参加本书翻译工作的有(按章节顺序): 邬明川(第1~4章、第14~16章及附录)、戴仁元(第5~10章)、陶尧森(第11~13章及第17章)。校对者为: 刘楚学(第1~4章、第16章及附录)、严似松(第5~13章、第17章)、舒家骥(第14~15章)。最后由严似松同志统稿审阅。原书中印刷错误较多,凡已发现处均作了订正,在文稿中不再逐处指出。

译者

1980年5月

目 录

译者序	1
第一章 绪言	1
第二章 简谐运动	4
§ 2.1 概述	4
§ 2.2 简谐运动的方程式	4
§ 2.3 矢量表示法	10
§ 2.4 简谐运动的叠加	11
第三章 正弦水波	15
§ 3.1 描述	15
§ 3.2 波速、波长和波浪周期	19
§ 3.3 波列的叠加	25
§ 3.4 驻波	25
§ 3.5 水深的影响	28
§ 3.6 波浪压力	30
§ 3.7 波浪的能量	31
§ 3.8 群速度	34
§ 3.9 船在波浪中航行	37
§ 3.10 波倾角	42
第四章 非耦合的垂荡、纵摇和横摇运动	44
§ 4.1 概述	44
§ 4.2 垂荡	45
§ 4.3 加速回转运动	72
§ 4.4 纵摇	84
§ 4.5 横摇	100
§ 4.6 船速区	134
§ 4.7 浅水中的摇荡运动	137
第五章 不规则海浪	141
§ 5.1 海浪的分级	141
§ 5.2 海浪的不规则性与直方图	146
§ 5.3 波谱	151
§ 5.4 不规则海浪的预报	159
§ 5.5 最可能的最大波幅	164
第六章 不规则海浪中的运动	166
§ 6.1 不规则海浪中的响应	166

§ 6.2 不规则海浪中的预报	169
§ 6.3 运动幅值的极值	183
第七章 动态效应	186
§ 7.1 概述	186
§ 7.2 垂向运动	186
§ 7.3 船首相对运动	192
§ 7.4 甲板淹湿和砰击	208
§ 7.5 垂向效应与横摇效应	228
§ 7.6 晕船	229
§ 7.7 波浪中的稳性	230
第八章 三维不规则海浪中的运动	231
§ 8.1 三维不规则海浪	231
§ 8.2 在短峰海浪中的运动	234
第九章 垂荡与纵摇的耦合运动	244
§ 9.1 概述	244
§ 9.2 基本方法	245
§ 9.3 运动方程	249
§ 9.4 用切片理论求规则波中垂荡与纵摇的耦合运动举例	255
§ 9.5 系数的试验确定	277
第十章 非线性横摇运动(非耦合)	279
§ 10.1 概述	279
§ 10.2 线性阻尼: 常系数非线性复原力矩	280
§ 10.3 非线性阻尼: 线性复原力矩	287
§ 10.4 线性阻尼: 具有时变系数的线性复原力矩	290
§ 10.5 突加倾斜力矩与船的倾覆	292
第十一章 海浪中的功率	295
§ 11.1 概述	295
§ 11.2 规则波中的阻力增值	296
§ 11.3 规则波中的试验	300
§ 11.4 不规则波中的阻力增值	303
§ 11.5 波浪中的螺旋桨散水试验	305
§ 11.6 自航要素	308
§ 11.7 不规则波中的推力和转矩	309
§ 11.8 功率增值预报	309
§ 11.9 横摇的影响	315
§ 11.10 风和浪引起的功率增值	316
§ 11.11 关于失速的一般结论	317
第十二章 船舶运动载荷	319
§ 12.1 部件的力	319

