计算数学丛书

计算组合数学

徐利治　蒋茂森　朱自强

上海科学技术出版社

计算数学丛书

计算组合数学

徐利治　蒋茂森　朱自强

上海科学技术出版社

5206/7

计算数学丛书
计算组合数学
徐利治 蒋茂森 朱自强
上海科学技术出版社出版
（上海瑞金二路450号）
新华书店上海发行所发行 上海东方印刷厂印刷
开本787×1092 1/32 印张6.375 字数137,000
1983年5月第1版 1983年5月第1次印刷
印数 1—12,700
统一书号：13119·1069 定价：(科四) 0.61元

出 版 说 明

《计算数学丛书》是为了适应计算数学和计算机科学的发展，配合高等院校计算数学教学的需要而组织的一套参考读物。读者对象主要是高等院校数学系和计算机科学系的学生、研究生，亦可供高等院校数学系和计算机科学系的教师以及工矿企业、科研单位从事计算工作的技术人员参考。

本丛书向读者介绍近代计算方法的一些主要进展及其适用范围和实用效果。每种书集中介绍一个专题，针对本专题的近代发展作综合性的介绍，内容简明扼要，重点突出，有分析，有评价，力图使读者对该专题的动向和发展趋势得到一个完整的了解。

本丛书已拟定的选题计有：《线性代数与多项式的快速算法》、《数论变换》、《数值有理逼近》、《矩阵特征值问题》、《索伯列夫空间引论》、《计算组合数学》、《样条与插值》、《有限条形法》、《广义逆矩阵及其计算方法》、《非线性方程迭代解法》、《奇异摄动中的边界层校正法》、《沃尔什函数理论与应用》、《多项式最佳逼近的实现》、《坏条件常微分方程数值解》、《误差分析》、《最小二乘问题的数值解法》、《板壳问题非协调方法》、《外推法及其应用》、《Monte Carlo 方法》、《差分格式理论》、《高维偏微分方程数值解》等二十余种，于一九八〇年初起陆续出版。

序　言

组合数学是一门既古老而又年青的数学．在十七、十八世纪这门数学最早是和数论及概率计算交叉发展着的．本世纪五十年代以来，特别是由于计算机科学的巨大发展，已经促使组合数学改变旧有面貌，形成了富有生命力的新兴的数学分支．如大家所知，国外许多大学都已把组合数学作为一门基础课程来讲授了．在研究工作领域里，组合理论也早已有了国际性的专门刊物，经常展示出各种丰富多彩的引人入胜的新成果．这一现象正如现代有的代数学家在谈论“代数发展趋势”时所指出的，代数系统结构的研究正在让位于**关系**结构的研究，而组合数学正是分析计算**关系**结构的一门数学．

组合数学在我国也已日渐受到人们的重视．不少地方已经组织了这门数学的讨论班，并举行过学术讨论会．个别大学也开设了这门课程．但总的看来，这门数学在我国还不够普及，不够发展：一般大学还没有把它安排到基础课程的位置．其实，从发展计算数学、统计数学、运筹科学与一般应用数学的角度着眼，真是有必要把这门数学列为必修科目之一．

我们在过去两年里，曾通过讨论班活动方式，积累了有关组合数学的一批教学与科研材料，并开展了若干工作．1980年，作者之一曾在大连工学院为计算机软件专业毕业班及计算数学教研室的中青年教师们开设了“组合论”的课程．这本小册子的全部题材就是由讲课教材和讨论班研究报告材料综

合整理而成的.

本书的前五章内容题材，直接论述了组合数学中的各类计算问题、计算方法以及与此有关的论题. 诸如发生函数方法(第二章)、交叉分类原理(第三章)、Möbius 反演公式(第四章)、Pólya 计数理论(第五章)等都是组合数学中基本的有效的分析计算工具. 对于一个现代计算数学工作者来说，掌握这些有效工具将是十分有益的. 看来只有最后两章的题材内容，不直接与计算有关. 但在分析某些组合结构问题时，却是必不可少的理论武器，它们也间接地为计数问题服务.

我们把此书叫作"计算组合数学"，目的无非希望读者更多地注意掌握组合计算中的思想方法与技巧. 当然最后两章比较具有抽象理论色彩，但它们对锻炼人们的组合分析思维能力却也是完全必要的.

为了便利读者在阅读本书时不必求助于它书，本书写法上力求作到题材自给自足，自成体系；而且各章题材内容具有相对独立性，读者也可选读本书的任何一章或数章. 本书的另一特点是例题较多. 这对初学者掌握思想方法与技巧可能是有帮助的.

