空间角度计算用表

孙伯鲁　曲伟石　孙乔　编著

机械工业出版社

中国　北京　1994

（京）新登字054号

本书以画法几何学为工具，主要介绍用查表法解决繁杂的空间角度计算的数学模型、制表原理和查表指南。并结合工程（主要是机械工程）中的典型实例，详细介绍了查表前的分析方法、查表过程和技巧。通过与现有计算方法的对比检验，证明查表法简便可靠，获得结果迅速精确，实用性强，易于普及，免去靠人工查找公式而进行复杂计算的过程，具有明显的优越性。

为了适应各科技领域对空间角度计算的需要，书中列出了极易查找的公式系列表。

由于查表方法简单，对于一般可看懂工程图样的工人，只要稍加培训，也可掌握查用方法。

本书具有类似三角函数表的功能，是一本工具书，应用范围广泛。书中数据作为一种资源，可供各工程技术、科学研究和教学等领域中的技术人员、研究工作者、大专院校师生和技术工人使用。

图书在版编目(CIP)数据

空间角度计算用表/孙伯鲁等编著．—北京：机械工业出版社，1994

ISBN 7-111-04076-7

Ⅰ．空…

Ⅱ．孙…

Ⅲ．角度-设计-数学表

Ⅳ．TB21-64

出 版 人：马九荣（北京市百万庄南街1号　邮政编码100037）

责任编辑：刘小慧　版式设计：胡金瑛　责任校对：陈立耘

封面设计：肖　晴　责任印制：路　琳

机械工业出版社京丰印刷厂印刷·新华书店北京发行所发行

1994年7月第1版·1994年7月第1次印刷

850mm×1168mm 1/32·7印张·181千字

0 001—1 750册

定价：11.50元

前言

三维的空间角度计算是工程技术各领域中使用量大、涉及面广的基础技术。在国防、航空、电力、化工、光学仪器，尤其是机械工业中应用非常广泛。由于空间关系错踪复杂，情况各异，使得它的计算过程十分繁难，成为计算难点之一。不论在高技术产业(如CAD/CAM技术，实时控制技术)，还是在传统产业(如复杂的零部件设计及工艺计算)中，都迫切需要一个快速、精确可靠的计算方法。

解决空间角度计算的数学工具，目前应用比较普遍的是建立在球面三角学基础上的立体几何——球面三角法〔8〕和球面图法〔3〕、〔4〕、〔6〕。回顾历史，作为空间角度计算的开拓者，却是以画法几何理论为主〔1〕，用解析计算取代传统的图解法，解决了当时生产中的急需。但由于当时技术条件的限制，其公式系统过于庞大，计算时要针对具体问题，靠人工查找公式逐个进行计算，效率不高。所以，后来出现了不需查找大量公式的“球面图”法。实际上，计算过程繁杂，不是画法几何理论上的缺陷，恰恰因为它是工程技术界所普及的，为广大技术人员所熟悉的方法，以其作为数学工具，是最理想的。如果使画法几何理论与先进的计算机技术相结合，解决效率低的问题，就会把人们从繁重的计算劳动中解放出来，使方法具有实用性和方便的可操作性。基于这一思想，笔者以与微机技术相结合为目标，对画法几何的有关理论作了补充和完善，形成了一套完整的理论体系〔7〕，用微机将庞大的公式系统转化为计算用表，由原来的查找公式进行计算，变成查表取得结果，这就大大地方便了生产第一线的技术人员和工人在现场进行计算和验算，对提高生产效率和产品质量将发挥重要作用。

本书的基本理论取自河南省科委资助的基金项目，并获省教委科技进步二等奖的《空间角度新计算方法的研究》。1991年通过省级鉴定后，经在洛阳拖拉机制造厂工具处和上海组合夹具厂组装站的使用、验证，取得满意的效果，证明技术上是成熟、可靠的。

空间角度系统，按其形成环境的规律，可分为基本型、线面型和线线型三个子系统[7]。由于编制表格时只能涉及三个参数，所以本书以解决基本型为主，兼顾解决部分特殊形式的线线型角度计算。因篇幅所限，制表间隔选为1°。如果已知数据为非整数，计算精度要求较高时，读者可使用书中所提供的公式进行计算，否则，可用线性差补法近似查表。

