

最
优
控
制

最优控制

华中工学院

秦寿康 张正方 编

国防工业出版社



国
防

26

P

最优控制

华中工学院

国防工业出版社 出版

北京市书刊出版业 营业许可证出字第 074 号

解放军七二二六工厂印刷 内部发行

*

787×1092¹/₁₆ 印张15⁶/₈ 370千字

1980年8月第一版 1980年8月第一次印刷 印数1—10,000册

统一书号 Ⅳ15034 (四教 23) 定价: 1.65 元



内 容 简 介

本书是最优控制理论及其应用的一本入门书。作者力图从工程观点，阐述求解动态最优化问题的两种基本方法——“最小值原理”和“动态规划”的理论和应用，其中第一至五章介绍最小值原理及其应用，第六章介绍动态规划的理论和应用，第七、八章介绍离散随机系统的最优控制。该书取材广泛，在阐明基本原理的同时，列举了相当数量的例题，内容比较通俗易懂，各章具有相对的独立性，可依据不同情况予以选用。

读者对象：本书可作为高等学校工科自动控制专业高年级学生的教材，也可供自动控制领域的工程技术人员阅读。

前 言

本书系高等学校工科电子类自动控制专业统编教材之一。

本教材是最优控制理论及其应用的一本入门书，主要阐述求解动态最优化问题的两种基本方法——“最小值原理”和“动态规划”的理论和应用，其中第一至五章介绍最小值原理及其应用，第六章介绍动态规划的理论和应用，第七、八章介绍离散随机系统的最优控制。在取材问题上，需作如下说明：第一，有关参数最优化问题的一些主要方法，如线性规划、非线性规划等，因篇幅有限，且国内已有这方面的教材，均未涉及。第二，最小值原理中求解两点边值问题的种种数值方法，业已商定在《计算机控制系统》一书中讲授，故未列入。第三，随机最优控制问题另有专门教材。本书第七、八章专供暂不开设《随机最优控制》课程者选用。

本书各章具有相对的独立性，可依据情况予以选用。现提出选用本教材的三种参考方案：第一方案是采用全部内容，约需 54 学时；第二方案是选用除第七、八章外的所有内容，约需 42 学时；第三方案是选用绪论、第一章、第二章 § 2-1 和 § 2-4、第三章、第六章，约需 30 学时。阅读本书时，应具备矩阵论和经典控制理论的知识。书末附有集合论、概率论的基础知识，以及向量和矩阵的微积分，可资参考。

谨承上海交通大学张钟俊教授和杨培庆同志审阅全稿，提出许多宝贵意见；还蒙华中工学院陈珽教授提供不少有益的建议，在此一并深致谢忱！

本书中绪论，第一至五章，以及附录 A、B，由秦寿康同志编写；第六至八章及附录 C 由张正方同志编写。由于编者才疏学浅，谬误之处想必甚多，恳请读者不吝赐教，来函请寄武昌华中工学院。

编 者

一九七九年六月

目 录

绪 论	(1)
§ 0-1 最优控制问题的提法	(1)
§ 0-2 最优控制发展简史	(5)
§ 0-3 本书主要内容简介	(6)
第一章 最优控制中的变分法	(7)
§ 1-1 固定端点的变分问题	(7)
§ 1-2 变动端点的变分问题	(12)
§ 1-3 等式约束条件下的变分问题	(17)
§ 1-4 角点条件	(33)
§ 1-5 局部极值的充分条件	(37)
§ 1-6 结束语	(41)
第二章 最小值原理	(43)
§ 2-1 连续系统的最小值原理	(43)
§ 2-2 离散系统的最小值原理	(51)
§ 2-3 连续和离散最小值原理的比较	(58)
§ 2-4 结束语	(61)
第三章 最短时间控制系统	(64)
§ 3-1 非线性系统的最短时间控制问题	(64)
§ 3-2 线性时不变系统的最短时间控制问题	(68)
§ 3-3 双积分装置的最短时间控制系统	(73)
§ 3-4 简谐振荡器的最短时间控制系统	(78)
§ 3-5 非平凡最优控制问题	(84)
§ 3-6 结束语	(90)
第四章 最少燃料控制系统	(91)
§ 4-1 非线性系统的最少燃料控制问题	(91)
§ 4-2 线性时不变系统的最少燃料控制问题	(96)
§ 4-3 双积分装置的最少燃料控制系统	(102)
§ 4-4 双积分装置的时间和燃料综合最优控制系统	(107)
§ 4-5 非平凡最少燃料控制问题	(114)
§ 4-6 结束语	(116)
第五章 二次型性能指标的最优线性系统	(118)
§ 5-1 状态调节器问题	(119)
§ 5-2 线性时不变系统当 $T_f = \infty$ 时的状态调节器问题	(127)