本书最后还添加了一个附录——"组合恒等式简表". 虽说是"简表"，但一共罗列了 99 个组合公式. 这在国内的各种数学用表中还是不易觅得的. 为此我们要感谢美国组合分析学家高而德 (H. W. Gould) 教授，他曾赠送《组合恒等式》(Combinatorial Identities) 一书 (该书共包含有 550 个组合公式). 如果没有这本稀有珍贵的公式书，我们就无从收集这么一大批对计算有用的公式.

这本书断断续续地写了两年之久. 固然书中包含了若干新颖的题材和结果，写法上也有作者们自己的观点和心得，但

再三琢磨的时间毕竟较少，成稿之后也还没有再次通过教学实践的检验，所以考虑不周乃至鱼鲁之误，谅必难免．敬希读者不吝指正．

徐利治　蒋茂森　朱自强

1981.7.3.于吉林大学

目　录

第 1 章

排列组合的简单计算

本章内容具有引论的性质，在这里我们将从复习最简单的排列、组合概念开始，逐步加以引伸，介绍了允许重复的排列、组合及圆排列等计数方法．通过 Fibonacci 数的例子引进了递推关系和发生函数的解法，最后还介绍几个简单的组合恒等式．对于具有一定基础的读者，本章可以略去不读．

§1 基本定义和公式

排列、组合问题是最简单的配置、分类和计数问题．

定义 从一集合 S 中有序地选取一组元素称为排列．从一集合 S 中选取一组元素而不计其次序称为组合．

例如一个集合含有 n 个元素，它们中可以有相同的，也可以各不相同（一般在不作特殊声明时指 n 个不同元素），所谓从 n 个元素中取 r 个元素的排列是指从这 n 个元素中依次取出 r 个元素；而在 n 个元素中取 r 个元素的排列数是指从 n 个元素中依次取出 r 个元素的一切可能方法的数目．

在以下论述中，经常要用到加法律和乘法律两个规则：

加法律 若事物 A 有 m 种选取法，事物 B 又有另外 n 种选取法，则事物 A 与 B 任取其一的选法总数有 $m+n$ 种．

乘法律 若事物 A 有 m 种选取法，而后事物 B 又有 n 种选取法，则先 A 后 B 就共有 mn 种选取法．

加法律中着眼的是事物 A 和事物 B 具有互斥性，乘法律则着眼于事物 A 和事物 B 在选取过程中可能存在的依赖关系.

公式 1 从 n 个不同的元素中取 r 个不同元素的排列数 $P(n, r)$ 为

$$P(n, r)=n(n-1)(n-2)\cdots(n-r+1). \qquad (1.1)$$

证 1 设想有 r 个空格，现在我们来考虑有多少种方法能把 n 个不同的元素放到这 r 个空格中去(每格只放一个且必放一个).

首先，因为 n 个不同元素的任何一个均可放入第一个空格，所以第一个空格显然有 n 种放法. 在放第二个空格时，因为已经用掉了一个元素，只剩下 $n-1$ 个元素可供选取，所以有 $n-1$ 种放法. 依此类推，到放第 r 个空格时就只剩下 $(n-r+1)$ 个元素可供选取，所以只有 $(n-r+1)$ 种放法. 按乘法律，总的方法数为

$$P(n, r)=n(n-1)(n-2)\cdots(n-r+1).$$

也即自 n 算起的 r 个因子的乘积，其中每个因子比前一因子小 1，记成 $(n)_r$，读作 n 的"降 r 阶乘".

证 2 我们也可以用不重复地数尽这些排列方法来证明这个公式. 先把以元素 a_1 开始的那些排列数找出来. 由于起始元素已选定为 a_1，所以这就等于把 a_1 除外从 $n-1$ 个元素中选 $r-1$ 个的排列数. 具有确定起始元素的排列数为 $P(n-1, r-1)$. 我们把排列按起始元素来分类，n 个元素中的任何一个都可以选作起始元素，从而有 $P(n, r)=nP(n-1, r-1)$. 同理得到 $P(n-1, r-1)=(n-1)P(n-2, r-2)$. 如此下去，最终得到

$$P(n-r+2, 2)=(n-r+2)P(n-r+1, 1)$$

$$=(n-r+2)(n-r+1).$$

故有

$$P(n,\ r)=n(n-1)(n-2)\cdots(n-r+2)(n-r+1)=(n)_r.$$

第二个证明显然要比第一个证明麻烦些，但对复杂的排列组合问题，找第一种证明往往并非容易．但是只要能找到问题中可按一定规则的分类方法(本例中是按起始元素来分类)，再能找出这些分类之间的递推关系，加上已知的边界条件(在本例中为 $P(n-r+1,\ 1)=(n-r+1)$)，我们就可以找出一种计算排列(组合)数的方法．这种方法在实用中具有一定的普遍性，下面还可看到它的应用．