使用书中附表时，务请认真阅读应用举例，如果使用得当，大体可解决科学和工程技术中所遇到的80%以上的空间角度计算问题。

参加本书编写的有郑州工学院孙伯鲁（前言、第一章、第四章、第五章部分），曲伟石（第二章、第三章）和北京理工大学孙乔（第五章部分）。由孙伯鲁对全书进行统稿、审校。

本书在编写过程中，得到北京理工大学叶玉驹教授、清华大学梁德本副教授的热忱推荐和支持，特致深切的感谢。

书中实例大多引自经过考验的著作和论文，以便于对比和互校。在实践考验过程中，得到洛阳拖拉机制造厂工具处王安宁总工程师、贺延忠高级工程师和上海组合夹具厂组装站陈峰站长的热情支持。全书图例承邱益同志描绘，在此一并表示感谢。

由于编著者水平所限，书中不足之处在所难免，敬请读者坦诚指出，使这一新生事物逐步完善，更好地为工程技术和教学服务。

编著者

1993年6月于郑州

目　录

第一章　绪　论

一、概　述

科学和工程技术中，许多度量和定位问题都可抽象为几何上的直线和平面的空间位置问题，如孔或轴的中心线，合力，光通路的途径，刀具的前、后刀面等。

在机械工业中，空间角度和空间尺寸是它的两大计算问题，而前者是后者的基础。空间角度主要解决方向问题，尺寸计算解决具体位置问题。通常，用相对参考（坐标）系的角度来描述直线、平面的空间方向。空间角度是指处在空间的直线、平面与参考系间或它们彼此之间所形成的角度。它的计算系指由已知角度条件求解待定角度参数，因二者经常不在同一平面上，而具有空间关系。

二、空间角度计算的实用价值

空间角度不同于平面角，无法用初等数学方法解决。而且由于其位置在空间千变万化，给计算带来很大困难。在科学研究和工程技术中经常遇到复杂的角度计算问题，如歪斜零件加工的工艺计算，光通路方向的确定及用来测定晶体取向的晶体极图的绘制等，都要求有精确实用的计算方法。而在自动化生产领域及设计过程中对角度参数的优化选择，更要求计算速度快，及时作出反应。所以，高效率和高精度地解决空间角度计算问题，是当前科学技术发展所提出的要求。研究出实用、可靠、简便的计算方法，有重要的实际意义。

三、空间角度计算的数学方法

解决空间角度计算问题的数学工具很多，如立体几何、球面

三角、空间解析几何、矢量和画法几何等。这些方法各有特点和其适应性。如何选择最理想的数学工具，各家见仁见智，影响因素比较多。能解决计算是问题的一个方面，是否简便实用，则是方法是否有生命力的另一个方面。评定其优劣的根本标准，后者才是更主要的因素。其次，方法在工程技术界是否普及、易推广也是不可忽略的，否则，不易为人们所接受。经过笔者多年的研究发现，画法几何方法在与微机技术相结合的条件下，将是最理想的工具。虽然它要求有较强的空间分析能力，但在能看懂工程图的情况下，这些能力可由电脑帮助实现，也就是说可以根据画法几何理论编制成智能化的程序，以完全代替人工的分析、建立计算公式和繁杂的计算。实践证明，本方案通过与现有各种计算方法的对比和检验，所得结果完全一致，但却显示出非常简便、快捷的优越性。

本书完全使用在工程技术界所普及的画法几何方法，并通过对其理论的完善和补充，以与微机技术相结合为目标，找出解决计算问题的普遍规律，形成一套可兼容其它方法的理论体系。由所建立的通用数学模型，使得计算规范化、程序化，使与微机技术相结合成为可能。编制成软件，可以在微机上很方便地进行计算和自动绘图；编制成计算用表，可以象查三角函数表一样便捷地获得结果，从根本上达到高效率和高精度的统一。

