

δ 函数和卷积及在 电工中的应用

戴旦前 陈崇源 编

高等教育出版社

δ 函数和卷积及在电工中的应用

戴旦前 陈崇源 编

*

高等教育出版社出版

新华书店北京发行所发行

河北省香河县印刷厂印装

*

开本 850×1168 1/32 印张 5.125 字数 123,000

1986年12月第1版 1986年12月第1次印刷

印数 00,001—3,180

书号 15010·0706 定价 1.05元

前 言

本书是根据高等学校工科电工教材编审委员会一九八〇年成都会议确定并经教育部批准的《高等学校工科基础课一九八一——一九八五年教材编写规划》所编写的。参加编写讨论和定稿的有戴旦前和陈崇源,全书由戴旦前执笔。本书可作为大学生、研究生和科学技术工作者的参考书。

δ 函数和卷积是近代很多领域广泛使用的一个数学工具,故有必要编写一本系统完整而又便于自学的参考书;同时又由于卷积是建立在 δ 函数的基础上的,所以把两者结合在一起进行编写,是企图达到线索清晰、内容完整的目的。虽然在写作过程中我们注意了数学理论和物理概念的结合,严谨性和通俗性的统一,但由于作者水平有限,错误之处,敬请读者不吝指正。

华中工学院周克定教授仔细地审阅了本书初稿并提出了修改意见,我们在此表示衷心地感谢!

编 者

一九八三年五月五日

目 录

前言	i
第一章 冲激函数和冲激响应	1
§ 1-1 阶跃函数和冲激函数	1
§ 1-2 冲激函数的定义	7
§ 1-3 冲激函数的性质	14
§ 1-4 冲激函数的运算	18
§ 1-5 线性系统的冲激响应和阶跃响应	22
§ 1-6 冲激响应函数与网络函数	32
第二章 卷积积分	41
§ 2-1 卷积积分的定义	41
§ 2-2 卷积积分的性质	46
§ 2-3 卷积积分的图解算法	53
§ 2-4 卷积积分的数值算法	58
§ 2-5 卷积积分的解析算法	61
§ 2-6 杜阿美尔积分	68
§ 2-7 相关	74
§ 2-8 离散卷积(卷积和)	76
§ 2-9 卷积积分的计算机算法	84
第三章 各种变换域中的卷积	93
§ 3-1 卷积定理	93
§ 3-2 傅里叶变换与卷积	96
§ 3-3 帕斯瓦尔公式与能量频谱	101
§ 3-4 Z 变换与卷积	103
§ 3-5 离散傅里叶级数(DFS)	114
§ 3-6 离散傅里叶变换(DFT)	119

§ 3-7 时域与频域圆周卷积(圆卷积)	125
§ 3-8 快速傅里叶变换(FFT)与快速卷积简述	132
附录一 简单线性时不变电路的阶跃响应和冲激响应	134
附录二 卷积表	136
附录三 离散卷积(卷积和)表	138
附录四 常用信号的傅里叶变换表	139
附录五 典型序列的 Z 变换	150
附录六 几何级数的求值公式表	153
参考书	156

第一章 冲激函数和冲激响应

科学技术的发展是各门学科相互渗透、相互促进、相辅相成的结果。自二十世纪初开始,函数的古典定义,已不能满足物理学家在合理的抽象程度上给出物质运动过程相应的描述。例如象瞬息衡量这类简单的物理现象,便不在古典函数所描述的范围之内。为了描述这些现象,物理学家引进了“Dirac δ 函数”,此函数除一点以外到处为零,但这一点为无穷,而其积分为 1。

很明显,这种函数与数学家古典函数论的严格定义是相矛盾的,因而长时间以来得不到确认。直到 1964 年法国数学家舒瓦兹(L. Schwartz)引入广义函数或称分布函数(distribution)的概念以后,就在严密的基础上证明了这种函数的一些性质,从而显著地改进了微分法,奠定了这种数学分析方法的理论基础。这种思想也影响到其他的线性运算,实际上它对分析数学提供了一种有效而富于灵活性的思考方法。

随着科学技术的发展,信号种类的增多,冲激函数 $\delta(t)$ 和它的响应 $h(t)$,在电工理论这个领域中,与在整个物理学各领域中一样,已成为了一个必不可少的数学工具。在这一章里,我们首先通过阶跃函数 $u(t)$ 导入冲激函数 $\delta(t)$ 的概念,而后阐述冲激函数 $\delta(t)$ 的定义以及性质、运算等,最后着重讲在线性系统中的响应。其着重点在于应用而不是函数 $\delta(t)$ 本身。