§ 5-3 输出调节器问题	(131)
§ 5-4 跟踪问题	(135)
§ 5-5 结束语	(141)
第六章 动态规划	(142)
§ 6-1 动态系统与变换、多步决策过程	(142)
§ 6-2 最优性原理、离散系统的动态规划	(144)
§ 6-3 一个求最优线路问题	(145)
§ 6-4 基本的最优化问题 ——欧拉-拉格朗日方程的推导哈密顿-雅可比方程的推导	(148)
§ 6-5 最小积分控制过程	(156)
§ 6-6 动态规划方法在终端控制问题中的应用	(163)
§ 6-7 动态规划方法在最短时间控制问题中的应用	(165)
§ 6-8 动态规划的数值计算方法	(174)
§ 6-9 结束语	(177)
第七章 离散型线性随机系统的最优控制	(179)
§ 7-1 离散型线性随机系统的数学模型	(180)
§ 7-2 估计问题的基本概念	(182)
§ 7-3 卡尔曼滤波器简介	(183)
§ 7-4 非随机的无噪音自动调整问题	(191)
§ 7-5 离散型线性-二次-高斯问题	(193)
§ 7-6 线性离散型随机控制问题的分离定理	(194)
§ 7-7 结束语	(198)
第八章 随机系统的最优贝叶斯控制引论	(200)
§ 8-1 问题的提出	(200)
§ 8-2 最优控制策略的推导	(201)
§ 8-3 一些条件概率密度的推导	(207)
§ 8-4 关于充分统计的概念	(209)
§ 8-5 举例	(209)
§ 8-6 结束语	(216)
附录	(217)
附录A 集合的概念及其基本运算	(217)
§ A-1 集合	(217)
§ A-2 集合的运算	(217)
§ A-3 欧氏空间 开集和闭集	(219)
附录B 向量和矩阵的微分与积分	(220)
§ B-1 向量和矩阵的微分	(220)
§ B-2 向量和矩阵的积分	(228)

附录C 概率论的基础知识	(229)
§ C-1 事件的概率及其性质	(229)
§ C-2 随机变量及其分布	(231)
§ C-3 多维随机变量的分布函数	(233)
§ C-4 随机变量函数的分布律	(235)
§ C-5 随机变量函数分布律的另一求法	(237)
§ C-6 数学期望 方差	(238)
§ C-7 随机序列	(242)

绪 论

§ 0-1 最优控制问题的提法

所谓最优控制问题的提法,是指怎样把一个最优控制问题,用数学的语言来表达,也就是抽象成为数学问题的意思。在具体叙述问题的提法之前,我们先来看几个实际例子。

例 0-1 最速升降问题 设有一物体 M , 作垂直升降运动, 如图 0-1 所示, 这里 M 可以理解为一架直升飞机或矿井中的升降机。假定在 M 内部装有一个控制器, 它可以产生一个作用力 $u(t)$, 用以控制物体 M 的上下运动; 由于作用力的大小有限, 所以应满足不等式 $|u(t)| \leq k$, 其中 k 是常数。设已知 M 在 $t = t_0$ 时, 离地面的高度为 $x(t_0)$, 垂直运动的速度为 $\dot{x}(t_0)$, 问题是寻找作用力 $u(t)$ 的变化规律, 使得 M 最快地到达地面, 并且到达地面时的速度为零。

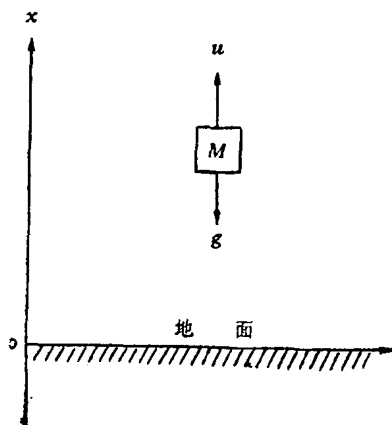


图 0-1

现在对最速升降问题稍加分析。为简便计, 令物体 M 的质量为 1。用 $x(t)$ 表示 M 离地面的高度, 其方向是在地面上 $x(t)$ 为正, 在地面下 $x(t)$ 为负; 作用力 $u(t)$ 是向上为正, 向下为负, 则物体 M 的运动方程是

$$\frac{d^2x(t)}{dt^2} = u(t) - g \quad (0-1)$$

式中 $-g$ 项表示物体所受的重力。

令 $x_1(t) = x(t)$ 表示物体的高度, $x_2(t) = \frac{dx}{dt}$ 表示物体的升降速度, 则方程 (0-1) 可写成

$$\begin{aligned} \frac{dx_1(t)}{dt} &= x_2(t) \\ \frac{dx_2(t)}{dt} &= u(t) - g \end{aligned} \quad (0-2)$$

其初始条件是 $x_1(t_0) = x_{10}$ 和 $x_2(t_0) = x_{20}$ 。这就是我们熟知的描述动态系统运动情况的状态方程。现需寻找一个能使物体以最短时间

$$\int_{t_0}^{t_f} dt = t_f - t_0 \quad (0-3)$$

从初态 (x_{10}, x_{20}) 到达终态 $(0, 0)$ 的控制 $u(t)$, 这样控制就叫做最优控制, 并用 $\hat{u}(t)$ 表示。

例 0-2 最快拦截问题 设我方发射一枚导弹 (简称拦截器 L), 其任务是在空中拦截另一枚来自敌方的导弹 (简称目标 M), 问应当怎样控制拦截器 L 的运动, 才能最快地击毁

目标 M ?