书中的计算用表就是在上述方法的基础上，根据数学模型所编制的程序，通过微机自动生成。所有数据作为一种资源，供使用者查取，完全不用考虑它的数学方法和计算公式。

四、关于基础知识的要求

使用本书中所提供的计算用表，基本上可以免去计算过程，但要具有较熟练的看工程图的能力，如果要了解制表原理，则需要有一定的画法几何的基础知识。通常工程技术人员和技术工人，都具备这些能力，所以，使用时并不需要特殊的训练，一般工人经过短期训练，很快便可掌握其查用方法。

第二章　数学模型的建立

一、基本参数的约定

直线、平面的方向可用不同的方法确定，如一直线可用两点，也可用两平面来限定其方向。为了适应生产实际的需要，我们统一约定用基本（标准）参数表示它们的方向。

（一）直线的基本参数

置于三投影面体系中的直线，我们约定它对三投影面的倾角（α、β、γ）和其三个投影与相应投影轴的夹角（称投影角，α_V、β_H，α_W）作为基本角度，如图 2-1 中所示直线AB的6个基本角度，亦即基本参数。当直线三个倾角均不为零时，它同时倾斜于三个投影面，称之为双斜（或一般位置）直线；当有一个倾角为零时，称为单斜（或投影面平行）直线。

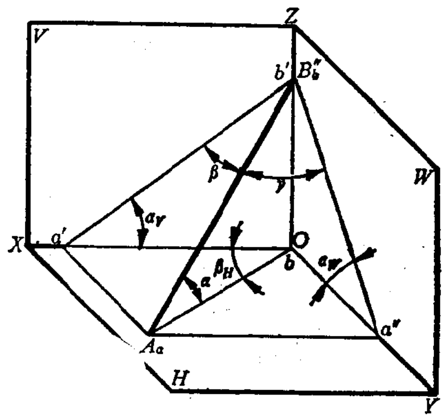

图2-1　直线的 6 个参数

双斜直线因其各投影角方向的区别，而有 4 个不同的走向，见图2-2。

（二）平面的基本参数

和直线相类似，约定用平面对三投影面的倾角（α_1、β_1、γ_1）和其三个迹线与相应投影轴的夹角（叫迹线角，M、N、R）作为基本角度，如图2-3中所示为平面P的 6 个基本角度，亦即基本参数。（该图中的θ_X、θ_Y、θ_Z为迹线间夹角，不是基本参数）。