§ 1-1 阶跃函数和冲激函数

本书涉及数学方面的广义函数或奇异函数(singular functions),所谓奇异函数就是由阶跃函数(step function)及其积分

和导数所构成的一族函数。本书首先从阶跃函数导出冲激函数，(Impulse function)，而后进一步阐述其物理意义。

1 阶跃函数

我们首先来研究图 1-1(a) 所示的电源，且 $v_s(t)=1\text{ V}$ 。当开关 K 在 $t=0$ 时闭合，则其输出电压可用下述函数表示：

$$u(t)=\begin{cases} 0 & t<0 \\ 1 & t>0 \end{cases} \quad (1.1)$$

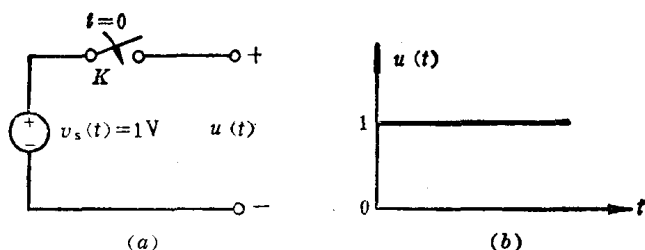


图 1-1 单位阶跃函数

此即单位阶跃函数，而其波形可由图 1-1 (b) 表示之。

从(1.1) 式和其波形看，单位阶跃函数实际上完美地表达了开关的作用，即在开关闭合以前，其输出电压为 0，而在开关闭合以后，其输出电压由 0 跳到 1 V，也就是说它表达了开关的断开和闭合两种状态。比如任意连续函数 $f(t)$ 与单位阶跃函数相乘，则去掉了函数 $f(t)$ 左半部的波形，而保留了右半部的波形，而其函数表达式变为

$$f(t)u(t)=\begin{cases} 0 & t<0 \\ f(t) & t>0 \end{cases}$$

这就清楚表明其函数是在开关闭合后，即 $t=0$ 以后才起作用。

当然如果开关的闭合不是发生在 $t=0$ 的时刻，而是延迟了一段时间在 $t=t_0$ 时刻发生。也就是说函数值由 0 跳变到 1 不是发生在 $t=0$ 时刻，而是发生在 $t=t_0$ 时刻，则其开关函数可表示为 $u(t$

$-t_0$)。其波形就是将 $u(t)$ 的波形向右移动 t_0 的距离, 如图 1-2 (a) 所示。

我们作出单位阶跃函数的波形时, 可令其宗量 (括号里的量, 如 $t-t_0$) 为 0, 以确定其跳变的时刻, 而使其宗量小于 0 的时间里, 函数值为 0; 使其宗量大于 0 的时间里, 函数值为 1。而要作出 $u(t_0-t)$ 的波形, 可先令 $t_0-t=0$, 得出跳变的时刻为 $t=t_0$; $t_0-t<0$ 即 $t>t_0$ 时函数值为 0; $t_0-t>0$ 。即 $t<t_0$ 时, 函数值为 1, 其波形如图 1-2(b) 所示。

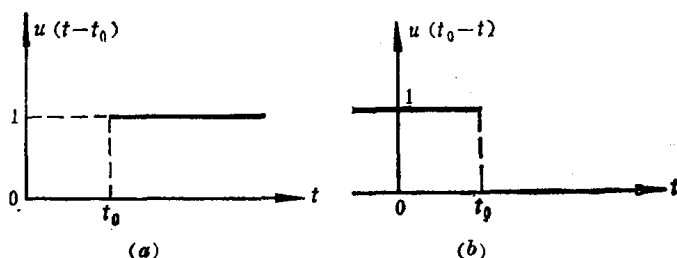


图 1-2 延迟的单位阶跃函数

2 阶跃函数的积分及其应用

我们对单位阶跃函数进行积分, 即得到如下表达式:

$$\int_{-\infty}^t u(t) dt = tu(t) \quad (1.2)$$

我们把这个由积分得出的函数称之为单位斜坡函数 (unit-ramp function), 记为 $r(t)$, 很明显, 单位斜坡函数的波形是一条从原点出发、向正时间轴方向伸延且斜率为 1 的直线, 如图 1-3 所示。

当然, 对单位斜坡函数的微分运算亦为单位阶跃函数。即

$$u(t) = \frac{dr(t)}{dt} \quad (1.3)$$

单位阶跃函数的应用在电路分析中是很广泛和方便的。对于图 1-4 所示的波形, 我们可以用斜坡函数和阶跃函数表示为对所有 t 的函数。即

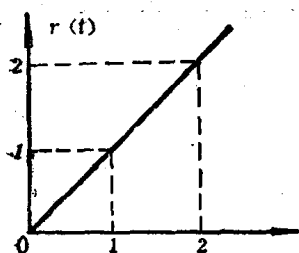


图 1-3 单位斜坡函数

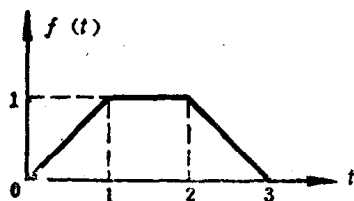


图 1-4 梯形波形

$$\begin{aligned}
 f(t) = & t[u(t) - u(t-1)] \\
 & + [u(t-1) - u(t-2)] \\
 & + [-(t-3)][u(t-2) - u(t-3)]
 \end{aligned}$$