§ 12.2	垂荡运动的力	319
§ 12.3	横摇运动的力	320
§ 12.4	纵摇运动的力	320
第十三章	波浪载荷	330
§ 13.1	概述	332
§ 13.2	静水载荷	332
§ 13.3	规则波中的波浪载荷	335
§ 13.4	不规则波中的载荷	352
§ 13.5	动态载荷	359
第十四章	减摇装置	364
§ 14.1	概述	364
§ 14.2	横摇的稳定	366
§ 14.3	纵摇的稳定	389
§ 14.4	减摇装置的效果	399
第十五章	模型试验、实船试验与尺度效应	402
§ 15.1	概述	402
§ 15.2	耐波性试验的船模准备	403
§ 15.3	设备与仪表	411
§ 15.4	国际船模水池会议(ITTC)的耐波性试验规程	415
§ 15.5	实船试验	418
§ 15.6	尺度效应	427
§ 15.7	结束语	428
第十六章	设计中对耐波性的考虑	430
§ 16.1	概述	430
§ 16.2	设计参数	431
§ 16.3	按回归分析进行预报	458
§ 16.4	设计衡准	474
§ 16.5	耐波性设计的资料	478
§ 16.6	作为设计考虑的极限值	483
§ 16.7	具体的设计要求	485
§ 16.8	设计图示	506
第十七章	新型海洋运载工具的耐波性	509
§ 17.1	概述	509
§ 17.2	双体船	510
§ 17.3	海洋工程运载工具	514
§ 17.4	滑行艇	517
§ 17.5	水翼艇	520
§ 17.6	气垫运载工具	526
§ 17.7	潜艇	534

附录一	扩展的系列 60 船型在顶浪中的耐波性响应表	541
附录二	符号解释.....	590
附录三	耐波性名词术语.....	593
附录四	单位换算表.....	603
附录五	参考文献及其缩写.....	606

第一章 绪 言

船舶是用来在海上运载人员、物资和(或)武器的。为了完成这一任务,一艘船舶必须具备某些基本特性。它必须具有保持正浮状态的能力,能以足够的速度航行,能在海上和限制水道中操纵自如,并具有充分的强度能经得起严峻气候的考验和波浪冲击。要设计一艘船舶能具备这些特征,船舶设计师必须对船舶动力学有相当的了解。

只要对流体静力学有些简单的知识,船舶设计师就能设计出一艘能在静水中正浮的船舶。可是,船舶是很少航行在静水中的。而波浪是使船舶在汹涌海面上颠簸的主要根源,严重地影响着船舶的营运性能;船舶设计的成功与否归根到底要取决于船舶在汹涌海面上的营运性能。不幸的是,船舶在实际的汹涌海面上的摇荡运动、阻力和功率、以及结构载荷的预报,是一个如此复杂的难题,以致船舶设计师往往不得不根据静水中的性能来选择船体的外形和主要尺度,而不太考虑船舶未来航线上的主要风浪条件。

要研究波浪对船舶动力学的影响,合乎逻辑的做法是应该对海洋上的波浪有一定的了解。这些波浪不是规则的,而具有高度复杂的特性。为了研究汹涌海面的这种不规则性,同时也为了求取船舶摇荡运动的特征,采用了概率统计的方法。

当研究船舶在汹涌海面上的性能时,重要的并不是船舶摇荡运动特征的本身,而是由这些运动所引起的动力效应。这些效应包括:甲板的上浪;由船体前踵出水引起的砰击;以及由于纵摇、垂荡、横摇,或三者联合造成的加速度的影响。

当船首与波面的相对运动变得过大时,海水就涌上首楼。如果不能保持水密完整性,则甲板上浪将会造成极为严重的后果。许多电气系统可能损坏到失去功用。海水冻结在其接触面上可能使露天甲板上的设备不能使用,也可能严重地影响到战斗舰艇的战斗性能。此外,在出现上述各种情况之前,船舶的前部会遭到由风刮来的飞溅浪花。飞溅和上浪这两种情况都是不利的,对此可以通过提高干舷来予以改善。

在某些条件下,海水作用在船体上的压力可能变得很大,并产生了砰击现象。砰击的标志是船舶的垂向加速度有一个突然的剧变,然后伴有船体梁以其固有频率作强烈的振动。导致砰击的条件是:船与水面的相对速度很高;吃水浅;船底升高小。

频繁的砰击不仅会损伤船体的结构和其他各种部件,而且对船上的操作人员也有相当的影响。对于军用舰艇的合乎要求的操作,这一点尤为重要,因为军用舰艇的任务就是作为承载各种武器系统的一个浮动的平台。这个平台当然应该是越稳定越好。船首以后的10~25%船长这一范围是最易遭受高压而导致损伤的区域。

在船舶设计中,航速是一个重要的因素。但是当船舶在海上航行时,会出现失速现象,这是由于运动阻力的增加和推进效率的降低。这一现象导致燃料消耗量的增加,从而减少了巡航距离。海况愈严重,失速也愈大。为了克服这一速率损失,通常需要改进船舶的阻力和推进性能,同时让主机具有充分的储备功率。虽然船模试验能够以合理的精度来预报船舶在静水中的阻力和推进性能,但要预报它在海面上的这些性能却仍然是