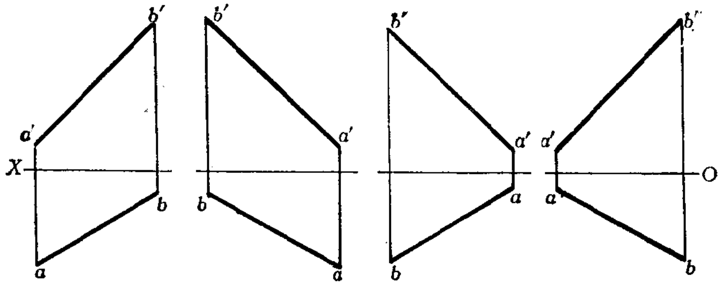

图2-2　直线的 4 个走向

当平面三个倾角均不为 90°时，它同时倾斜于三个投影面，称之为双斜（或一般位置）平面；当有一个倾角为 90°时，称为单斜（或投影面垂直）平面。

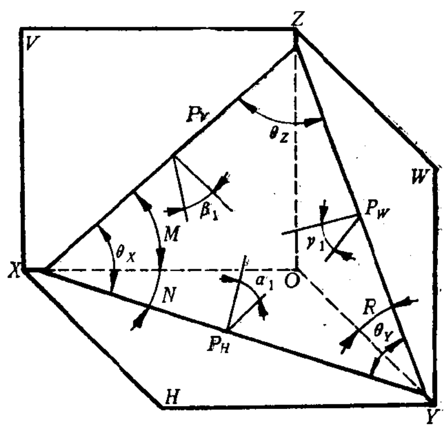

图2-3　平面的 6 个参数

双斜平面因其各迹线角方向的区别，而有 4 个不同的走向，见图2-4。

（三）平面与直线基本参数间的关系

因为所研究的空间角度问题，只计方向而不考虑它们所通过的点，因此，平面的方向可由其法线表示。此时，两者的基本参数间具有互余关系，我们可把平面参数转化为作为

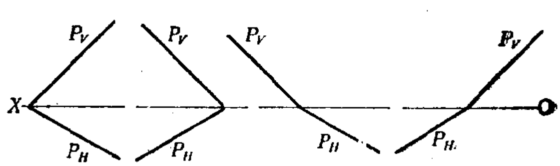

图2-4　平面的 4 个走向

其法线的直线参数，而将二者的角度计算问题统一用直线形式加以解决。

设平面的基本参数为X，其法线对应的基本参数为Y，则$X+Y=90^\circ$。X与Y的对应关系见表2-1。

表2-1　平面、直线基本参数对照表

平面参数　X	α_1	β_1	γ_1	M	N	R
法线参数　Y	α	β	γ	α_V	β_H	α_W

解决平面角度计算的过程可用以下流程图表示，见图2-5。

已知平面参数 → 转化为法线参数 → 解法线问题 → 转化回平面参数

图　2-5

二、直线基本参数间的函数关系式

（一）已知条件分析

直线的方向要用基本角度参数给定，否则应进行转换。

根据几何学的原理，确定直线方向的必要而充分的条件是给定其6个基本参数中的两个。经过无重复的排列组合，总计可有$C_6^2=15$种已知条件的搭配形式，供使用时选择。

（二）函数关系式的推导

直线的6个基本参数中只需给定两个，其余4个便可由它们与已知参数间的函数关系滚动求出，现举例说明如下：

设已知AB直线的两投影角α_V、β_H，试求其余4参数（参看图2-6）。

由图2-6的新投影V_1可得：

$$\operatorname{tg}\alpha=\Delta Z/ab \tag{2-1}$$

而由V投影：

$$\Delta Z=\Delta X\cdot\operatorname{tg}\alpha_V$$

由H投影：

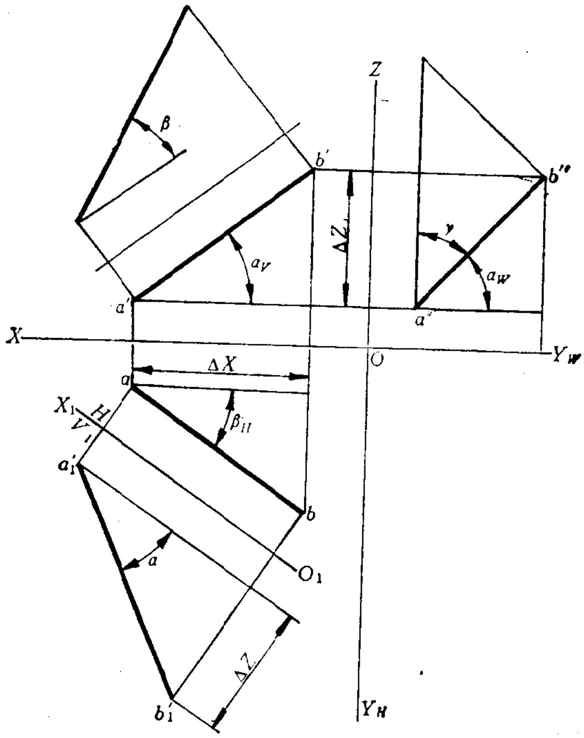

图2-6　直线的投影

$$ab = \Delta X / \cos\beta_H$$

将它们代入式（2-1），则得

$$\mathrm{tg}\alpha = \mathrm{tg}\alpha_V \cdot \cos\beta_H \tag{2-2}$$

同理可求出

$$\mathrm{tg}\beta = \mathrm{tg}\beta_H \cdot \cos\alpha_V \tag{2-3}$$

$$\mathrm{tg}\alpha_W = \mathrm{tg}\alpha_V / \mathrm{tg}\beta_H \tag{2-4}$$

$$\mathrm{ctg}\gamma = \sqrt{\mathrm{tg}^2\alpha_V + \mathrm{tg}^2\beta_H} \tag{2-5}$$