为简单起见, 假定两枚导弹的运动是在同一平面内, 如图 0-2 所示。设目标 M 的运动方程是

$$\begin{aligned} \dot{x}_M(t) &= v_{xM}(t) & \dot{y}_M(t) &= v_{yM}(t) \\ \dot{v}_{xM}(t) &= 0 & \dot{v}_{yM}(t) &= -g \end{aligned} \quad (0-4)$$

式中 (x_M, y_M) 表示平面中导弹 M 的位置, (v_{xM}, v_{yM}) 表示其速度, g 表示重力加速度。设拦截器的质量为 $m(t)$, 它的推力由燃料的燃烧所产生。如用 c 表示推进剂的排出速度, 假定是一常数; $\beta(t)$ 表示推进剂的流率, 则推力 $f(t)$ 可写成

$$f(t) = c\beta(t) \quad (0-5)$$

令 $\varphi(t)$ 表示推力与水平线的夹角, (x_L, y_L) 表示拦截器 L 在平面中的坐标, (v_{xL}, v_{yL}) 表示其速度, 则拦截器的运动方程是

$$\begin{aligned} \dot{x}_L(t) &= v_{xL}(t) \\ \dot{y}_L(t) &= v_{yL}(t) \end{aligned}$$

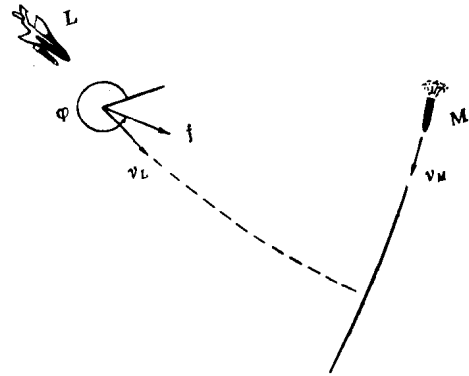


图 0-2.

$$\begin{aligned} \dot{v}_{xL}(t) &= \frac{f(t)}{m(t)} \cos \varphi(t) \\ \dot{v}_{yL}(t) &= \frac{f(t)}{m(t)} \sin \varphi(t) - g \\ \dot{m}(t) &= -\frac{1}{c} f(t) \end{aligned} \quad (0-6)$$

为了进一步简化描述运动状况的数学表示式, 可令 $x(t) = x_L(t) - x_M(t)$, $y(t) = y_L(t) - y_M(t)$ 表示拦截器对目标的相对位置, $v_x(t) = v_{xL}(t) - v_{xM}(t)$, $v_y(t) = v_{yL}(t) - v_{yM}(t)$ 表示它们的相对速度, 于是方程(0-4)和(0-6)可合写成下面的相对运动方程:

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= v_x(t) \\ \dot{y}(t) &= v_y(t) \\ \dot{v}_x(t) &= \frac{f(t)}{m(t)} \cos \varphi(t) \\ \dot{v}_y(t) &= \frac{f(t)}{m(t)} \sin \varphi(t) \\ \dot{m}(t) &= -\frac{f(t)}{c} \end{aligned} \quad (0-7)$$

此外, 由于推力 $f(t)$ 不可能超出一定限度, 所以应满足约束条件

$$|f(t)| \leq F \quad (0-8)$$

能供支配的推进剂的质量也有定限, 我们用 m_0 表示拦截器满载燃料时的质量, m_e 表示拦截器燃料耗完时的质量。

根据以上分析, 可将最快拦截问题叙述如下: 已知动态系统的运动方程(0-7)及其在初始时间 $t_0 = 0$ 时的相对位置 $x(0), y(0)$ 和相对速度 $v_x(0), v_y(0)$; 且 $m(0) = m_0$ 。问应当怎样控制拦截器 L 的推力 $f(t)$ 的大小[满足约束条件(0-8)]和推力方向角 $\varphi(t)$, 才能以最短时间 \hat{t}_f

$$\hat{t}_f = \int_0^{\hat{t}_f} dt \quad (0-9)$$

击毁目标? 即到达终态

$$x(\hat{t}_f) = y(\hat{t}_f) = 0 \quad (0-10)$$

并满足条件

$$m(\hat{t}_f) \geq m_e \quad (0-11)$$

例 0-3 设有一盛放液体的连续搅拌槽, 如图 0-3 所示。槽内装有不停地转动着的搅拌器 J , 使液体经常处于完全混合状态。槽中原放 0°C 的液体, 现需将其温度经 1 小时后升高到 40°C 。为此在入口处送进一定量的液体, 其温度为 $u(t)$; 出口处流出等量的液体, 以便保持槽内液面恒定。试寻找 $u(t)$ 的变化规律, 使槽中液体温度经一小时后上升到 40°C , 并要求散失的热量最小。