研究的课题。一艘船舶所能达到的最高航速不一定取决于它所具备的功率，而往往取决于它在海上所经受到的加速度。

为了减少动力效应，曾经采用过各种稳定摇荡的措施。舳龙骨、减摇水舱和减摇鳍只是其中的一些例子。对于规则波和横摇运动之间存在谐摇现象的知识，曾经使减少横摇的装置得到成功的应用；但是减少纵摇运动的进展却不大，这是由于后者牵涉到要求有很大的减摇力(矩)。减摇措施对于客船尤为重要，同时对于许多类型的军舰也同样是如此。在汹涌海上的结构损伤，即使在以现代工艺建成的船舶上，也是经常有的。

船舶在汹涌海上各种性能的相对重要性对于不同的设计是有所不同的，这取决于人们对不同船舶的特定要求。可是，在设计耐波性良好的船舶时，下列一些共同的项目是必须加以探讨的：

- a. 过分的摇荡运动——这是应予避免的，因为它们会降低船舶的稳性，并使船员和旅客感到不适。同时，对于军舰来说，大多数的武器系统都要求有一个稳定的平台以便发挥其固有的功能；
- b. 附加应力——在汹涌海面上由船体总弯曲或波浪冲击所造成；
- c. 惯性力——导致设备、武备、结构等等的损伤；
- d. 飞溅和上浪——导致设备的故障，并妨碍人员执行其任务；
- e. 砰击；
- f. 失速和飞车——从而使主机过载，并增加每海里的燃料消耗量，或减少巡航距离；
- g. 操船性能。

与船舶的摇荡运动有关的各种问题可以通过下列四种途径来加以研究：

- 1. 理论分析的方法；
- 2. 试验的方法，就是在受控制的环境下进行模型试验；
- 3. 经验的方法，通过对观察的统计；
- 4. 直接的方法，例如实船试验。

理论研究和试验研究两者都可帮助设计师确定船舶的各种参数对其耐波性的影响，这种知识对船舶设计是极为有用的。船舶原理中最重要的研究项目之一就是探讨船在汹涌海上的性能。民船和军舰都要求能在各种不同的气象条件下保持良好的耐波性，并能完成其任务；前者是从商业的角度出发，而后者则涉及其最佳的作战能力。为了设计的目的，人们应能事先估计船舶将要经受的动力作用，以及由之而引起的运动。理论研究、模型试验结果和实船数据三者对于提供可靠的设计衡准都是不可缺少的。

近年来，耐波性研究不论在理论发展方面还是试验设备方面都取得了长足的进展。不同的船体外形之间的阻力或推进性能可以用一些简单的系数来加以比较，可是迄今为止还未曾找到定量的指标来比较不同船舶的耐波性能。

滑翔艇、水翼艇和气垫运载工具等等，一些先进的海洋运载工具的诞生，更促进了耐波性的研究，以便使这些特殊的运载工具发挥其最大的效用。现在正在对滑翔艇、表面效应船 (SES) 等等之类的模型进行大量的广泛的试验研究来确定参数变化对摇荡运动、底部压力和功率要求的影响。此外，对于高性能船舶的尺度效应研究也正在开展，以便将不同尺度模型的试验结果与实尺度试验联系起来。

因此，船舶设计师有责任关心有关测量、预报和改进涉及船舶动力学的各种性能的技术发展，并将其应用到特定的设计中去，识别设计中的缺陷，并作出修正和改进。具体的细节将取决于特定的设计，但是，设计师如果具有某些可用来判断预期性能的手段则将是十分必要的。

在理论研究方面，确定船舶摇荡运动的问题包括：推导出汹涛海面的简单的分析表达形式，以及确定船舶在这一海面上的运动。理论研究可以提供：

- a. 与船舶在海上运动最有关联的各种特征的一般情况；
- b. 船舶在任一给定海面上的运动预报；
- c. 对运动与加速度等等的可以采用的数值有一定的了解；
- d. 关于各种性能预期的平均水平(包括稳性和阻力)；
- e. 减摇的基本概念，和其实施的途径；
- f. 模型试验和实尺度试验的准则。

