

哈尔滨船舶工程学院
科学研究论文选编



学术期刊出版社

U66-53
H 02-2

311006

哈尔滨船舶工程学院

科学研究论文选编

哈尔滨船舶工程学院科研处编



1987·北京

D210/16

哈尔滨船舶工程学院

科学论文选编

哈尔滨船舶工程学院科研处编

*

学术期刊出版社出版、发行

(北京海淀区学院南路86号)

哈尔滨船舶工程学院印刷厂排版印刷

*

787×1092毫米 1/16开本 10.75印张 272千字

1987年12月 第一版 1987年12月第一次印刷 印数1—1000册

ISBN 7-80045-117-8/Z·14

定价: 3.50元

前 言

哈尔滨船舶工程学院一九八六年学术报告会于九月二十二日至二十八日举行。这次学术报告会按专业设置了20多个会场,共发表论文282篇,通过严格的审查和评议,从中选出二十四篇论文收入本《科学研究论文选编》,予以正式出版发行。

《科学研究论文选编》的内容涉及到我院多个学科。这些论文反映了我院在贯彻“经济建设必须依靠科学技术,科学技术工作必须面向经济建设”的科技方针所取得的成就。这些成就是我院广大科技工作者辛勤劳动与智慧的结晶,有一部分直接指导、服务于生产实践。

《科学研究论文选编》的编辑出版,对提高学院的科学技术研究水平,学科的发展,将会起到促进作用。同时,对于开展国内、外的学术交流;加强学校之间,学校与社会之间的横向联系;使科研成果进一步得到推广和应用,尽快转化为生产力;为振兴经济,为国民经济建设做出贡献。

在编辑过程中,每篇论文都经作者本人审校。由于我们水平有限,错误难免,恳切希望广大读者批评指正。

本书在编辑出版过程中,得到学术期刊出版社、哈尔滨船舶工程学院印刷厂和各系(部、处)的大力支持,在此表示感谢。

哈尔滨船舶工程学院科研处

一九八七年九月

科学 研究 论文 选 编

目 录

有限水深二维辐射问题的二阶速度势和水动力·····	贺五洲 戴逸山(1)
水中有限弹性柱上螺旋表面波的声激励及其再辐射回波·····	鲍筱玲(14)
用广义奇点展开法解弹性圆柱的声散射问题·····	汤渭霖(23)
水声基阵用方位及姿态基准测量系统·····	张树侠(35)
利用 dBASE III 在贮三维报表的几种基本形式的讨论·····	李天福 丛望 李金(42)
异步电动机的转差频率控制·····	何敏哉(48)
相位随动系统中鉴相器的软件处理·····	佟少英(53)
国产60万千瓦考核锅炉机组锅炉数学模型的动态特性仿真模拟试验研究·····	潘志明(58)
卡尔曼滤波在水翼艇姿态随机最优控制中的应用·····	赵希人 刘胜(69)
导弹自动驾驶仪设计方法研究·····	马澍田 王式琦(80)
线性二端网络最大流、最短路程、最小费用流及日程问题的综合算法·····	王如森(89)
具有消熔表面的喷管壁温有限元计算·····	王松柏(98)
与最大主应力偏量屈服条件相关连的流动法则及其在厚壁圆筒中的应用·····	何大同(104)
一种通过约束处理的小机算大题的方法·····	何蕴增(111)
含圆孔的偏轴拉伸板的强度准则·····	齐汝璠(114)
一个空、实心及薄壁圆形截面梁最大剪应力的统一公式·····	金裕民(119)
冲击疲劳下等弯矩冲弯试样中最大应力的测试与计算·····	张捷 郭树启 刘长禄(123)
组织对18Gr2Ni4WA 钢疲劳裂纹扩展门槛值的影响·····	刘长禄 李金魁 杨杰(129)
求解二次规划的有效集方法·····	张书年 李健民(135)
直接形成零件机床组的方法探讨·····	刘宏成(144)
场强间断处的电荷元受力计算·····	于庆祥(148)
ZD—I型转盘电极装置——扩大振谱仪功能的配件·····	物理部光谱组(152)
尿素尾气安全性能试验研究·····	李绍英(155)
碱性锌—二氧化铅电池的研究·····	张宝宏(161)

有限水深二维辐射问题的 二阶速度势和水动力

贺五洲 戴通山

(船舶与海洋工程系)

摘 要

本文将简单Green函数法推广到有限水深二维辐射问题的二阶速度势和水动力计算。在求得一阶势以后,可以写出二阶势在外部域中的解析形式,从而准确给出二阶势的辐射面条件。二阶势在内部域其它边界上的边界条件则由一阶势的数值微分求得。象求解一阶势一样,仍用简单函数 $\ln r$ 作为Green函数,对内部域利用Green公式求解二阶势。

本文给出半圆在深水 and 浅水两种不同水域表面振荡时的二阶势和二阶力计算结果。

(一) 引 言

作为非线性影响主要部分的二阶水动力计算早就引起广泛的注意。在经蒙 雄策^[1]之前就有Lee等人^{[2][3][4][5]}作过二维辐射问题的数值计算,但他们的算法都只能用于无限水深情况。有限水深情况下问题的复杂性在于有两种不同波数的二阶行进波由振荡物体向两边传向无穷远。本文在详细讨论二阶势的辐射条件之后,仍用外部域中特征函数的多项展开与内部域中利用Green公式相匹配的简单Green函数法求解二阶辐射势,可以有效地解决有限水深的问题。由一阶势和二阶非定常势进而求得二阶水动力。

简单Green函数法的采用使积分方程系数计算中很大一部分工作量仅与内部域边界的几何形状有关,而与振荡形式及频率无关,而且在求解二阶势时不必重复计算,可以提高计算效率。利用一阶势和二阶势在外部域中特征函数的多项展开来处理辐射条件,可以将辐射而取得靠近振荡剖面,从而控制了积分周界延长带来的工作量。方法对于在求解二阶势时处理有限水深流场内部域中复杂边界形状的适应能力仍能得到体现。

(二) 理论概述及求解方法

1. 边值问题的提出

一任意形状的刚性剖面在给定的初始时刻为静止的二维理想不可压缩定深流场中作简谐强迫振荡,振荡形式为 j , 振幅为 $\in A_1$, 频率为 ω , 则振荡剖面位移为 $x_1 = \text{Re} (\in A_1$