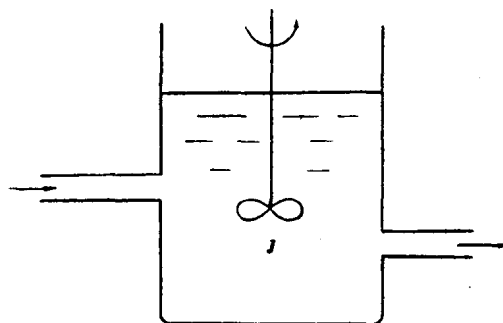


图 0-3

因假定槽中液体处于完全混合状态, 故可用 $x(t)$ 表示其温度。由热力学可知, 槽中液体温度的变化率与温差 $[u(t) - x(t)]$ 成正比, 为简便计, 令比例系数为 1, 于是有

$$\frac{dx(t)}{dt} = u(t) - x(t) \quad x(0) = 0 \quad (0-12)$$

在一小时内散失掉的热量可用下式表示:

$$J(u) = \int_0^1 [qx^2(t) + ru^2(t)] dt \quad (0-13)$$

其中 q 和 r 都是正的常数。因此在目前情况下, 最优控制问题是: 寻找 $u(t)$ 的变化规律, 使槽中液体经 1 小时后从 0°C 上升到 40°C , 并要求散失的热量最小, 即方程(0-13)中 $J(u)$ 取最小值。

综观以上三例, 可知凡属最优控制问题的数学描述, 应包含以下几方面的内容:

1) 受控动态系统的数学模型, 即动态系统的微分方程: 它反映了动态系统在运动过程中所应遵循的物理或化学规律。在集中参数的情况下, 动态系统的运动规律可以用一组一阶常微分方程来描述, 写成向量形式是

$$\dot{x}(t) = f[x(t), u(t), t] \quad (0-14)$$

其中 $x(t)$ 表示 n 维状态向量, $u(t)$ 表示 m 维控制向量。易见方程(0-14)概括了方程(0-2), (0-7)和 (0-12) 几种情况。

2) 动态系统的初态和终态,也就是状态方程的边界条件:一个动态过程,归根到底是状态空间中从一个状态到另一个状态的转移。如果把这种转移看成是 n 维状态空间 R^n 中点的运动,则一个动态过程对应于状态空间中的一条轨线。在最优控制问题中,在 $t=t_0$ 时的初态通常是已知的,即 $x(t_0)=x_0$,而到达终端的时间 t_f 和状态 $x(t_f)$ 则因问题而异。就终端时间 t_f 来说,它可以有两种情形:一种是固定的,如例0-3中 $t_f=1$ 小时;另一种是变动的或自由的,如例0-1和例0-2中的最短时间。至于终端状态 $x(t_f)$,情况要复杂得多: $x(t_f)$ 既可以是状态空间中一个固定的点如例0-1和例0-3;也可以是状态空间中一个运动的点,如例0-2;还可以是 $x(t_f)$ 中有些分量固定,而另一些分量自由;如此等等。但无论哪一种情况,我们都可以用一个目标集 S 加以概括,并用 $x(t_f) \in S$ 来表示。若终态是一固定点 x_f ,则目标集 S 仅有一个元素 x_f ;若终态应满足某些约束条件,则目标集 S 是 n 维空间中的超曲面;若终态不受约束,则目标集 S 便扩展到整个 n 维空间。

3) 一个衡量“控制作用”效果的性能指标:为了实现 R^n 中状态从 $x(t_0)$ 到 $x(t_f)$ 的转移,可通过不同的控制来实现。为了衡量系统在每一控制作用下工作的好坏,就得规定一个我们称之为性能指标的技术经济指标,只有这样,才能判别各个控制孰好孰坏。值得着重指出的是:第一,我们无法为各式各样的最优控制问题规定一个统一格式的性能指标,那种面面俱到的最优控制实际上是不存在的。第二,性能指标的内容与形式,取决于最优控制问题所要解决的主要矛盾。例如在例0-1中,若物体 M 指矿井中的升降机,则在上下班时缩短升降机的升降周期是其主要矛盾;在例0-2中,鉴于现代化战争瞬息万变,为了不贻误战机,及早击毁目标导弹就成为主要矛盾,凡此种种,都属于最短时间控制问题。例0-3的情况就不一样,从整个工艺流程互相配合的角度,规定了搅拌槽中液体的升温时间为1小时,不能随意变动,因而最优控制问题的目标转而使散失的热量最小。第三,即使是同一个问题,其性能指标也可能因设计者着眼点的不同而异,如有的设计者注重缩短时间,有的设计者注重节省燃料,有的设计者则兼顾缩短时间和节省燃料。因此,为了使性能指标定得恰到好处,理论知识固不可少,但经验与技巧的积累尤为重要。

在文献中,人们赋予性能指标种种名称:性能泛函,价值函数,目标函数等。在本书中,我们将一概采用性能指标或性能泛函。

4) 一个容许控制的集合:从前面三例可以看出,存在着两类控制:一类是其变化范围受限制的,如例0-1中的作用力 $|u(t)| \leq k$,例0-2中的推力 $|f(t)| \leq F$;另一类是其变化范围不受限制的,或实际上不受限制的,如例0-2中推力方向角 $\varphi(t)$ 可作 $\pm 360^\circ$ 的变化而不受限制,例0-3中温度 $u(t)$ 的变化实际上不受限制,这是因为 $u(t)$ 的变化范围并不太宽,也不难达到,所以我们可以让 $u(t)$ 根据实际需要自由变化,不必予以限制。