但是，由于船舶摇荡运动是相当复杂的，不可能单独由理论分析方法完全加以解决；因此，为了预报船舶性能还必须进行模型试验和实船试验。世界各地的试验机构曾发展了各种完善的模型试验方法，同时还进行了大量的实船试验来联系模型和实船的结果。对军舰来说，这些是尤为重要的。但是在新船型（包括水翼艇、表面效应船和气垫艇等等）能在它们的设计环境（公海且有航速）下有效地营运之前，还必须对乘员适居性这一因素进行探讨。

以下各章将就上述各方面进行基本的介绍和讨论。

第二章 简谐运动

§ 2.1 概 述

一个物体的运动可以描述为平移和（或）旋转运动。根据牛顿定律，这些运动将持续在一个方向上，除非受到某些外力的干扰。运动的方向也可以改变，即先是向一个方向运动，经过一段时间后再向反方向运动。这样的运动称为振荡。在自然界，振荡运动是很普遍的；由于它开始是与音乐的研究有关，所以也称为谐波运动。多数的谐波运动是相当复杂的，本章对某些简单的谐波运动作了简化的处理，并称之为简谐运动。

在简谐运动中，当一个物体偏离其平衡位置时，物体就会受到一个力，力图使其回到原来的平衡位置。这个力称为复原力，并与物体偏离其平衡位置的位移成正比。在偏离平衡位置之后，物体在复原力的作用下以加速度向平衡位置运动，即物体以越来越快的速度接近其平衡位置。但是物体愈接近平衡位置，其复原力也变得愈小，指向平衡位置的加速度也逐渐减小。在物体最后抵达它的平衡位置时，复原力和加速度均已消失，但物体却达到了它的最高速度。如果在平衡位置处，没有外力来停住这一物体，它将越过这个位置继续运动，并每次产生一个指向平衡位置的复原力，只是方向与前面的相反。随着物体的继续运动，位移、复原力和加速度都不断增大，直到物体的速度成为零时，也就是当物体抵达它偏离平衡位置的最大位移处。然后，在复原力的影响下，物体再次持续地加大速度直到它抵达平衡位置，并再次越过这一位置。

如果在这一振荡运动中没有阻力或阻尼，物体将无限期地振荡下去，而物体在其平衡位置两侧的最大位移将保持相等。从一侧的极限位置运动到另一侧的极限位置并返回过来所需的时间称为运动的周期。

在简谐运动中，位移、速度和加速度在每一个瞬时都在不断地变化。这类运动可以用另一种恒速的运动来表示：绕圆周的运动。

这个题目将在下节中讨论。

§ 2.2 简谐运动的方程式

假设有一个质点 P 以恒速沿一个圆的圆周运动，那末质点在圆的直径上的投影所作的运动也就是简谐运动。

在图 2.1 中，假设 P 点在一个半径为 z_a 的圆的圆周上运动。 P 点的角速度是恒定的，且等于每单位时间 ω 弧度。 P' 点是 P 点在直径 zz' 上的投影。当 P 点在圆周上运动时， P' 点就在 zz' 上往返移动，从 z 点到 z' 点，再返回到 z 点。 P' 点的运动是一个简谐运动，且

$$P' \text{ 点从 } O \text{ 点的位移} = OP' = z = z_a \cos \omega t \quad (2.1)$$

$$P' \text{ 点的速度} = dz/dt = -z_a \omega \sin \omega t \quad (2.2)$$

$$P' \text{ 点的加速度} = d^2z/dt^2 = -z_a \omega^2 \cos \omega t \quad (2.3)$$

图 2.2 表示简谐运动的位移、速度和加速度。P' 点的幅值 (P' 点从中心位置 O 点的最大位移) 等于 z_a 。运动的周期, 也就是 P' 点由 z 移动到 z' 并返回到 z 所需的时间, 与 P 点绕圆周运动一周所需的时间相等, 且等于:

$$T = \frac{2\pi z_a}{\omega z_a} = \frac{2\pi}{\omega}$$

$$\text{频率} = \frac{1}{T}$$

$$\text{圆频率} = \omega = \frac{2\pi}{T}$$

注意以下几点:

a. 最大的速度发生在 $v = z_a \omega \sin \omega t$ 为极值时, 也就是当 $\sin \omega t = \pm 1$, 即 P' 点在其极限位置的中点, 或物体在其平衡位置时。