公式2 从 n 个不同元素中取出 r 个元素来排成一个圆环状称为"圆排列"(按某种顺序——例如逆时针——看去完全相同者，认为是同一个圆排列)．由于对每一个固定的 n 个取 r 个的圆排列均恰有 r 种不同的方式展成 r 个不同的"直线排列"；不同的圆排列展成的直线排列彼此也必不同．全部圆排列展出的恰好就是全部直线排列，因此直线排列数是圆排列数的 r 倍．由此即得，若以 $K(n,\ r)$ 表示所说的圆排列数，则

$$K(n,\ r)=P(n,\ r)/r=(n)_r/r. \tag{1.2}$$

特别，n 个元素取 n 个的圆排列，即用全部 n 个元素所作成的圆排列的总数为

$$K(n,\ n)=n!/n=(n-1)!.$$

如果在作圆排列时，对于顺时针逆时针的排列不加区别．即按顺时针或逆时针看去完全一致时认为是同一个，则圆排列数显然减半 $(r\geqslant 3)$．此时，n 个取 r 个的圆排列总数即为 $(n)_r/2r$.

公式3 n 个不同元素每次取 r 个作排列，但在选取过程

中任何元素均允许重复出现，这种排列称为“n个元素允许重复取r个的排列”．这种排列的个数比上面的更好求，因为r个元素中的第一个有n种取法，而对于第一个元素的任何一种固定取法，第二个元素均仍有n种方法可供选取．按乘法律，前二元共有n^2种取法．依此类推，知所求排列总数为n^r．

公式4 若n个元素中有一些相同而不能区别，例如有α个x，β个y，$\cdots$，γ个z，$(\alpha+\beta+\cdots+\gamma)=n$．则由此$n$个元素作成的全排列的总数为$n!/\alpha!\beta!\cdots\gamma!$．

证明 任取一个这种排列，设想将其中的α个x分别赋以足标1, 2, $\cdots$, α，则这种填写足标的办法便有$\alpha!$种，又对其中β个y亦赋以足标仍有$\beta!$种办法，如此等等，直到对γ个z也有$\gamma!$个填写足标的办法．这样由每个满足要求的排列便可演化出$\alpha!\beta!\cdots\gamma!$个赋足标的排列，因此所求排列的$\alpha!\beta!\cdots\gamma!$倍便是全部赋足标的排列，而后者恰就是$n$个不同元素的全排列的总数，即$n!$，由此即知欲证为真．

公式5 从n个元素中取r个元素的组合数为

$$C(n,\ r)\equiv\binom{n}{r}=n(n-1)\cdots(n-r+1)/1\cdot2\cdots r$$
$$=(n)_r/r!. \tag{1.3}$$

证明 利用从n个元素中取r个元素的每一个组合去作排列都可以得到$r!$个不同的排列，而这些排列在从n个元素中取r个元素的排列中都必出现一次且仅出现一次，因而有$C(n,\ r)\cdot r!=P(n,\ r)$．也即$C(n,\ r)=P(n,\ r)/r!$．上下乘以$(n-r)!$得

$$\binom{n}{r}=\frac{n!}{r!(n-r)!}. \tag{1.4}$$

今后约定$\binom{n}{r}=0$ $(r<0$ 或 $r>n)$. 易见这种约定符合(1.3)式的要求.

推论 1
$$\binom{n}{r}=\binom{n}{n-r}. \tag{1.5}$$

此式从(1.4)很易得到, 但从组合数学的角度,我们希望能对它给出一种组合解释. 组合解释本身也是一种证明. 从 n 个元素中取 r 个元素的组合无非是把 n 个元素拆成两部分. 一部分是取出的 r 个元素, 另一部分则是剩下的 $n-r$ 个元素. 当一旦选定了某 r 个元后,剩下的 $n-r$ 个元也就随之而被确定了. 这样,取 r 个元素的组合同取 $n-r$ 个元素的组合形成了一一对应. 所以先选 r 元和先选 $n-r$ 元可看成是一回事,从而推论得证.