$e^{i\omega t}$, 速度为 $U_j = \text{Re}(\in A_j \cdot i\omega e^{i\omega t})$ 。其中 $\in$ 为小参数 (通常是相对于振荡剖面的尺度而言的), 振幅为 $\in$ 的一阶量。脚标中的 j 取 1、2 分别代表横荡和垂荡, 它们的正方向分别规定为 x 轴和 y 轴的正方向。为书写简便, 有时也将 x, y 轴记为 $x_j (j = 1, 2)$ 轴。坐标系取法如图 1 所示, oy 轴垂直向上, ox 轴水平向右并与未扰动时的静水面重合。本文要求用左右两个辐射面 $R^+: x = x_R$ 和 $R^-: x = -x_R$

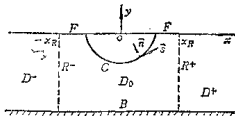


图 1 二维辐射问题的坐标系

($x_R > 0$) 将振荡剖面围在内部域 $D_0: |x| \leq x_R$ 中, 这样流场 D 分成 D_0 和左右两个外部域 $D^-: x \leq -x_R$ 和 $D^+: x \geq x_R$ 。流场深度为 h 。

如果流动是无旋的, 则由振荡剖面引起的流动可由速度势 $\phi_j(x, y, t)$ 表示。 ϕ_j 应满足以下方程和条件:

Laplace 方程:

$$[L] \quad \nabla^2 \phi_j = 0 \quad \text{在 } D \text{ 中} \quad (1)$$

非线性自由表面条件:

$$[F] \quad \frac{\partial^2 \phi_{j-}}{\partial t^2} + g \frac{\partial \phi_{j-}}{\partial y} + 2 \frac{\partial \phi_{j-}}{\partial x} \frac{\partial^2 \phi_{j-}}{\partial x \partial t} + 2 \frac{\partial \phi_{j-}}{\partial y} \frac{\partial^2 \phi_{j-}}{\partial y \partial t} + \left(\frac{\partial \phi_{j-}}{\partial x} \right)^2 \frac{\partial^2 \phi_{j-}}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial \phi_{j-}}{\partial x} \frac{\partial \phi_{j-}}{\partial y} \frac{\partial^2 \phi_{j-}}{\partial x \partial y} + \left(\frac{\partial \phi_{j-}}{\partial y} \right)^2 \frac{\partial^2 \phi_{j-}}{\partial y^2} = 0 \quad (2)$$

在自由表面 $F: y = \eta(x, t)$ 上

物面条件:

$$[H] \quad \frac{\partial \phi_{j-}}{\partial n} = U_{j-} \cdot n, \quad \text{在振荡剖面 } C \text{ 的瞬时位置 } C(t) \text{ 上} \quad (3)$$

固壁条件:

$$[B] \quad \frac{\partial \phi_{j-}}{\partial n} = 0 \quad \text{在底部 } B: y = -h \text{ 上} \quad (4)$$

辐射条件:

[R] 无限远处有有限振幅的波向两边外传。

(3) 式中的 n_j 是流场边界上单位法向 (指向域外) 的第 j 个分量。

求解以上问题的困难在于自由表面条件 [F] 以及物面条件 [H] 的非线性, 通常用摄动法求解。将速度势亦按 $\in$ 的阶展开, 即

$$\phi_j(x, y, t) = \sum_{k=1}^{\infty} \in^k \phi_j^{(k)}(x, y, t) \quad (5)$$

将 (5) 式代入 (2) 式, 并且在 $y = 0$ 展开, 注意到一阶波高为

$$\eta^{(1)}(x, t) = - \frac{\partial \phi_j^{(1)}}{g \partial t} \Big|_{y=0} = 0 \quad (6)$$

得

$$\in \left(\frac{\partial^2 \phi_j^{(1)}}{\partial t^2} + g \frac{\partial \phi_j^{(1)}}{\partial y} \right) + \in^2 \left(\frac{\partial^2 \phi_j^{(2)}}{\partial t^2} + g \frac{\partial \phi_j^{(2)}}{\partial y} + 2 \frac{\partial \phi_j^{(1)}}{\partial x} \frac{\partial^2 \phi_j^{(1)}}{\partial x \partial t} \right)$$

$$+ 2 \frac{\partial \phi_i^{(1)}}{\partial y} \frac{\partial^2 \phi_i^{(1)}}{\partial y \partial t} - \frac{\partial^2 \phi_i^{(1)}}{\partial y^2} \frac{\partial \phi_i^{(1)}}{\partial t} - \frac{1}{g} \frac{\partial^2 \phi_i^{(1)}}{\partial y \partial t^2} \frac{\partial \phi_i^{(1)}}{\partial t} \Big) + 0(\epsilon^3) = 0$$

在 $F_0: y = 0$ 上 (7)

将(5)式代入(3)式,并在振荡剖面 C 的平均位置 C_0 上展开,注意到 C 的位移是一阶小量,得

$$\in \frac{\partial \phi_i^{(1)}}{\partial n} + \epsilon^2 \left[\frac{\partial \phi_i^{(2)}}{\partial n} + \frac{\partial^2 \phi_i^{(1)}}{\partial n \partial x_i} \operatorname{Re}(A_i e^{i\omega t}) \right] + 0(\epsilon^3) = \in \operatorname{Re}(A_i i \omega e^{i\omega t}) n_i \quad \text{在 } C_0 \text{ 上} \quad (8)$$

若将 ϕ_i 记成

$$\phi_i(x, y, t) = \operatorname{Re} \{ \in \phi_i^{(1)}(x, y) e^{i\omega t} + \in^2 \phi_i^{(2)}(x, y) + {}_2 \phi_i^{(2)}(x, y) e^{2i\omega t} \} + 0(\epsilon^3) \quad (9)$$

其中 $\phi_i^{(1)}$ 和 ${}_2 \phi_i^{(2)}$ 分别是一阶和二阶非定常势的空间分量, $\phi_i^{(2)}$ 是二阶定常势,则由(7)式可得

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \phi_i^{(1)}}{\partial y} - \nu \phi_i^{(1)} &= 0 \\ \frac{\partial_0 \phi_i^{(2)}}{\partial y} &= -\frac{\omega}{2g} \operatorname{Im} \left[\phi_i^{(1)} \left(\frac{\partial^2 \phi_i^{(1)}}{\partial y^2} - \nu \frac{\partial \phi_i^{(1)}}{\partial y} \right) \right] \\ \frac{\partial_2 \phi_i^{(2)}}{\partial y} - 4\nu {}_2 \phi_i^{(2)} &= -\frac{i\omega}{2g} Q_i(x) \end{aligned} \right\} \quad \text{在 } y = 0 \text{ 上} \quad (10)$$