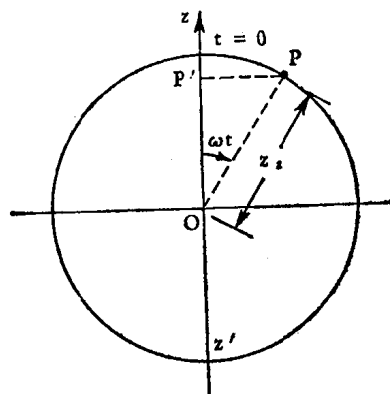


图 2.1 简谐运动的定义

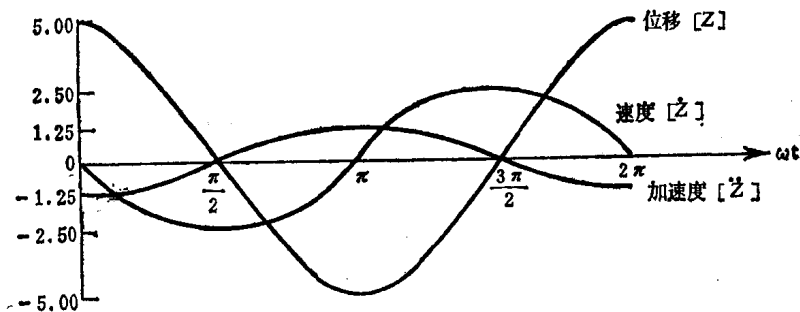


图 2.2 简谐运动的位移、速度和加速度

- b. 最大的加速度发生在式中的 $\cos \omega t = \pm 1$ 时, 即物体在其极限位置时。
c. 如前所述, 简谐运动中的复原力与物体从其平衡位置的位移成正比, 即:

$$f = cz$$

式中 f ——复原力; c ——常数; z ——物体从平衡位置 O 点的位移。

当物体在平衡位置时, z 为零, 复原力 f 也为零。当物体在极限位置 (即 $z = z_a$) 时, 复原力为最大, 且等于 cz_a 。

因此, 当物体从其平衡位置移向极限位置时, 它必须反抗一个起先为零而后逐渐增大至 cz_a 的力。由式 (2.3), 可以看出, 最大的加速度为 $-\omega^2 z_a$ 。值得指出的是, 在周期公式 $T = \frac{2\pi}{\omega}$ 中并不包含幅值 z_a 。由于 ω^2 并不是限于任一特定的圆, 所以可以说即使是幅值互不相同的一系列简谐运动也可能具有相同的周期。

从而对简谐运动可以重新定义如下:

“简谐运动是一个在直线上的运动, 在每一瞬间其加速度的大小与物体距直线上某一固定参考点的距离成正比, 作用方向则指向该参考点。”

或, “不论运动的幅值如何, 简谐运动的周期仅由单位位移的加速度决定 [即, 在式 (2.3) 中令 $z = 1$].”

以上的讨论是关于在一直线上的简谐运动，即物体沿直线（有如图 2.1 中沿圆直径 zz' ）作振荡的平移运动；但是，简谐运动还可以是振荡的回转运动，即物体沿一段圆弧作往返运动。在后一情况中，复原力矩替代了复原力，角加速度则与角位移成正比但方向相反，角运动是简谐的，且周期也与角幅值无关。

例 2.1

某一简谐运动 $z = z_a \cos \omega t$ 的幅值为 5 英尺，圆频率为 0.5 弧度/秒。试作图表明这一简谐运动的位移、速度和加速度随时间的变化。

解：

角速度 $\omega = 0.5$ 弧度/秒（给定）

运动的幅值 $z_a = 5$ 英尺（给定）

位移 $z = z_a \cos \omega t = 5 \cos 0.5 t$

速度 $\frac{dz}{dt} = -\omega z_a \sin \omega t = -2.5 \sin 0.5 t$

加速度 $\frac{d^2 z}{dt^2} = -\omega^2 z_a \cos \omega t = -1.25 \cos 0.5 t$

其余见图 2.2。

当物体开始偏离其平衡位置时，它只具有动能。随着位移的增大，物体的速度减小；与此同时，动能减小，势能增大。当物体抵达其极限位置时，物体仅具有势能。

一个振荡物体的动能是时间的函数，且可表示为：

$$E_k = \frac{1}{2} m v^2$$

由式 (2.2)，可得：

$$E_k = \frac{1}{2} m (\omega^2 z_a^2 \sin^2 \omega t) \quad (2.4)$$

式中 m ——物体的质量； v ——物体的速度；

z_a ——幅值或最大位移值。

作为时间（或位移）的函数，物体的势能可以按其反抗复原力 F 所作的功来计算。

复原力等于：

$$F = -ma$$

由式 (2.3)，可得：

$$\begin{aligned} F &= -m(-\omega^2 z_a \cos \omega t) \\ &= m\omega^2 z \end{aligned} \quad (2.5)$$