对于每一个控制问题来说,控制 $u(t)$ 有一个取值范围,这个取值范围对应于 m 维控制空间 R^m 中的一个集合 Ω ,于是 $u(t)$ 的每一个值对应于集合 Ω 中的一个元素。凡属集合 Ω 的控制,叫做容许控制。在前面提到的两类控制中,前一类控制属于某一闭集,后一类控制属于某一开集。今后我们将会看到,这两类控制的问题,在处理方法上,有着本质的差别。

求解一个最优控制问题,关键在于找出其最优控制。只有满足全部下列三个条件的控制,才是最优控制:

a) 最优控制一定是容许控制,即 $\hat{u}(t) \in \Omega$ 。

- b) 将状态 $x(t)$ 从初态 $x(t_0)$ 转移到目标集 S 中的某一终态 $x(t_f)$ 。
 c) 使性能指标最大或最小, 即达到某种意义下的最优。

根据以上分析, 可将最优控制问题的提法叙述如下:

设已知动态系统的状态方程

$$\dot{x}(t) = f[x(t), u(t), t] \quad (0-15)$$

初始条件是

$$x(t_0) = x_0$$

其中 $x(t) \in R^n$, $u(t) \in \Omega \leq R^m$, $t \in [t_0, t_f]$, 向量函数 $f[x(t), u(t), t]$ 是 $x(t)$, $u(t)$ 和 t 的连续函数, 并对 $x(t)$ 和 t 连续可微。现需寻找在区间 $[t_0, t_f]$ 中有第一类间断点的分段连续最优控制 $\hat{u}(t)$, 以便把状态从初态 x_0 转移到终态 $x(t_f) \in S$, 并使下列性能指标最大或最小:

$$J(u) = \phi[x(t_f), t_f] + \int_{t_0}^{t_f} L[x(t), u(t), t] dt \quad (0-16)$$

其中 $\phi[x(t_f), t_f]$ 和 $L[x(t), u(t), t]$ 都是 $x(t)$ 和 t 的连续可微数量函数。

§ 0-2 最优控制发展简史

在第二次世界大战期间及其后的一段时间内, 以提高发射命中率为主要目标的伺服系统理论, 得到了迅猛的发展。这一理论在设计与分析单输入单输出的、线性时不变的集中参数系统时, 是行之有效的。然而, 随着空间技术的发展, 控制系统日趋复杂, 其精度要求愈益提高, 那种建立在传递函数和频率法基础上的伺服系统理论, 即我们通常所说的经典控制理论, 就日益暴露出它的局限性来^[14]。这种局限性首先表现在当系统变化神速, 不能看成时不变的情况下, 传递函数根本无法定义; 即使是线性时不变系统, 在多输入多输出时, 其传递函数成为一个函数阵, 以致从以往的传递函数属性所得出的工程上的结论, 在这里也变得很复杂而难于应用。其次还表现在频率法本质上是一种工程方法, 由频率法所获得的校正特性, 只能靠简单的网络来实现, 而为了确定网络的合理参数, 还得有一个调试过程, 这种半经验的方法, 当系统很复杂, 精度要求很高时就不易奏效。因此, 人们就又回到时间领域中来, 找到了状态空间方法。

早在五十年代初期, 就开始发表了从工程观点研究最短时间控制问题的文章, 尽管其最优性的证明多半是借助于几何图形, 带有启发的性质, 但毕竟为发展现代控制理论提供了第一批实际模型。由于最优控制问题引人注目的严格表述形式, 更因为空间技术的迫切需要, 引起了一大批数学家的密切注意。人们发现, 最优控制问题就其本质来说, 乃是一个变分学问题。然而, 经典变分理论所能解决的, 只是其容许控制属于开集的一类最优控制问题, 而实际上碰得更多的, 却是其容许控制属于闭集的一类最优控制问题, 这就要求人们开辟求解最优控制问题的新途径。在解决最优控制问题的种种方法中, 有两种方法最富成效, 一种是美国学者贝尔曼(Bellman, R.)的“动态规划”, 另一种是苏联学者庞特里雅金(Понтрягин, Л.С.)的“最大值原理”。“动态规划”是贝尔曼在1953至1957年间逐步创立的, 他依据最优性原理, 发展了变分学中的哈密顿-雅可比(Hamilton-Jacobi)理论, 构成了“动

态规划”。“最大值原理”是庞特里雅金等人在1956至1958年间逐步创立的，他受到力学中的哈密顿原理的启发，先是推测出“最大值原理”，随后又提供了一种证明方法，并于1958年在爱丁堡（Edinburgh）召开的国际数学会议上首次宣读。