式中 $\nu = \omega^2/g$,

$$Q_i(x) = 2 \left[\left(\frac{\partial \phi_i^{(1)}}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \phi_i^{(1)}}{\partial y} \right)^2 \right] - \phi_i^{(1)} \left(\frac{\partial^2 \phi_i^{(1)}}{\partial y^2} - \nu \frac{\partial \phi_i^{(1)}}{\partial y} \right) \quad \text{在 } y = 0 \text{ 上} \quad (11)$$

$\frac{\partial^2 \phi_i^{(1)}}{\partial y^2}$ 和 $\frac{\partial \phi_i^{(1)}}{\partial y}$ 分别表示 $\frac{\partial^2 \phi_i^{(1)}}{\partial y^2}$ 和 $\frac{\partial \phi_i^{(1)}}{\partial y}$ 的共轭。由(8)式可得

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \phi_i^{(1)}}{\partial n} &= i\omega A_i n_i \\ \frac{\partial_0 \phi_i^{(2)}}{\partial n} &= -\frac{1}{2} A_i \operatorname{Re} \left(-\frac{\partial^2 \phi_i^{(1)}}{\partial n \partial x_i} \right) \\ \frac{\partial_2 \phi_i^{(2)}}{\partial n} &= -\frac{1}{2} A_i \frac{\partial^2 \phi_i^{(1)}}{\partial n \partial x_i} \end{aligned} \right\} \quad \text{在 } C_0 \text{ 上} \quad (12)$$

进一步记

$$\left. \begin{aligned} \phi_i^{(1)}(x, y) &\triangleq i\omega A_i \varphi_i^{(1)}(x, y) \\ {}_0 \phi_i^{(2)}(x, y) &\triangleq \frac{\omega A_i^2}{2} {}_0 \varphi_i^{(2)}(x, y) \\ {}_2 \phi_i^{(2)}(x, y) &\triangleq \frac{i\omega A_i^2}{2} {}_2 \varphi_i^{(2)}(x, y) \end{aligned} \right\} \quad (13)$$

那末原定解问题可分成如下几个边值问题:

(1) 一阶问题

$$\left. \begin{aligned}
 [L] \quad \nabla^2 \varphi_i^{(1)} &= 0 && \text{在域 } D \text{ 中} \\
 [F] \quad -\frac{\partial \varphi_i^{(1)}}{\partial n} - \nu \varphi_i^{(1)} &= 0 && \text{在 } y = 0 \text{ 上} \\
 [H] \quad \frac{\partial \varphi_i^{(1)}}{\partial n} &= n_i && \text{在 } C_0 \text{ 上} \\
 [B] \quad \frac{\partial \varphi_i^{(1)}}{\partial n} &= 0 && \text{在 } y = -h \text{ 上} \\
 [R] \quad \frac{\partial \varphi_i^{(1)}}{\partial x} \pm i K_i^{(1)} \varphi_i^{(1)} &= 0 && x \rightarrow \pm \infty
 \end{aligned} \right\} \quad (14)$$

其中 $K_i^{(1)}$ 是方程 $K \cdot \tanh(Kh) = \nu$ 的正根。

(2) 二阶不定常问题

$$\left. \begin{aligned}
 [L] \quad \nabla^2 \varphi_i^{(2)} &= 0 && \text{在域 } D \text{ 中} \\
 [F] \quad \frac{\partial \varphi_i^{(2)}}{\partial n} - 4\nu_2 \varphi_i^{(2)} = \nu q_i(x) &&& \text{在 } y = 0 \text{ 上} \\
 [H] \quad \frac{\partial \varphi_i^{(2)}}{\partial n} = -\frac{\partial^2 \varphi_i^{(1)}}{\partial n \partial x_j} &&& \text{在 } C_0 \text{ 上} \\
 [B] \quad \frac{\partial \varphi_i^{(2)}}{\partial n} &= 0 && \text{在 } y = -h \text{ 上} \\
 [R] \quad \text{辐射条件} &&&
 \end{aligned} \right\} \quad (15)$$

式中

$$q_i(x) = 2 \left[\left(\frac{\partial \varphi_i^{(1)}}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi_i^{(1)}}{\partial y} \right)^2 \right] - \varphi_i^{(1)} \left(\frac{\partial^2 \varphi_i^{(1)}}{\partial y^2} - \nu \frac{\partial \varphi_i^{(1)}}{\partial y} \right) \quad \text{在 } y = 0 \text{ 上} \quad (16)$$

(3) 二阶定常问题

$$\left. \begin{aligned}
 [L] \quad \nabla^2 \varphi_i^{(2)} &= 0 && \text{在域 } D \text{ 中} \\
 [F] \quad \frac{\partial \varphi_i^{(2)}}{\partial n} = -\nu \operatorname{Im} \left[\varphi_i^{(1)} \left(\frac{\partial^2 \varphi_i^{(1)}}{\partial y^2} - \nu \frac{\partial \varphi_i^{(1)}}{\partial y} \right) \right] &&& \text{在 } y = 0 \text{ 上} \\
 [H] \quad \frac{\partial \varphi_i^{(2)}}{\partial n} = \operatorname{Im} \left(\frac{\partial^2 \varphi_i^{(1)}}{\partial n \partial x_j} \right) &&& \text{在 } C_0 \text{ 上} \\
 [B] \quad \frac{\partial \varphi_i^{(2)}}{\partial n} &= 0 && \text{在 } y = -h \text{ 上} \\
 [R] \quad \lim_{y \rightarrow 0} \varphi_i^{(2)} &= 0 &&
 \end{aligned} \right\} \quad (17)$$

虽然二阶定常势对流场的二阶压力及波高没有贡献, 本文仍将给出它的解法。定解问题

(15) 式和(17)式中的辐射条件将在给出二阶势的解法时详细讨论。

2. 一阶势的求解方法^[6]

用简单Green函数法求解一阶势。一阶势在外部域: $|x| \geq x_s$ 中的特征函数为

$$\psi_0^{(1)} = e^{-k_0^{(1)}(1+x) - \pi_R} \frac{\cosh[K_0^{(1)}(y+h)]}{\cosh(K_0^{(1)}h)} \quad (18)$$

$$\psi_k^{(1)} = e^{-K_k^{(1)}(1+x) - \pi_R} \cosh[K_k^{(1)}(y+h)] \quad (k = 1, \dots, \infty) \quad (19)$$