如前所述，复原力与物体从其参考点或平衡位置的位移成正比（图 2.3）。图 2.3 中的阴影部分，表示物体在由 B 点移至 C 点时，所作的功或增加的势能。同理，当物体由平衡位置作任一位移 z ($ON = z$) 时，它所增加的势能等于三角形 OMN 的面积，或

$$\begin{aligned} E_p &= \frac{1}{2} z F \\ &= \frac{1}{2} z m \omega^2 z \end{aligned}$$

由于 $z = z_a \cos \omega t$,

$$\begin{aligned}
 E_p &= \frac{1}{2} m \omega^2 z^2 \\
 &= \frac{1}{2} m \omega^2 z_a^2 \cos^2 \omega t
 \end{aligned}
 \quad (2.6)$$

将式 (2.4) 与式 (2.6) 相加, 即可得到总的能量:

$$\begin{aligned}
 E_k + E_p &= \frac{1}{2} m \omega^2 z_a^2 \\
 &= \frac{2 \pi^2 m z_a^2}{T^2}
 \end{aligned}
 \quad (2.7)$$

式中 T 为振荡的周期。由式 (2.7) 可以看到, 动能和势能的总和是不随时间 (或位移) 而变化的。图 2.4 表明了, 在总能量不变的前提下, 动能和势能的分配情况。由式 (2.7) 还可以看出, 一个简谐运动的总能量是与物体的质量成正比, 与幅值的平方成正比, 并与周期的平方成反比 (或与频率的平方成正比)。

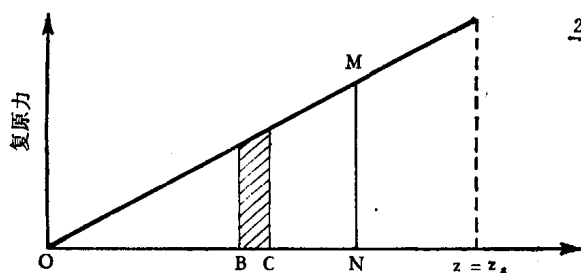


图 2.3 复原力与位移的关系

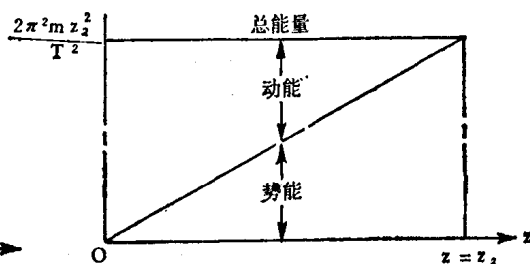


图 2.4 势能和动能的分配

相位差 在图 2.1 中, 如果 P 点由位移 z 开始顺时针旋转, 则 P 点在 z 处的时间 $t=0$, 且简谐运动的位移 OP' 为:

$$\begin{aligned}
 OP' &= z = OP \cos \omega t \\
 &= z_a \cos \omega t
 \end{aligned}$$

但是如果 P 点是由 Q 处开始运动 (图 2.5), 则 P 点在 Q 处的时间 $t=0$, 且:

$$\begin{aligned}
 OP' &= z = OP \cos(\omega t + \varepsilon) \\
 &= z_a \cos(\omega t + \varepsilon)
 \end{aligned}$$