与现代控制理论迅速发展的同时，发生了数字计算机的不断变革与发展，主要表现在运算速度的加快，存储容量的扩大，体积的缩小，以及软件的广泛采用。这就使得把计算机当作一个复杂控制系统的重要组成部分，以实现在线控制成为可能，它既不要求封闭形式的解，也不要求把控制器归结为简单的校正网络。因此，高速度、大容量、软硬结合计算机的问世，一方面使现代控制理论的工程实现有了可能，另一方面又提出了许多极需解决的理论课题，进一步推动着现代控制理论的发展。

总而言之，尖端技术使得从经典控制理论向现代控制理论的进展成为必要，而从四十年代发展起来的伺服系统理论，计算机技术，以及数学中长期积累起来的处理现实世界中各式各样数量关系与空间形式的方法，使得现代控制理论的产生与发展成为可能。

时至今日，最优控制理论的研究，无论在深度和广度上，都有了较大的进展，诸如分布参数系统的最优控制，随机系统的最优控制，大系统的最优控制，微分对策，等等。然而，随着人们对客观世界认识的不断深化，又提出了一系列有待解决的新课题，可以毫不夸张地说，最优控制理论依旧是极其活跃的科学领域之一。

§ 0-3 本书主要内容简介

本书主要内容大体上分成三部分。第一部分包括第一至五章，介绍最小值原理（即最大值原理）及其应用。其中第一、二章是原理部分，第三至五章是应用部分。第一章介绍经典变分的基本原理，第二章介绍最小值原理，第三至五章分别介绍三种典型的控制系统——最短时间控制系统、最少燃料控制系统和二次型性能指标的最优线性系统。

第二部分即第六章，介绍动态规则的基本原理及其在积分控制、终端控制和最短时间控制中的应用。

第三部分包括第七、八章，介绍离散型随机系统的最优控制。第七章着重介绍离散型随机系统的分离定理，并用动态规划方法予以证明。第八章介绍随机系统的最优贝叶斯（Bayes）控制。

第一章 最优控制中的变分法

这一章的中心内容,是介绍经典变分的基本原理,并把这些原理加以推广,赖以求解某些最优控制问题。

在内容安排上, § 1-1 和 § 1-2 介绍无约束条件下的变分问题; § 1-3 介绍等式约束条件下的变分问题,在这一节中,我们把拉格朗日乘子法加以推广,用以解决多个等式约束条件下的最优控制问题; § 1-4 介绍当连续的状态轨线上存在有限个不可微点,即所谓角点时的变分问题; § 1-5 介绍极值的充分条件; § 1-6 对本章内容作一小结,指明经典变分理论在求解最优控制问题时的局限性。

§ 1-1 固定端点的变分问题

所谓固定端点问题,是指状态空间中轨线(或轨迹)的起点和终点都是预知的。为了对这类问题有一感性认识,我们不妨举一个简单的例子。设有某航空班机自 A 城飞往 B 城,试寻求一个控制,使飞机消耗的燃料最少。分析一下这个问题,可知在飞机起飞和降落的时刻,标志其飞行状态的量,如位移(或角位移)、速度(或角速度)等,都是确定的;此外,由于是航空班机,飞机自 A 城起飞的时刻 t_0 和到达 B 城的降落时刻 t_f ,都是事先规定了的。我们的目标是要寻找一控制规律,用以控制喷气发动机推力的大小和方向,使飞机沿最优轨线航行,以期所消耗的燃料最少。显见无论飞机沿什么轨线飞行,其始态和终态都是固定的,用状态空间的话来说,飞机的任一轨线必须通过同一起点和同一终点。

在这一节中,我们将研究一类最简单的变分问题。问题的提法是这样的:轨线 $x(t)$ 的始端 $x(t_0) = x_0$ 和终端 $x(t_f) = x_f$ 均属已知,试寻求连续可微的极值轨线 $\hat{x}(t)$,使性能泛函

$$J(x) = \int_{t_0}^{t_f} L[x(t), \dot{x}(t), t] dt \quad (1-1)$$

极大或极小,其中被积函数 $L[x(t), \dot{x}(t), t]$ 是连续可微函数。

设极值轨线存在,它在图 1-1 中用 $\hat{x}(t)$ 表示。假定在极值轨线附近有一容许轨线 $\hat{x}(t) + \eta(t)$, 其中 $\eta(t)$ 连续可微,则 $\hat{x}(t) + \varepsilon\eta(t)$, $0 \leq \varepsilon \leq 1$, 代表了在 $\hat{x}(t)$ 与 $\hat{x}(t) + \eta(t)$ 之间的所有可能的轨线,即 $\hat{x}(t) + \varepsilon\eta(t)$ 当 ε 在 0 与 1 间变动时表示通过 A 、 B 两点的一束轨线,特别是当 $\varepsilon = 0$ 时就是极值轨线 $\hat{x}(t)$ 。

将 $x(t) = \hat{x}(t) + \varepsilon\eta(t)$ 代入(1-1)式,得

$$J(x) = \int_{t_0}^{t_f} L[\hat{x}(t) + \varepsilon\eta(t), \dot{\hat{x}}(t) + \varepsilon\dot{\eta}(t), t] dt \quad (1-2)$$