式中 $K_k^{(1)}$ 为方程 $K \cdot \tanh(Kh) = -\nu$ 的第 k 个正根。

外部域中的势可以写成

$$\varphi_i^{(1)} = \sum_{k=0}^{\infty} C_{kR}^{(1)} \psi_k^{(1)} \quad \text{在域 } D^+ \text{ 中} \quad (20)$$

$$\varphi_i^{(1)} = \sum_{k=0}^{\infty} C_{kL}^{(1)} \psi_k^{(1)} \quad \text{在域 } D^- \text{ 中} \quad (21)$$

所以 R^+ , R^- 上速度势的法向导数为

$$\frac{\partial \varphi_i^{(1)}}{\partial n} = \frac{\partial \varphi_i^{(1)}}{\partial x} = -i K_0^{(1)} C_{0R}^{(1)} \psi_0^{(1)} - \sum_{k=1}^{\infty} K_k^{(1)} C_{kR}^{(1)} \psi_k^{(1)} \quad \text{在 } R^+ \text{ 上} \quad (22)$$

$$\frac{\partial \varphi_i^{(1)}}{\partial n} = -\frac{\partial \varphi_i^{(1)}}{\partial x} = -i K_0^{(1)} C_{0L}^{(1)} \psi_0^{(1)} - \sum_{k=1}^{\infty} K_k^{(1)} C_{kL}^{(1)} \psi_k^{(1)} \quad \text{在 } R^- \text{ 上} \quad (23)$$

这里 $C_{kR}^{(1)}$, $C_{kL}^{(1)}$ ($k=0, \dots, \infty$) 是未知复常数。 R^+ 和 R^- 上 $\varphi_i^{(1)}$ 和 $\frac{\partial \varphi_i^{(1)}}{\partial n}$ 通过 $C_{kR}^{(1)}$ 和 $C_{kL}^{(1)}$ 建立起来的联系就是 R^+ 和 R^- 上的边界条件。

实际上 $\psi_k^{(1)}$ ($k \geq 1$) 都是随 $|x|$ 增大而衰减的, 而且 k 越大衰减越快, 所以, 可以视辐射面 R^+ 和 R^- 离振荡剖面的远近取特征函数的有限多项展开。

对内部域 D_0 用 Green 定理, 取 $\ln r$ 为 Green 函数, 则拉氏方程的边值问题转换成积分方程

$$-V, \varphi_i^{(1)}(p) + \int_{C_0 + F_0 + R^+ + R^- + B} \left(\varphi_i^{(1)}(Q) \frac{\partial \ln r_{p, Q}}{\partial n} - \ln r_{p, Q} \frac{\partial \varphi_i^{(1)}(Q)}{\partial n} \right) dS_Q = 0 \quad (24)$$

式中 $r_{p, Q}$ 是域 D_0 边界上的定点 p 和边界上的动点 Q 之间的距离, V 是 p 点处边界的两条半切线之间的夹角在域 D_0 内的部分。

由于在整个 D_0 的周界上已经建立了 $\varphi_i^{(1)}$ 和 $\frac{\partial \varphi_i^{(1)}}{\partial n}$ 之间的关系, 所以方程 (24) 中的未知量在 C_0, F_0, B 上是 $\varphi_i^{(1)}$, 在 R^+, R^- 上是速度势特征函数展开式中的系数 $C_{kR}^{(1)}$ 和 $C_{kL}^{(1)}$ ($k=0, \dots, N$)。

积分方程 (24) 可以离散成代数方程求解。

3. 二阶势的求解方法

仍用简单 Green 函数法求解二阶势, 并且不变更在求解一阶势时所采用的内部域周界。求解的关键还是寻求二阶势在外部域中的解析形式, 这样才能得到二阶势在辐射面上准确的边界条件。

(1) 二阶非定常势的解法

由于已经求得一阶势 $\varphi_i^{(1)}$ 在外部域 D^+ 和 D^- 中的解析表达式 (20) 和式 (21), 所以不难写出自由表面条件 (15) 式 $[F]$ 右端 $\nu q_i(x)$ 的解析表达式。根据这表达式, 首先得出一个适合非齐次自由表面条件 (15) 式 $[F]$ 的特解, 然后再添加适合齐次自由表面条件之特征函数, 便可以写出二阶非定常势 $\varphi_i^{(2)}$ 在外部域中的表达式。以 D^+ 为例, $\varphi_i^{(2)}$ 在 D^+ 中应该满足以下方程和条件:

$$\left. \begin{aligned} [L] \quad \nabla^2 \varphi_i^{(2)} &= 0 & \text{在域 } D^+ \text{ 中} \\ [F] \quad \frac{\partial \varphi_i^{(2)}}{\partial n} - 4\nu \varphi_i^{(2)} &= \nu q_i(x) & \text{在 } y=0 \text{ 上} \end{aligned} \right\}$$

$$\begin{aligned} [B] \quad \frac{\partial_2 \varphi_j^{(2)}}{\partial n} &= 0 \quad \text{在 } y = -h \text{ 上} \\ [R] \quad &\text{辐射条件} \end{aligned} \quad (25)$$

因为一阶势在 D^+ 中的组成已经知道, 即

$$\varphi_j^{(1)} = C_{0R}^{(1)} \psi_0^{(1)} + \sum_{k=1}^N C_{kR}^{(1)} \psi_k^{(1)} \quad \text{在 } D^+ \text{ 中} \quad (26)$$

所以(25)式中 $[F]$ 的非齐次项 $q_j(x)$ 是可以经过一阶解析给出的。易知

$$\frac{\partial \varphi_j^{(1)}}{\partial x} \bigg|_{\substack{x \gg x_R \\ y=0}} = -C_{0R}^{(1)} K_0^{(1)} \psi_0^{(1)} \big|_{y=0} - \sum_{k=1}^N C_{kR}^{(1)} K_k^{(1)} \psi_k^{(1)} \big|_{y=0} \quad (27)$$

$$\frac{\partial \varphi_j^{(1)}}{\partial y} \bigg|_{\substack{x \gg x_R \\ y=0}} = C_{0R}^{(1)} \nu \psi_0^{(1)} \big|_{y=0} + \nu \sum_{k=1}^N C_{kR}^{(1)} \psi_k^{(1)} \big|_{y=0} \quad (28)$$

$$\frac{\partial^2 \varphi_j^{(1)}}{\partial y^2} \bigg|_{\substack{x \gg x_R \\ y=0}} = C_{0R}^{(1)} K_0^{(1)2} \psi_0^{(1)} \big|_{y=0} - \sum_{k=1}^N C_{kR}^{(1)} K_k^{(1)2} \psi_k^{(1)} \big|_{y=0} \quad (29)$$