若将式（2-2）～式（2-5）中各项换位后，又各可派生出两个式子，如式（2-2）可派生出

$$\mathrm{tg}\alpha_V = \mathrm{tg}\alpha / \cos\beta_H \qquad (2\text{-}2)'$$

和

$$\cos\beta_H = \mathrm{tg}\alpha / \mathrm{tg}\alpha_V \qquad (2\text{-}2)''$$

（三）各基本参数间的制约关系

由参数间的函数关系可以看出，它们之间是有制约关系的。例如，由式（2-2）可推出 $\alpha \leqslant \alpha_V$。所有的制约关系，按直线和平面分别列表2-2、表2-3，在给定参数时不能违反。

表2-2　直线参数间制约关系

	α_W	β_H	α_V	γ	β
α	$\alpha \leqslant \alpha_W$	—	$\alpha \leqslant \alpha_V$	$\alpha+\gamma \leqslant 90°$	$\alpha+\beta \leqslant 90°$
β	$\beta \leqslant 90° - \alpha_W$	$\beta \leqslant \beta_H$	—	$\beta+\gamma \leqslant 90°$	
γ	—	$\gamma \leqslant 90° - \beta_H$	$\gamma \leqslant 90° - \alpha_V$		

表2-3　平面参数间制约关系

	R	N	M	γ_1	β_1
α_1	$\alpha_1 \geqslant R$	—	$\alpha_1 \geqslant M$	$\alpha_1+\gamma_1 \geqslant 90°$	$\alpha_1+\beta_1 \geqslant 90°$
β_1	$\beta_1 \geqslant 90° - R$	$\beta_1 \geqslant N$	—	$\beta_1+\gamma_1 \geqslant 90°$	
γ_1	—	$\gamma_1 \geqslant 90° - N$	$\gamma_1 \geqslant 90° - M$		

（四）计算公式系列表

由函数关系式的推导过程可以看出，6个基本参数中的任意3个之间均可建立一套关系式，因此，全部6个参数间无重复的排列组合，可形成 $C_6^3 = 20$种独立的计算关系式。而每个关系式中3参数间换位后，又派生出另外两种形式，如式(2-2)、(2-2)′、(2-2)″间的情况。这样，总计可形成 $3 \times C_6^3 = 60$种计算公式，供在各种已知条件组合形式下，滚动求所缺4个参数时使用。为了使读者全面了解整体情况，方便地由已知条件迅速查到计算待求参数的公式，特编制直线、平面计算公式系列表（见表2-4、2-5）。制表方法及使用说明介绍如下：