图 2.6 上将这两条曲线画在相同的坐标轴上以供比较, 其中:

$$z_a = 2, \varepsilon = \frac{\pi}{3}, \theta = \omega t$$

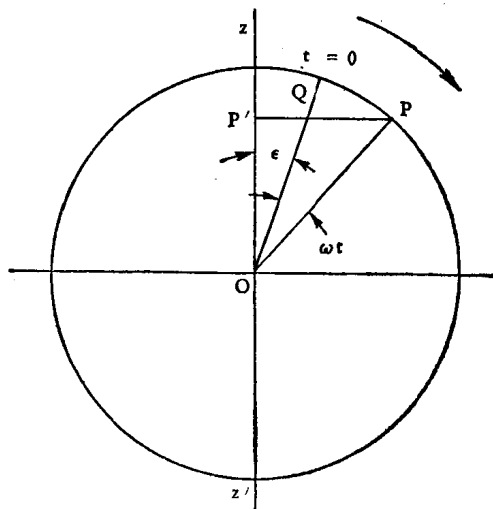


图 2.5 简谐运动的相位差

由图可见, 两条曲线的形状和大小都相同, 但在 θ 轴方向相互错位。两个函数具有相同的幅值和周期 (以 θ 表示), 但相位各异。对于任意的一般情况, 例如 $z = z_a \cos(\theta + \varepsilon)$, 恒定角 ε 称为函数相对于 $z = z_a \cos \theta$ 的**相位角**。 ε 的范围通常限于 $-\pi \leq \varepsilon \leq \pi$ 。相移值等于 $-\varepsilon$, 这是使余弦函数的幅角为零的条件。

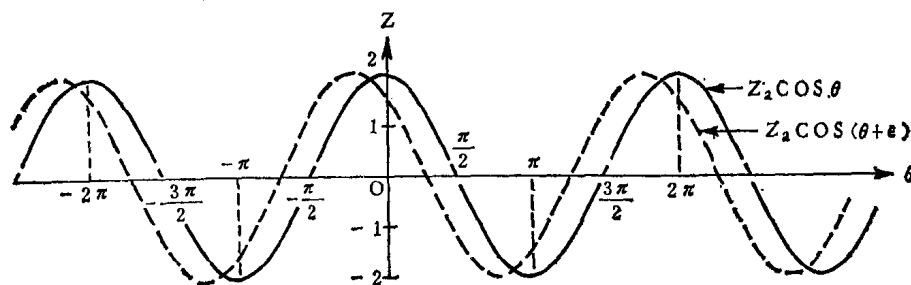


图 2.6 相位差为 ϵ 的两个简谐运动

注：在比较 $z_a \cos 3\theta$ 与 $z_a \cos\left(3\theta + \frac{\pi}{4}\right)$ 两条曲线时，相位角是 $\frac{\pi}{4}$ 。但它并不是后一曲线在曲线 $z_a \cos 3\theta$ 左面的相移值。向左的相移值可由 $3\theta + \frac{\pi}{4} = 0$ 解得，即 $\theta = -\left(\frac{\pi}{12}\right)$ 。如果 ϵ 为正值（例如图 2.6 中 $\epsilon = \frac{\pi}{3}$ ），则称函数 $z_a \cos(\theta + \epsilon)$ 超前于函数 $z_a \cos \theta$ ，此时 $z_a \cos(\theta + \epsilon)$ 的各个零点将位于 $z_a \cos \theta$ 的相应零点的左面，或先出现于 $z_a \cos \theta$ 的相应零点。如果 ϵ 为负值，则称 $z_a \cos(\theta + \epsilon)$ 滞后于函数 $z_a \cos \theta$ 。

根据以上的解释，我们说 $z_a \sin \theta = z_a \cos\left(\theta - \frac{\pi}{2}\right)$ 以 $\frac{\pi}{2}$ 滞后于 $z_a \cos \theta$ ，而 $z_a \cos \theta = z_a \sin\left(\theta + \frac{\pi}{2}\right)$ 以 $\frac{\pi}{2}$ 超前于 $z_a \sin \theta$ 。此外，还应注意到，以 π 超前与以 π 滞后的效果是相同的。由图 2.6 可得出如下一些结论：

- 幅值的变化不会使周期（以 θ 表示）和相位角变化；
- 周期（以 θ 表示）的变化不会使幅值和相位角变化；
- 相位角的变化不会使幅值和周期（以 θ 表示）变化。