将上面三式代入(16)式可得

$$\begin{aligned} q_j(x) \big|_{x \gg x_R} &= 3C_{0R}^{(1)2} (\nu^2 - K_0^{(1)2}) (\psi_0^{(1)} \big|_{y=0})^2 \\ &+ C_{0R}^{(1)} \sum_{k=1}^N C_{kR}^{(1)} (4iK_0^{(1)} K_k^{(1)} + 6\nu^2 - K_0^{(1)2} + K_k^{(1)2}) \psi_0^{(1)} \big|_{y=0} \psi_k^{(1)} \big|_{y=0} \\ &+ \sum_{i=1}^N \sum_{n=1}^N C_{iR}^{(1)} C_{nR}^{(1)} (2K_i^{(1)} K_n^{(1)} + 2\nu^2 + K_n^{(1)2}) \psi_i^{(1)} \big|_{y=0} \psi_n^{(1)} \big|_{y=0} \end{aligned} \quad (30)$$

而

$$(\psi_0^{(1)} \big|_{y=0})^2 = e^{-2iK_0^{(1)}(x-x_R)} \quad (31)$$

$$\psi_0^{(1)} \big|_{y=0} \psi_k^{(1)} \big|_{y=0} = e^{-(iK_0^{(1)} + K_k^{(1)})(x-x_R)} \cos(K_k^{(1)}h) \quad (32)$$

$$\psi_i^{(1)} \big|_{y=0} \psi_n^{(1)} \big|_{y=0} = e^{-(K_i^{(1)} + K_n^{(1)})(x-x_R)} \cos(K_i^{(1)}h) \cos(K_n^{(1)}h) \quad (33)$$

记

$$\psi_{00} \triangleq e^{-2iK_0^{(1)}(x-x_R)} \quad (34)$$

$$\psi_{0k} \triangleq e^{-(iK_0^{(1)} + K_k^{(1)})(x-x_R)} \quad (35)$$

$$\psi_{in} \triangleq e^{-(K_i^{(1)} + K_n^{(1)})(x-x_R)} \quad (36)$$

则(25)式中的 $[F]$ 可写成

$$\begin{aligned} \frac{\partial_1 \varphi_j^{(2)}}{\partial y} - 4\nu_2 \varphi_j^{(2)} &= \nu \left(a_{00} \psi_{00} + \sum_{k=1}^N a_{0k} \psi_{0k} + \sum_{i=1}^N \sum_{n=1}^N a_{in} \psi_{in} \right) \\ &\text{在 } x \gg x_R, y=0 \text{ 上} \end{aligned} \quad (37)$$

式中

$$a_{00} = 3C_{0R}^{(1)2} (\nu^2 - K_0^{(1)2}) \quad (38)$$

$$a_{0k} = C_{0R}^{(1)} C_{kR}^{(1)} (4iK_0^{(1)} K_k^{(1)} + 6\nu^2 - K_0^{(1)2} + K_k^{(1)2}) \cos(K_k^{(1)}h) \quad (39)$$

$$a_{in} = C_{iR}^{(1)} C_{nR}^{(1)} (2K_i^{(1)} K_n^{(1)} + 3\nu^2 + K_n^{(1)2}) \cos(K_i^{(1)}h) \cos(K_n^{(1)}h) \quad (40)$$

对应于条件(37)式的问题(25)式的非齐次特解 $\varphi_j^{(2)}$ 不难确定的, 并可由解析给出, 记为

$$\nu \left(a_{00} z \varphi_{00} + \sum_{k=1}^N a_{0k} z \varphi_{0k} + \sum_{l=1}^N \sum_{m=1}^N a_{lm} z \varphi_{lm} \right) \quad (41)$$

式中

$$z \varphi_{00} = \frac{1}{2} e^{-2iK_0^{(1)}(x-x_R)} \frac{\cosh[2K_0^{(1)}(y+h)]}{\cosh(2K_0^{(1)}h) [K_0^{(1)} \tanh(2K_0^{(1)}h) - 2\nu]} \quad (42)$$

$$z \varphi_{0k} = - \frac{e^{-i(K_0^{(1)} + K_k^{(1)})(x-x_R)} \cos[(iK_0^{(1)} + K_k^{(1)})(y+h)]}{(iK_0^{(1)} + K_k^{(1)}) \sinh[(iK_0^{(1)} + K_k^{(1)})h] + 4\nu \cos[(iK_0^{(1)} + K_k^{(1)})h]} \quad (43)$$

$$z \varphi_{lm} = - \frac{e^{-(K_l^{(1)} + K_m^{(1)})(x-x_R)} \cos[(K_l^{(1)} + K_m^{(1)})(y+h)]}{(K_l^{(1)} + K_m^{(1)}) \sinh[(K_l^{(1)} + K_m^{(1)})h] + 4\nu \cos[(K_l^{(1)} + K_m^{(1)})h]} \quad (44)$$

可见 $z \varphi_{00}$ 是以 $2K_0^{(1)}$ 为波数的传向 $x = +\infty$ 的行进波的势。在有限水深流场中因为 a_{00} 不为零，所以这一项是存在的。其它各项都是衰减波的势。这些势都是已知的。

对应于条件(37)式的问题(25)式的齐次解是和一阶问题完全类似的，不同的只是频率加了一倍。二阶非定常势在 D^+ 中的齐次解可表为：

$$\sum_{k=0}^N C_{kR}^{(2)} \psi_k^{(2)} \quad (45)$$

式中

$$\psi_0^{(2)} = e^{-iK_0^{(2)}(x-x_R)} \frac{\cosh[K_0^{(2)}(y+h)]}{\cosh(K_0^{(2)}h)} \quad (46)$$

$$\psi_k^{(2)} = e^{-K_k^{(2)}(x-x_R)} \cos[K_k^{(2)}(y+h)] \quad (k \geq 1) \quad (47)$$

这里 $K_0^{(2)}$ 是方程 $K \cdot \tanh(Kh) = 4\nu$ 的正根， $K_k^{(2)}$ 是方程 $K \cdot \tanh(Kh) = -4\nu$ 的第 k 个正根。 $\psi_k^{(2)}$ 是以 $K_k^{(2)}$ 为波数的传向 $x = +\infty$ 的行进波的势， $\psi_k^{(2)}$ ($k \geq 1$) 都是衰减波的势。