（1）表中第一行及第一列为已知参数。

（2）每一行和一列可确定一个区域，表中共有15个区，对

表2-4 直线

已知	α_W		β_H	
α	$\sin\beta=\sin\alpha/\mathrm{tg}\alpha_W$	(4)	$\sin\beta=\sin\beta_H\cdot\cos\alpha$	(3)
	$\cos\gamma=\sin\alpha/\sin\alpha_W$	(7)	$\sin\gamma=\cos\beta_H\cdot\cos\alpha$	(6)
	$\mathrm{ctg}\alpha_V=\sqrt{\mathrm{ctg}^2\alpha-\mathrm{ctg}^2\alpha_W}$	(15)′	$\mathrm{tg}\alpha_V=\mathrm{tg}\,\alpha/\cos\beta_H$	(11)′
	$\sin\beta_H=\mathrm{tg}\,\alpha/\mathrm{tg}\alpha_W$	(18)′	$\mathrm{tg}\alpha_W=\mathrm{tg}\,\alpha/\sin\beta_H$	(18)
β	$\sin\alpha=\sin\beta\cdot\mathrm{tg}\alpha_W$	(4)′	$\cos\alpha=\sin\beta/\sin\beta_H$	(3)
	$\cos\gamma=\sin\beta/\cos\alpha_W$	(10)	$\sin\gamma=\sin\beta/\mathrm{tg}\beta_H$	(9)
	$\sin\alpha_V=\mathrm{tg}\,\beta\cdot\mathrm{tg}\alpha_W$	(16)	$\cos\alpha_V=\mathrm{tg}\,\beta/\mathrm{tg}\beta_H$	(12)′
	$\mathrm{ctg}\beta_H=\sqrt{\mathrm{ctg}^2\beta-\mathrm{tg}^2\alpha_W}$	(19)	$\mathrm{tg}\alpha_W=\sqrt{\mathrm{ctg}^2\beta-\mathrm{ctg}^2\beta_H}$	(19)′
γ	$\sin\alpha=\cos\gamma\cdot\sin\alpha_W$	(7)′	$\cos\alpha=\sin\gamma/\cos\beta_H$	(6)′
	$\sin\beta=\cos\gamma\cdot\cos\alpha_W$	(10)′	$\sin\beta=\sin\gamma\cdot\mathrm{tg}\beta_H$	(9)′
	$\mathrm{tg}\alpha_V=\sin\alpha_W/\mathrm{tg}\,\gamma$	(17)′	$\mathrm{tg}\alpha_V=\sqrt{\mathrm{ctg}^2\gamma-\mathrm{tg}^2\beta_H}$	(13)′
	$\mathrm{tg}\beta_H=\cos\alpha_W/\mathrm{tg}\,\gamma$	(20)′	$\cos\alpha_W=\mathrm{tg}\,\gamma\cdot\mathrm{tg}\beta_H$	(20)
α_V	$\mathrm{ctg}\,\alpha=\sqrt{\mathrm{ctg}^2\alpha_V+\mathrm{ctg}^2\alpha_W}$	15	$\mathrm{tg}\,\alpha=\mathrm{tg}\alpha_V\cdot\cos\beta_H$	11
	$\mathrm{tg}\,\beta=\sin\alpha_V/\mathrm{tg}\alpha_W$	16	$\mathrm{tg}\,\beta=\mathrm{tg}\beta_H\cdot\cos\alpha_V$	12
	$\mathrm{tg}\,\gamma=\sin\alpha_W/\mathrm{tg}\alpha_V$	17	$\mathrm{ctg}\,\gamma=\sqrt{\mathrm{tg}^2\alpha_V+\mathrm{tg}^2\beta_H}$	13
	$\mathrm{tg}\beta_H=\mathrm{tg}\alpha_V/\mathrm{tg}\alpha_W$	(14)	$\mathrm{tg}\alpha_W=\mathrm{tg}\alpha_V/\mathrm{tg}\beta_H$	14
β_H	$\mathrm{tg}\,\alpha=\mathrm{tg}\alpha_W\cdot\sin\beta_H$	18		
	$\mathrm{ctg}\,\beta=\sqrt{\mathrm{ctg}^2\beta_H+\mathrm{tg}^2\alpha_W}$	19		
	$\mathrm{tg}\,\gamma=\cos\alpha_W/\mathrm{tg}\beta_H$	20		
	$\mathrm{tg}\alpha_V=\mathrm{tg}\beta_H\cdot\mathrm{tg}\alpha_W$	(14)′		