显然,对于每一条不同的轨线,性能泛函 $J(x)$ 有不同的值。为了寻求使 $J(x)$ 达极值的轨线 $\hat{x}(t)$, 就得研究轨线 $x(t)$ 的变动对 $J(x)$ 的影响,而这种轨线的变动,可以看成是 ε 变化的

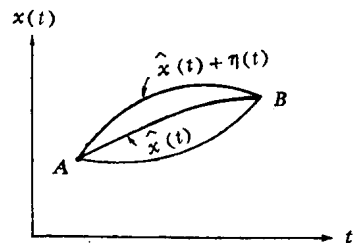


图 1-1

结果。因此，性能泛函就成了 ε 的函数，并在 $\hat{x}(t)$ 上达到极值，即下式成立：

$$\left. \frac{\partial J(x)}{\partial \varepsilon} \right|_{\varepsilon=0} = 0 \quad (1-3)$$

易见

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} J(x) = J(\hat{x}) \quad \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} x(t) = \hat{x}(t)$$

据此，我们将方程 (1-2) 对 ε 求导数，并利用关系式 (1-3)，可得

$$\left. \frac{\partial J(x)}{\partial \varepsilon} \right|_{\varepsilon=0} = \int_{t_0}^{t_f} \left\{ \eta(t) \frac{\partial L(\hat{x}, \dot{\hat{x}}, t)}{\partial x} + \dot{\eta}(t) \frac{\partial L(\hat{x}, \dot{\hat{x}}, t)}{\partial \dot{x}} \right\} dt = 0$$

即

$$\int_{t_0}^{t_f} \eta(t) \frac{\partial L}{\partial x} dt + \int_{t_0}^{t_f} \dot{\eta}(t) \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} dt = 0 \quad (1-4)$$

对 (1-4) 式左边第二项进行分部积分，有

$$\int_{t_0}^{t_f} \dot{\eta}(t) \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} dt = \left. \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} \eta(t) \right|_{t_0}^{t_f} - \int_{t_0}^{t_f} \eta(t) \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} dt \quad (1-5)$$

把 (1-5) 式代入方程 (1-4)，可得

$$\int_{t_0}^{t_f} \eta(t) \left\{ \frac{\partial L}{\partial x} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} \right\} dt + \left. \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} \eta(t) \right|_{t_0}^{t_f} = 0 \quad (1-6)$$

因 $\eta(t_0) = \eta(t_f) = 0$ ，故 (1-6) 式化为

$$\int_{t_0}^{t_f} \eta(t) \left\{ \frac{\partial L}{\partial x} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} \right\} dt = 0 \quad (1-7)$$

因方程 (1-7) 对任意的 $\eta(t)$ 均应成立，由此推知

$$\frac{\partial L}{\partial x} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = 0 \quad (1-8)$$

为了更严格地表述上面的内容，我们有下列定理：

定理 1-1 设已知轨线 $x(t)$ 的起点 $x(t_0) = x_0$ 和终点 $x(t_f) = x_f$ ，则使性能泛函

$$J(x) = \int_{t_0}^{t_f} L[x(t), \dot{x}(t), t] dt \quad (1-9)$$

取极值的必要条件，是轨线 $x(t)$ 为二阶微分方程

$$\frac{\partial L}{\partial x} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = 0 \quad (1-10)$$

或其展开式

$$L_x - L_{\dot{x}\dot{x}} \dot{x} - L_{\dot{x}x} \ddot{x} = 0 \quad (1-11)$$

的解。其中 $x(t)$ 应有连续的二阶导数，而 $L(x, \dot{x}, t)$ 则至少应两次连续可微。注意在方程 (1-10) 和 (1-11) 中，我们略去了 x 上的“ $\hat{}$ ”号，以图简洁。今后，凡不致引起误解的地方，我们都将这样做。

方程 (1-10) 是变分学中著名的欧拉 (Euler) 微分方程, 有的书上也叫 做欧拉-拉格朗日 (Euler-Lagrange) 方程。

值得注意的是, 方程 (1-10) 只是确立了极值的必要条件, 但究竟是极大、极小、还是驻点, 则未能予以鉴别。好在大多数动态系统来说, 可根据过程的物理或化学性质, 来判定其极值特性。因此, 欧拉方程仍不失其为求解极值问题的强有力的工具。

例 1-1 最速降线问题 设在垂直平面中有 O 、 A 两点, 它们不在同一垂线上。现有一质点自 O 向 A 运动, 假定介质的阻力可忽略不计, 问应取怎样的轨线, 才能使所需的时间最短?