这样 $\varphi_j^{(2)}$ 在 D^+ 中的解为

$$z \varphi_j^{(2)} = \nu \left(a_{00} z \varphi_{00} + \sum_{k=1}^N a_{0k} z \varphi_{0k} + \sum_{l=1}^N \sum_{m=1}^N a_{lm} z \varphi_{lm} \right) + \sum_{k=0}^N C_{kR}^{(2)} \psi_k^{(2)} \quad \text{在域 } D^+ \text{ 中} \quad (48)$$

其中含有两个以不同波数传向 $x = +\infty$ 的行进波的势，这就是问题(25)式中辐射条件的含义。

$z \varphi_j^{(2)}$ 在 R^+ 上的法向导数为

$$\begin{aligned} \frac{\partial z \varphi_j^{(2)}}{\partial n} &= \frac{\partial z \varphi_j^{(2)}}{\partial x} = \nu \left(-2iK_0^{(1)} a_{00} z \varphi_{00} - \sum_{k=1}^N (iK_0^{(1)} + K_k^{(1)}) a_{0k} z \varphi_{0k} \right. \\ &\quad \left. - \sum_{l=1}^N \sum_{m=1}^N (K_l^{(1)} + K_m^{(1)}) a_{lm} z \varphi_{lm} \right) - C_{0R}^{(2)} iK_0^{(2)} \psi_0^{(2)} \\ &\quad - \sum_{k=1}^N C_{kR}^{(2)} K_k^{(2)} \psi_k^{(2)} \quad \text{在 } R^+ \text{ 上} \end{aligned} \quad (49)$$

(48)、(49)式中的 $C_{kR}^{(2)}$ ($k = 0, \dots, N$) 是待定复常数，它们将在内部域求解时确定。

在 D^- 中的情况与 D^+ 是类似的。这样就得到了辐射面上二阶非定常势及其法向导数通过 $C_{kR}^{(2)}$ 及 $C_{kL}^{(2)}$ ($k = 0, \dots, N$) 建立起来的联系，这就是 $z \varphi_j^{(2)}$ 在辐射面上的边界条件。有了这个条件就可对内部域求解 $z \varphi_j^{(2)}$ 。

至于物面条件及自由表面（作为 D_0 边界的部分）条件中的 $\varphi_j^{(1)}$ 的诸偏导数可在解出

一阶势之后, 用数值微分的方法求得。差分格点 ρ' 上的 $\varphi_i^{(1)}$ 的值可由下面的公式来求:

$$\oint_{D_0 \text{ 的边界}} \left(\varphi_i^{(1)}(Q) \frac{\partial \ln r_{\rho', Q}}{\partial n} - \ln r_{\rho', Q} \frac{\partial \varphi_i^{(1)}(Q)}{\partial n} \right) dS_Q \\ = \begin{cases} 2\pi \varphi_i^{(1)}(\rho') & \rho' \text{ 在域 } D_0 \text{ 内} \\ V'_{\rho', \varphi_i^{(1)}}(\rho') & \rho' \text{ 在 } D_0 \text{ 的边界上} \end{cases} \quad (50)$$

二阶非定常势可以看成是两部分组成的。一部分是自由表面条件的非线性引起的, 记成 ${}_2\varphi_i^{(2)}(F)$, 它是问题(15)式对应的非齐次自由表面条件和齐次物面条件的解。另一部分是物面条件的非线性引起的, 记成 ${}_2\varphi_i^{(2)}(B)$, 它是问题(15)式对应的齐次自由表面条件和非齐次物面条件的解。

(2) 二阶定常势的解法

与二阶非定常势的解法类似, 仍以 D^* 为例, 自由表面条件(17)式[F]可改写为

$$\frac{\partial {}_2\varphi_i^{(2)}}{\partial n} = -\nu \operatorname{Im} \left[\varphi_i^{(1)} \overline{\frac{\partial^2 \varphi_i^{(1)}}{\partial y^2}} \right] \quad \text{在 } y=0 \text{ 上} \quad (51)$$

这是因为在 $y=0$ 上,

$$\frac{\partial \varphi_i^{(1)}}{\partial y} = \nu \overline{\varphi_i^{(1)}}, \operatorname{Im} \left[\varphi_i^{(1)} \overline{\frac{\partial \varphi_i^{(1)}}{\partial y}} \right] = 0$$

易知

$$\varphi_i^{(1)} \left\{ \begin{array}{l} x \geq x_R = C_{0R}^{(1)} \psi_0^{(1)}|_{y=0} + \sum_{k=1}^N C_{kR}^{(1)} \psi_k^{(1)}|_{y=0} \end{array} \right. \quad (52)$$

$$\frac{\partial^2 \varphi_i^{(1)}}{\partial y^2} \left\{ \begin{array}{l} x \geq x_R = \overline{C_{0R}^{(1)}} K_0^{(1)2} \overline{\psi_0^{(1)}}|_{y=0} - \sum_{k=1}^N \overline{C_{kR}^{(1)}} K_k^{(1)2} \overline{\psi_k^{(1)}}|_{y=0} \end{array} \right. \quad (53)$$

将(52)、(53)式代入(51)式注意到 $\operatorname{Im}(C_{0R}^{(1)} \overline{C_{0R}^{(1)}} \psi_0^{(1)} \overline{\psi_0^{(1)}}) = 0$, 可得

$$\frac{\partial {}_2\varphi_i^{(2)}}{\partial n} \left\{ \begin{array}{l} x \geq x_R = \nu \operatorname{Im} \left[C_{0R}^{(1)} \sum_{k=1}^N \overline{C_{kR}^{(1)}} K_k^{(1)2} \psi_0^{(1)}|_{y=0} \psi_k^{(1)}|_{y=0} \right. \\ \left. - \overline{C_{0R}^{(1)}} K_0^{(1)2} \sum_{k=1}^N C_{kR}^{(1)} \psi_k^{(1)}|_{y=0} \overline{\psi_0^{(1)}}|_{y=0} \right. \\ \left. + \sum_{l=1}^N \sum_{m=1}^N C_{lR}^{(1)} \overline{C_{mR}^{(1)}} K_m^{(1)2} \psi_l|_{y=0} \overline{\psi_m^{(1)}}|_{y=0} \right] \end{array} \right. \quad (54)$$

若记

$$\psi_{k0} \triangleq \overline{\psi_{0k}} = e^{(iK_0^{(1)} - K_k^{(1)})(x - x_R)} \quad (55)$$