计算公式系列表

α_V		γ		β	
$\cos\beta=\sin\alpha/\sin\alpha_V$	(2)	$\mathrm{tg}\,\alpha_V=\sin\alpha/\sin\gamma$	5	$\sin\gamma=\sqrt{\cos^2\beta-\sin^2\alpha}$	1
$\sin\gamma=\sin\alpha/\mathrm{tg}\,\alpha_V$	(5)	$\cos\beta_H=\sin\gamma/\cos\alpha$	6	$\sin\alpha_V=\sin\alpha/\cos\beta$	2
$\cos\beta_H=\mathrm{tg}\,\alpha/\mathrm{tg}\,\alpha_V$	(11)	$\sin\alpha_W=\sin\alpha/\cos\gamma$	7	$\sin\beta_H=\sin\beta/\cos\alpha$	3
$\mathrm{ctg}\,\alpha_W=\sqrt{\mathrm{ctg}^2\alpha-\mathrm{ctg}^2\alpha_V}$	(15)	$\cos\beta=\sqrt{\sin^2\alpha+\sin^2\gamma}$	(1)	$\mathrm{tg}\,\alpha_W=\sin\alpha/\sin\beta$	4
$\sin\alpha=\cos\beta\cdot\sin\alpha_V$	(2)′	$\cos\alpha_V=\sin\gamma/\cos\beta$	8		
$\sin\gamma=\cos\beta\cdot\cos\alpha_V$	(8)	$\mathrm{tg}\,\beta_H=\sin\beta/\sin\gamma$	9		
$\mathrm{tg}\,\beta_H=\mathrm{tg}\,\beta/\cos\alpha_V$	(12)	$\cos\alpha_W=\sin\beta/\cos\gamma$	10		
$\mathrm{tg}\,\alpha_W=\sin\alpha_V/\mathrm{tg}\,\beta$	(16)	$\sin\alpha=\sqrt{\cos^2\beta-\sin^2\gamma}$	(1)′		
$\sin\alpha=\sin\gamma\cdot\mathrm{tg}\,\alpha_V$	(5)′				
$\cos\beta=\sin\gamma/\cos\alpha_V$	(8)′				
$\mathrm{tg}\,\beta_H=\sqrt{\mathrm{ctg}^2\gamma-\mathrm{tg}^2\alpha_V}$	(13)				
$\sin\alpha_W=\mathrm{tg}\,\gamma\cdot\mathrm{tg}\,\alpha_V$	(17)				

表2-5 平面计

已知	R		N	
α_1	$\cos\beta_1=\mathrm{tg}R\cdot\cos\alpha_1$	(4)	$\cos\beta_1=\cos N\cdot\sin\alpha_1$	(3)
	$\sin\gamma_1=\cos\alpha_1/\cos R$	(7)	$\cos\gamma_1=\sin N\cdot\sin\alpha_1$	(6)
	$\mathrm{tg}M=\sqrt{\mathrm{tg}^2\alpha_1-\mathrm{tg}^2R}$	(15)′	$\mathrm{tg}M=\sin N\cdot\mathrm{tg}\alpha_1$	(11)′
	$\cos N=\mathrm{tg}R/\mathrm{tg}\alpha_1$	(18)′	$\mathrm{tg}R=\cos N\cdot\mathrm{tg}\alpha_1$	(18)
β_1	$\cos\alpha_1=\cos\beta_1/\mathrm{tg}R$	(4)′	$\sin\alpha_1=\cos\beta_1/\cos N$	(3)′
	$\sin\gamma_1=\cos\beta_1/\sin R$	(10)	$\cos\gamma_1=\cos\beta_1\cdot\mathrm{tg}N$	(9)
	$\cos M=\mathrm{ctg}\beta_1/\mathrm{tg}R$	(16)′	$\sin M=\mathrm{tg}N/\mathrm{tg}\beta_1$	(12)′
	$\mathrm{tg}N=\sqrt{\mathrm{tg}^2\beta_1-\mathrm{ctg}^2R}$	(19)	$\mathrm{ctg}R=\sqrt{\mathrm{tg}^2\beta_1-\mathrm{tg}^2N}$	(19)′
γ_1	$\cos\alpha_1=\sin\gamma_1\cdot\cos R$	(7)′	$\sin\alpha_1=\cos\gamma_1/\sin N$	(6)′
	$\cos\beta_1=\sin\gamma_1\cdot\sin R$	(10)′	$\cos\beta_1=\cos\gamma_1/\mathrm{tg}N$	(9)′
	$\mathrm{tg}M=\mathrm{ctg}\gamma_1/\cos R$	(17)′	$\mathrm{ctg}M=\sqrt{\mathrm{tg}^2\gamma_1-\mathrm{ctg}^2N}$	(13)′
	$\mathrm{tg}N=\mathrm{ctg}\gamma_1/\sin R$	(20)′	$\sin R=\mathrm{ctg}\gamma_1/\mathrm{tg}N$	(20)
M	$\mathrm{tg}\alpha_1=\sqrt{\mathrm{tg}^2M+\mathrm{tg}^2R}$	15	$\mathrm{tg}\alpha_1=\mathrm{tg}M/\sin N$	11
	$\mathrm{ctg}\beta_1=\mathrm{tg}R\cdot\cos M$	16	$\mathrm{tg}\beta_1=\mathrm{tg}N/\sin M$	12
	$\mathrm{ctg}\gamma_1=\mathrm{tg}M\cdot\cos R$	17	$\mathrm{tg}\gamma_1=\sqrt{\mathrm{ctg}^2M+\mathrm{ctg}^2N}$	13
	$\mathrm{tg}N=\mathrm{tg}M/\mathrm{tg}R$	(14)	$\mathrm{tg}R=\mathrm{tg}M/\mathrm{tg}N$	14
N	$\mathrm{tg}\alpha_1=\mathrm{tg}R/\cos N$	18		
	$\mathrm{tg}\beta_1=\sqrt{\mathrm{tg}^2N+\mathrm{ctg}^2R}$	19		
	$\mathrm{ctg}\gamma_1=\mathrm{tg}N\cdot\sin R$	20		
	$\mathrm{tg}M=\mathrm{tg}N\cdot\mathrm{tg}R$	(14)′		