幅值、以 θ 表示的周期以及相位角都是函数的独立特性，而以 θ 表示的相移值却依赖于相位角和以 θ 表示的周期，但与幅值无关。

例 2.2

求下列函数的幅值、周期、相位角以及相对于 $\sin \theta$ 的相移值，

a. $2.5 \sin 3\left(\theta + \frac{\pi}{4}\right)$

b. $4 \sin(3\theta + 45^\circ)$

解（参见图 2.7）：

a. $2.5 \sin 3\left(\theta + \frac{\pi}{4}\right)$

幅值 = 2.5

相移值： $3\theta + \frac{3\pi}{4} = 0$

因此， $\theta = -\frac{\pi}{4}$

周期 = $\frac{2\pi}{3}$

$$\text{相位角: } 3\theta + \frac{3\pi}{4}$$

$$\text{因此, } \varepsilon = \frac{3\pi}{4}$$

$$\text{b. } 4 \sin(3\theta + 45^\circ)$$

$$\text{幅值} = 4$$

$$\text{相移值: } 3\theta + 45^\circ = 0$$

$$\text{因此, } \theta = -\frac{45^\circ}{3} = -15^\circ$$

$$\text{周期} = \frac{2\pi}{3}$$

$$\text{相位角} = 45^\circ$$

在图 2.8 中给出了一组具有相同幅值和周期,但时间原点不同的简谐曲线。图 2.8 a 系当 P' 点在 $z=z_a$ 处开始计时。图 2.8 c 中,则是当 P' 点在其平衡位置处(即 $z=0$)开始计时;本例与图 2.8 b 一样,都是在 P' 点顺时针越过极限位置 $z=z_a$ 后再隔一段时间 t_0 才开始测定时间。

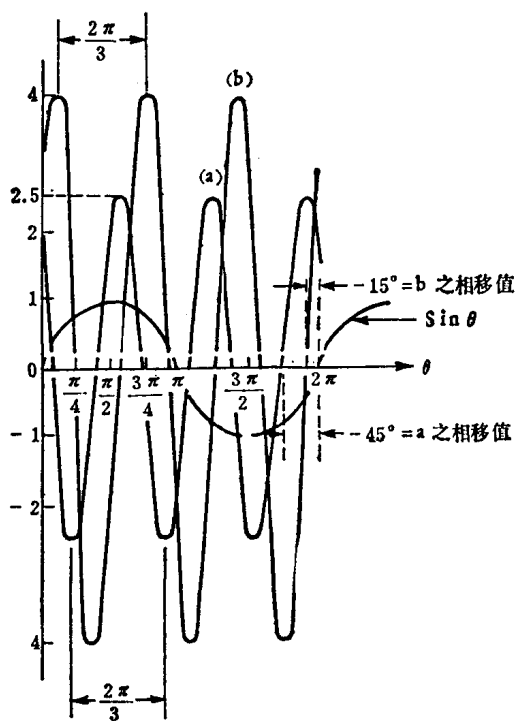


图 2.7 相移值

$$\varepsilon = \omega t_0$$

$$t_0 = \frac{\varepsilon}{\omega} = \frac{\varepsilon T}{2\pi}$$

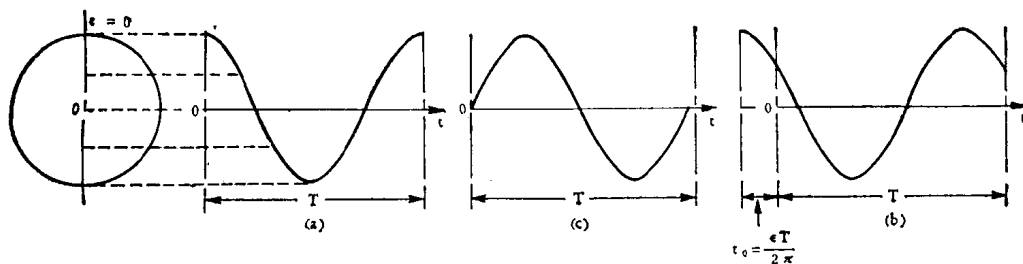


图 2.8 相互错位的相同的简谐运动

由图 2.8 可见,三幅图上的曲线都是等同的,只是三者沿横座标(t -轴)相互错位。如前所述,这一相对错位称为相移,将其乘以角速度 ω (与圆频率相等)后,就可得到以弧度表示的相位角。再次提请注意的是,图 2.8 中三条曲线的周期 T 都是相同的。若非如此,三条曲线就不能进行比较。所以,只有对相同频率的简谐运动,才能讨论相位角。例如比较式(2.1)与式(2.2),可得

$$z = z_a \cos \omega t$$

$$\dot{z} = -\omega z_a \sin \omega t$$

$$= \omega z_a \cos \left(\omega t + \frac{\pi}{2} \right)$$

这意味 P' 点的速度是与位移具有相同频率的简谐函数。如图 2.2 所示,加速度的幅值