则(54)式可写成

$$\frac{\partial {}_2\varphi_i^{(2)}}{\partial n} = \nu \operatorname{Im} \left[\sum_{k=1}^N a_{0k} \psi_{0k} + \sum_{k=1}^N a_{k0} \psi_{k0} + \sum_{l=1}^N \sum_{m=1}^N a_{lm} \psi_{lm} \right] \\ \text{在 } x \geq x_R, y=0 \text{ 上} \quad (56)$$

式中

$${}_0a_{0k} = C_{0R}^{(1)} \overline{C_{kR}^{(1)}} K_k^{(1)2} \cos(K_k^{(1)} h) \quad (57)$$

$${}_0a_{k0} = -\overline{C_{0R}^{(1)}} C_{kR}^{(1)} K_0^{(1)2} \cos(K_k^{(1)} h) \quad (58)$$

$${}_0 a_{im} = C_{iR}^{(1)} \overline{C_{mR}^{(1)}} K_n^{(1)} z \cos(K_i^{(1)} h) \cos(K_m^{(1)} h) \quad (59)$$

${}_0 \varphi_j^{(2)}$ 在 D^+ 中的非齐次特解为

$$\nu \operatorname{Im} \left(\sum_{k=1}^N {}_0 a_{0k} {}_0 \varphi_{0k} + \sum_{k=1}^N {}_0 a_{k0} {}_0 \varphi_{k0} + \sum_{j=1}^N \sum_{m=1}^N {}_0 a_{jm} {}_0 \varphi_{jm} \right) \quad (60)$$

式中

$${}_0 \varphi_{0k} = - \frac{e^{-(iK_0^{(1)} + K_k^{(1)})(x-x_R)} \cos[(iK_0^{(1)} + K_k^{(1)})(y+h)]}{(iK_0^{(1)} + K_k^{(1)}) \sin[(iK_0^{(1)} + K_k^{(1)})h]} \quad (61)$$

$${}_0 \varphi_{k0} = - \frac{e^{(iK_0^{(1)} - K_k^{(1)})(x-x_R)} \cos[(iK_0^{(1)} - K_k^{(1)})(y+h)]}{(iK_0^{(1)} - K_k^{(1)}) \sin[(iK_0^{(1)} - K_k^{(1)})h]} \quad (62)$$

$${}_0 \varphi_{jm} = - \frac{e^{-(K_j^{(1)} + K_m^{(1)})(x-x_R)} \cos[(K_j^{(1)} + K_m^{(1)})(y+h)]}{(K_j^{(1)} + K_m^{(1)}) \sin[(K_j^{(1)} + K_m^{(1)})h]} \quad (63)$$

${}_0 \varphi_j^{(2)}$ 在 D^+ 中的齐次解为

$$\sum_{k=1}^N {}_0 C_k^{(2)} e^{-\frac{k\pi}{h}(x-x_R)} \cos\left(\frac{k\pi}{h}y\right) \quad (64)$$

其中 ${}_0 C_k^{(2)}$ 是待定实常数。(60)式和(64)式中所有各项都是衰减减的势,所以二阶定常势的辐射条件为 $\lim_{y \rightarrow +\infty} {}_0 \varphi_j^{(2)} = 0$ 。

类似地可得 ${}_0 \varphi_j^{(2)}$ 在 D^- 的解。由此可决定 ${}_0 \varphi_j^{(2)}$ 的辐射面条件。以下的解法与 ${}_2 \varphi_j^{(2)}$ 是类似的。

4. 水动力计算

将流场中的动压力 $P_i(x, y, t)$ 及振荡剖面所受 k 方向水动力 $F_{ik}(t)$ 都按 ϵ 的阶展开成

$$P_i(x, y, t) = \operatorname{Re} \{ \epsilon P_i^{(1)}(x, y) e^{i\omega t} + \epsilon^2 ({}_0 P_i^{(2)} + {}_2 P_i^{(2)} e^{2i\omega t}) + O(\epsilon^3) \} \quad (65)$$

$$F_{ik}(t) = \operatorname{Re} \{ \epsilon F_{ik}^{(1)} e^{i\omega t} + \epsilon^2 ({}_0 F_{ik}^{(2)} + {}_2 F_{ik}^{(2)} e^{2i\omega t}) + O(\epsilon^3) \} \quad (66)$$

由 Bernoulli 公式, 在振荡剖面瞬时位置 $C(t)$ 上有

$$P_i(x, y, t) = -\rho \frac{\partial \phi_i}{\partial t} - \frac{\rho}{2} \left[\left(\frac{\partial \phi_i}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \phi_i}{\partial y} \right)^2 \right] \quad (67)$$

将(67)式在 C_0 上展开, 有

$${}_0 P_i^{(1)} = \rho g A_i \nu \varphi_i^{(1)} \quad (68)$$

$${}_0 P_i^{(2)} = \frac{\rho}{2} g A_i^2 \nu \left[\operatorname{Re} \left(\frac{\partial \varphi_i^{(1)}}{\partial x_j} \right) - \frac{1}{2} \left(\left| \frac{\partial \varphi_i^{(1)}}{\partial x} \right|^2 + \left| \frac{\partial \varphi_i^{(1)}}{\partial y} \right|^2 \right) \right] \quad (69)$$

$${}_2 P_i^{(2)} = \rho g A_j^2 \nu \left[{}_2 \varphi_i^{(2)} + \frac{1}{2} \frac{\partial \varphi_i^{(1)}}{\partial x_j} + \frac{1}{4} \left(\frac{\partial \varphi_i^{(1)}}{\partial x} \right)^2 + \frac{1}{4} \left(\frac{\partial \varphi_i^{(1)}}{\partial y} \right)^2 \right] \quad (70)$$