算公式系列表

M		γ_1		β_1	
$\sin\beta_1=\cos\alpha_1/\cos M$	(2)	$\mathrm{tg}\,M=\cos\gamma_1/\cos\alpha_1$	5	$\cos\gamma_1=\sqrt{\sin^2\beta_1-\cos^2\alpha_1}$	1
$\cos\gamma_1=\cos\alpha_1\cdot\mathrm{tg}\,M$	(5)	$\sin N=\cos\gamma_1/\sin\alpha_1$	6	$\cos M=\cos\alpha_1/\sin\beta_1$	2
$\sin N=\mathrm{tg}\,M/\mathrm{tg}\,\alpha_1$	(11)	$\cos R=\cos\alpha_1/\sin\gamma_1$	7	$\cos N=\cos\beta_1/\sin\alpha_1$	3
$\mathrm{tg}\,R=\sqrt{\mathrm{tg}^2\alpha_1-\mathrm{tg}^2M}$	(15)	$\sin\beta_1=\sqrt{\cos^2\alpha_1+\cos^2\gamma_1}$	(1)	$\mathrm{tg}\,R=\cos\beta_1/\cos\alpha_1$	4
$\cos\alpha_1=\sin\beta_1\cdot\cos M$	(2)′	$\sin M=\cos\gamma_1/\sin\beta_1$	8		
$\cos\gamma_1=\sin\beta_1\cdot\sin M$	(8)	$\mathrm{tg}\,N=\cos\gamma_1/\cos\beta_1$	9		
$\mathrm{tg}\,N=\mathrm{tg}\,\beta_1\cdot\sin M$	(12)	$\sin R=\cos\beta_1/\sin\gamma_1$	10		
$\mathrm{tg}\,R=\mathrm{ctg}\,\beta_1/\cos M$	(16)	$\cos\alpha_1=\sqrt{\sin^2\beta_1-\cos^2\gamma_1}$	(1)′		
$\cos\alpha_1=\cos\gamma_1/\mathrm{tg}\,M$	(5)′				
$\sin\beta_1=\cos\gamma_1/\sin M$	(8)′				
$\mathrm{ctg}\,N=\sqrt{\mathrm{tg}^2\gamma_1-\mathrm{ctg}^2M}$	(13)				
$\cos R=\mathrm{ctg}\,\gamma_1/\mathrm{tg}\,M$	(17)				

应着15种已知条件的组合。每区内有 4 个公式，用来计算待求参数。公式后不带括号的编号共20个，为基本关系式；带括号的编号表示为同号所派生出的公式，如（2）、（2）′为 2 的派生式，共40个。

（3）使用时，由给定的已知条件，先在第一行和第一列中定位，由横、竖坐标找出区域位置，区域内便提供了计算其余 4 个参数的公式。