推论 2
$$\binom{n}{r}=\binom{n-1}{r}+\binom{n-1}{r-1}. \tag{1.6}$$

这个等式很重要,因为它是联系 n 个组合数和 $n-1$ 个组合数的一个递推关系. 其组合意义也很显然. 在 n 个元素中指定一个元素,比如 a, 则$\binom{n-1}{r}$就表示 n 个元素中取 r 个元素但不含元素 a 的组合数,$\binom{n-1}{r-1}$则是 n 个元素中取 r 个元素但必含 a 的组合数. 利用加法律就得(1.6)式.

推论 3
$$\binom{n-1}{r-1}+\binom{n-2}{r-1}+\binom{n-3}{r-1}+\cdots+\binom{r-1}{r-1}=\binom{n}{r}. \tag{1.7}$$

可以重复应用(1.6)来推出此式. 又若设 n 个元素为 a_1,

a_2, …, a_n, 则亦可将组合总数$\binom{n}{r}$看成是必含 a_1; 不含 a_1 但必含 a_2; 不含 a_1, a_2 但必含 a_3; …; 不含 a_1, …, a_{n-r} 但必含 a_{n-r+1} 这些互斥的 $n-r+1$ 类组合之和. 应用加法律即得.

推论 4

$$\binom{n-1}{r}+\binom{n-2}{r-1}+\cdots+\binom{n-1-r}{0}=\binom{n}{r}. \tag{1.8}$$

这由推论 1 和推论 3 经过简单变换即可得到.

从以上几个例子来看, 其证明方法都是把组合问题中的各种组合方法看成一个集合, 而按某种分类法将它分成互不相交(互斥)的一些子集, 再利用加法律求得问题的解. 这是组合数学中常用的方法.

定义

$$\binom{\alpha}{r}=\frac{(\alpha)_r}{r!}=\frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\cdots(\alpha-r+1)}{r!}. \tag{1.9}$$

这个定义是比照有组合意义的$\binom{n}{r}$的公式得来的, 其中 α 可以是任意实数乃至复数. 特别$\binom{\alpha}{0}=1$. 又由(1.9)立即推出

$$\binom{-n}{r}=(-1)^r\binom{n+r-1}{r}. \tag{1.10}$$

定义

$$\binom{-n}{-r}=(-1)^{n+r}\binom{r-1}{n-1}. \tag{1.11}$$

所以要引进这个定义的理由乃是受(1.5)式的启发. 当

$-r>-n$ 时，即 $r<n$，左右两端均为 0，而当 $r\geqslant n$ 时，用 (1.5)式，应有

$$\binom{-n}{-r}=\binom{-n}{r-n}=(-1)^{r-n}\binom{n+(r-n)-1}{r-n}$$

$$=(-1)^{r-n}\binom{r-1}{r-n}=(-1)^{r+n}\binom{r-1}{n-1}. \quad (1.12)$$

现在讨论允许重复的组合.

公式 6 在元素允许重复选取时，从 n 个不同元素中取 r 个元素的组合数为

$$f(n, r)=\binom{n+r-1}{r}. \quad (1.13)$$

证明 今介绍 Euler 的证明. Euler 证明的思想是找一个等价的易于分拆的问题. 设想这 n 个元素和自然数 1, 2, …, n 一一对应，于是所考虑的任何组合便可看成是一个 r 个数的组合 $\{c_1, c_2, \cdots, c_r\}$. 因为是组合，不妨认为各 c_i 是按大小次序排列的，相同的 c_i 连续地排在一起，在这组数的基础上，我们构造另一组数 $\{d_1, d_2, \cdots, d_r\}$ 和它对应. 其中令 $d_i=c_i+i-1$，$i=1, 2, \cdots, r$. 即 $d_1=c_1+0, d_2=c_2+1, \cdots$. 如此，即使有的 c_i 有重复，但这些 d_i 就不会有相同的了. 易见有一种 $\{c_1, c_2, \cdots, c_r\}$ 的取法，便有一种 $\{d_1, d_2, \cdots, d_r\}$ 的取法. 而且这两种取法有一一对应的关系，从而这两个组合计数问题是等价的. c_i 最大可取 n，故 d_i 最大可取 $n+r-1$. 所以允许重复的从 n 个不同元素中取 r 个元素的组合数和不允许重复的从 $n+r-1$ 个不同元素中取 r 个元素的组合数是一样的. 后者显见是 $\binom{n+r-1}{r}$，故公式得证.