而

$$F_{ik} = \int_{C(t)} p_i \cdot n_k dS \quad (71)$$

记

$$f_{jk}^{(1)} = \frac{F_{jk}^{(1)}}{\rho g A_j} \quad (72)$$

$${}_0 f_{jk}^{(2)} = \frac{{}_0 F_{jk}^{(2)}}{\frac{1}{2} \rho g A_j^2} \quad (73)$$

$${}_2 f_{jk}^{(2)} = \frac{{}_2 F_{jk}^{(2)}}{\rho g A_j^2} \quad (74)$$

则

$$f_{jk}^{(1)} = \nu \int_{C_0} \varphi_j^{(1)} n_k dS \quad (75)$$

$$\begin{aligned} {}_0 f_{jk}^{(2)} &= {}_0 f_{jk}^{(2)}(D) + {}_0 f_{jk}^{(2)}(V) \\ &= \nu \int_{C_0} \operatorname{Re} \left(\frac{\partial \varphi_j^{(1)}}{\partial x_j} \right) n_k dS - \frac{\nu}{2} \int_{C_0} \left(\left| \frac{\partial \varphi_j^{(1)}}{\partial x} \right|^2 + \left| \frac{\partial \varphi_j^{(1)}}{\partial y} \right|^2 \right) n_k dS \end{aligned} \quad (76)$$

$$\begin{aligned} {}_2 f_{jk}^{(2)} &= {}_2 f_{jk}^{(2)}(B) + {}_2 f_{jk}^{(2)}(F) + {}_2 f_{jk}^{(2)}(D) + {}_2 f_{jk}^{(2)}(V) \\ &= \nu \int_{C_0} {}_2 \varphi_j^{(1)}(B) n_k dS + \nu \int_{C_0} {}_2 \varphi_j^{(2)}(F) n_k dS + \frac{\nu}{2} \int_{C_0} \frac{\partial \varphi_j^{(1)}}{\partial x_j} n_k dS \\ &\quad + \frac{\nu}{4} \int_{C_0} \left[\left(\frac{\partial \varphi_j^{(1)}}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi_j^{(1)}}{\partial y} \right)^2 \right] n_k dS \end{aligned} \quad (77)$$

(77)式表示二阶非定常水动力系数分成四个部分。第一、第二部分分别是二阶非定常势 ${}_2 \varphi_j^{(2)}(B)$ 和 ${}_2 \varphi_j^{(2)}(F)$ 对二阶非定常水动力系数的贡献。第三、第四部分是一阶势 $\varphi_j^{(1)}$ 对二阶非定常水动力系数的贡献。 ${}_2 f_{jk}^{(2)}(D)$ 是由于振荡剖面位移引起的, ${}_2 f_{jk}^{(2)}(V)$ 是振荡剖面上流体的速度项引起的。(76)式中两项的意义和(77)式中的第三、四项是类似的。

5. 关于对称性的说明

如果流场对 y 轴几何对称, 在计算中可以利用对称网格, 减少计算工作量。因为此时 $\varphi_i^{(1)}$ 是关于 x 反对称的; $\varphi_i^{(1)}$, ${}_0 \varphi_j^{(2)}$, ${}_2 \varphi_j^{(2)}$ ($j = 1, 2$) 都是关于 x 对称的。在这样的情况下有

$$\begin{aligned} f_{1k}^{(1)} &= f_{2k}^{(1)} = 0 \\ {}_0 f_{1k}^{(2)} &= {}_0 f_{2k}^{(2)} = 0 \\ {}_2 f_{1k}^{(2)} &= {}_2 f_{2k}^{(2)} = 0 \end{aligned}$$

其它水动力系数都只需在半个剖面上积分后加倍即可。

(三) 计算结果

根据本方法编制的程序, 对两种不同水深情况下在水面作横向和垂向振荡的半圆(圆半径为 r) 求解二阶势和水动力。第一种水深是 $10r$, 第二种水深是 $2r$ 。

深水情况下, 当无因次频率 $\bar{\omega} = \omega \sqrt{\frac{r}{g}}$ 为 1.0 时自由表面条件的非齐次项 $q_1(x)$ 画在图 2 上, 横向和垂向运动时, 圆周上的二阶非定常势分布分别画在图 3 和图 4 上。图 5 和

图 6 给出深水情况下的二阶非定常水动力曲线。

以上结果与经塚雄策^[1]的结果基本吻合, 但横荡时 ${}_2f_{11}^{(2)}(B)$ 的实数部分差别较大。

分析这种差别是由于计算物面条件非齐次项 $-\frac{\partial^2 \varphi_{11}^{(1)}}{\partial n \partial x}$ 的不同引起的。

计算结果表明浅水情况下的二阶水动力曲线在横荡时与深水情况差别不大, 而垂荡时则有明显增大。图 7 给出浅水情况下垂荡的二阶水动力曲线。

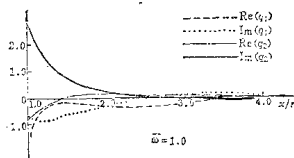


图 2 自由表面条件的非齐次项 $q(x)$

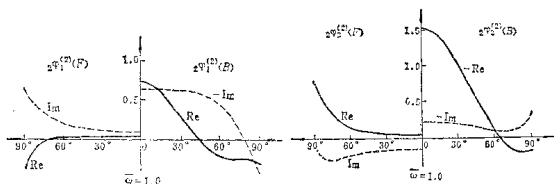


图 3 圆周上的二阶非定常势分布 (横荡)

图 4 圆周上的二阶非定常势分布 (垂荡)

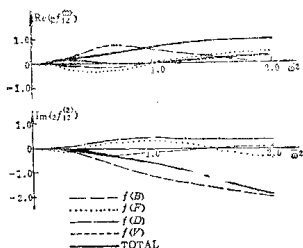


图 5 深水情况下半圆横荡引起的垂直二阶非定常水动力曲线

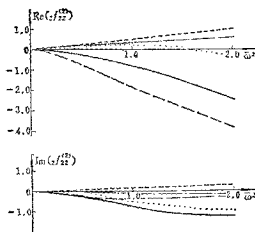


图6 深水时半圆垂直二阶非常数水动力曲线

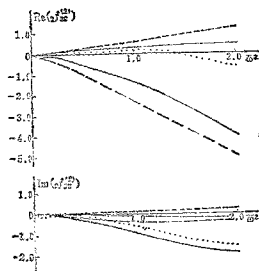


图7 浅水时半圆垂直二阶非常数水动力曲线

(四) 结 论

1. 本方法可以有效地处理有限水深情况下的二阶势计算。由于此时有一个波数为二阶波数两倍的二阶行进波从振荡剖面两边传向无穷远，所以 $q_1(x)$ 当 $x \rightarrow \pm\infty$ 时不趋于零。在外部域得到一阶势特征函数展开式之后用解析式表达 $q_1(x)$ 引起的二阶势，将它对内部域二阶势的贡献转换到辐射面上来，可得到比较精确的解。

2. 二阶势以倍频振荡，数值计算难度比求解一阶势大，除了要准确给出二阶势在辐射面上的边界条件以外，还要准确给出振荡物体表面及内部域自由表面上的边界条件，它们由一阶势数值微分给出，为此一阶势的计算必须特别精细。

3. 二阶非常数力的四个组成部分中，总体来看以物面条件非线性引起的这一部分是主要的。