取 O 为坐标原点; 令 Ox 为横轴, Oy 垂直向下为纵轴, 如图 1-2 所示。问题是求使质点以最短时间自 $(0, 0)$ 至 (x_f, y_f) 的轨线。

质点的运动速度为

$$\frac{ds}{dt} = \sqrt{2gy}$$

式中 g 是重力加速度。于是质点从 O 到 A 的时间为

$$t[y(x)] = \frac{1}{\sqrt{2g}} \int_0^{x_f} \frac{\sqrt{1+\dot{y}^2}}{\sqrt{y}} dx \quad (1-12)$$

注意在 (1-12) 的泛函表示式中, x 是自变数, y 是 x 的函数。被积函数为

$$L[y(x), \dot{y}(x), x] = \sqrt{\frac{1+\dot{y}^2}{y}} \quad (1-13)$$

由 (1-13) 式可见, L 的表示式中不显含 x 。因此, 其欧拉方程的展开式是

$$L_y - L_{\dot{y}} \dot{y} - L_{\ddot{y}} \ddot{y} = 0$$

将上式两边乘以 \dot{y} , 则得

$$\dot{y}[L_y - L_{\dot{y}} \dot{y} - L_{\ddot{y}} \ddot{y}] = 0 \quad (1-14)$$

易证方程 (1-14) 是 $(L - L_{\dot{y}} \dot{y})$ 对 x 的全导数, 即

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} (L - L_{\dot{y}} \dot{y}) &= L_y \dot{y} + L_{\ddot{y}} \ddot{y} - \dot{y} L_{\dot{y}} - L_{\dot{y}} \dot{y}^2 - L_{\dot{y}} \dot{y} \ddot{y} \\ &= \dot{y} (L_y - L_{\dot{y}} \dot{y} - L_{\ddot{y}} \ddot{y}) \end{aligned} \quad (1-15)$$

因此, 当 L 中不显含 x 时, 其欧拉方程的积分具有下列形式:

$$L - L_{\dot{y}} \dot{y} = C \quad (1-16)$$

式中 C 为任意常数。

将 (1-13) 式中 L 的表示式代入方程 (1-16), 得

$$\frac{\sqrt{1+\dot{y}^2}}{\sqrt{y}} - \frac{\dot{y}^2}{\sqrt{y(1+\dot{y}^2)}} = C$$

稍加整理即得

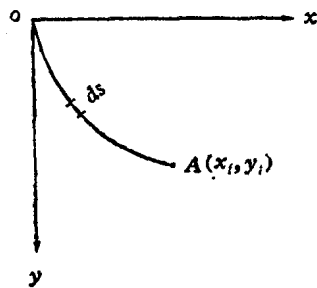


图 1-2

$$\frac{1}{\sqrt{y(1+\dot{y}^2)}} = C$$

或

$$y(1+\dot{y}^2) = C_1 \quad (1-17)$$

为了求出 x, y 的表示式, 可令 $\dot{y} = \operatorname{ctg} \xi$, 其中 ξ 为一参数, 于是 (1-17) 式化为

$$y = \frac{C_1}{1 + \operatorname{ctg}^2 \xi} = C_1 \sin^2 \xi = \frac{C_1}{2} (1 - \cos 2\xi)$$

而由

$$dx = \frac{dy}{\dot{y}} = \frac{2C_1 \sin \xi \cos \xi d\xi}{\operatorname{ctg} \xi} = 2C_1 \sin^2 \xi d\xi = C_1 (1 - \cos 2\xi) d\xi$$

可求出 x :

$$x = C_1 \left(\xi - \frac{\sin 2\xi}{2} \right) + C_2 = \frac{C_1}{2} (2\xi - \sin 2\xi) + C_2$$

由初始条件 $(x_0, y_0) = (0, 0)$ 知 $C_2 = 0$ 。于是

$$x = \frac{C_1}{2} (2\xi - \sin 2\xi)$$

$$y = \frac{C_1}{2} (1 - \cos 2\xi)$$

令 $r = \frac{1}{2} C_1$, $\eta = 2\xi$, 最终得

$$\begin{aligned} x &= r(\eta - \sin \eta) \\ y &= r(1 - \cos \eta) \end{aligned} \quad (1-18)$$

此乃圆滚线方程, 其中 r 为滚动圆的半径, 其值由圆滚线通过点 $A(x_f, y_f)$ 这一条件确定。

在前面推导欧拉方程的过程中, 我们是把性能泛函 $J(x)$ 看作 ε 的函数, 按照普通微积分中求极值的办法处理的。然而在实际应用中, 直接用变分的表示式求泛函的极值, 将显得更简洁些。现在我们就来完成这种过渡。

在性能泛函

$$J(x) = \int_{t_0}^{t_f} L[\hat{x}(t) + \varepsilon \eta(t), \dot{\hat{x}}(t) + \varepsilon \dot{\eta}(t), t] dt$$

中, 将被积函数 L 在 $\varepsilon = 0$ 的邻域展开成泰勒 (Taylor) 级数:

$$\begin{aligned} L[\hat{x}(t) + \varepsilon \eta(t), \dot{\hat{x}}(t) + \varepsilon \dot{\eta}(t), t] &= L[\hat{x}(t), \dot{\hat{x}}(t), t] \\ &+ \frac{\partial L}{\partial x} \varepsilon \eta(t) + \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} \varepsilon \dot{\eta}(t) + R \end{aligned} \quad (1-19)$$

式中 R 代表 $\eta(t)$ 和 $\dot{\eta}(t)$ 的高于一次的项。

用 ΔJ 表示泛函的增量, 即

$$\Delta J = J(\hat{x} + \varepsilon \eta) - J(\hat{x})$$

则