3 单位冲激函数

脉冲函数(Pulse function) $p_{\Delta}(t)$ 是一个从 $t=0$ 开始持续时间为 Δ , 高度为 $\frac{1}{\Delta}$ 的矩形波, 如图 1-5 所示。用公式表达为

$$p_{\Delta}(t) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ \frac{1}{\Delta} & 0 \leq t < \Delta \\ 0 & t > \Delta \end{cases} \quad (1.4)$$

这个表达式也可利用单位阶跃函数表示为

$$p_{\Delta}(t) = \frac{u(t) - u(t-\Delta)}{\Delta} \quad (1.5)$$

单位冲激函数(unit impulse function)是脉冲函数的极限情况, 若令 $\Delta \rightarrow 0$ 则

$$\lim_{\Delta \rightarrow 0} p_{\Delta}(t) \rightarrow \infty$$

但

$$\lim_{\Delta \rightarrow 0} \int_0^{\Delta} p_{\Delta}(t) dt = 1$$

故单位冲激函数定义为

$$\delta(t) = \begin{cases} 0 & t \neq 0 \\ \text{奇异} & t = 0 \end{cases} \quad (1.6)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) dt = 1$$

其波形如图 1-6 所示。

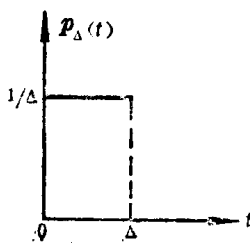


图 1-5 脉冲函数 $p_A(t)$ 的波形

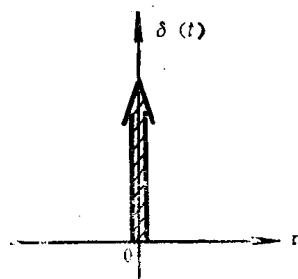


图 1-6 单位冲激函数

图中的宽箭头旁不注数值或注 1 时代表冲激函数的积分面积“1”，如若冲激函数符号旁注 A ，则该函数的积分面积（冲激强度）为“ A ”，记为 $A\delta(t)$ 。

4 $\delta(t)$ 的物理解释

为了要讨论连续分布的量和离散（集中）的量之间的关系，我们需要同时考察这两种量。从物理上来看，它们之间并没有绝对的不同，但在数学表示的形式上，却有很大的区别。例如连续分布或集中都是相对的，当大量原子稠密地分布在大范围（即比原子间距离大得多的区域）中时，就可把它看成是连续分布的，而用密度函数来描写它分布在各处的稠密程度；当物质集中在一个很小范围内时，就把它看成一点，用一个数来表示它的总量。

我们知道，用密度函数即“每一点有一个数和它对应”的古典函数，可以确定物质的分布状况。然而，若已知任意一个区域内物质的总量，那么物质的分布状况同样是可以确定的。现在就用这种方法来描写物质的分布状态。

例如,在静电场中,我们知道,如果以 $\rho(x, y, z)$ 表示电荷在空间中的分布密度,那末沿闭合面 S 的电场的通量

$$\oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = 4\pi \iiint_{\Omega} \rho(x, y, z) dV$$

其中 Ω 为 S 闭合面所包的体积, dV 为体积元素, $\mathbf{E}$ 为电场强度。则

$$\text{在区域}\Omega\text{内的电荷总量} = \iiint_{\Omega} \rho(x, y, z) dV$$

上式这种方法不仅可以描写电荷的连续分布,而且也可以描写在某些点有集中电荷的情况。当有一库仑电荷分布在一点 M_0 时,如三维空间的坐标原点时,则可定义这时电荷分布如下,

$$\begin{aligned} \text{在区域}\Omega\text{内的电荷总量} &= \iiint_{\Omega} \rho(x, y, z) dV = 1 \\ &\quad (\text{当 } M_0 \in \Omega \text{ 时}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{在区域}\Omega\text{内的电荷总量} &= \iiint_{\Omega} \rho(x, y, z) dV = 0 \\ &\quad (\text{当 } M_0 \in \overline{\Omega} \text{ 时}) \end{aligned}$$

这就是 δ 函数,记为 $\delta_{M_0}(M)$,因此有

$$\iiint_{\Omega} \delta_{M_0}(M) dM = \begin{cases} 1 & (\text{当 } M_0 \in \Omega \text{ 时}) \\ 0 & (\text{当 } M_0 \in \overline{\Omega} \text{ 时}) \end{cases}$$

仿古典函数那样来定义它在每一点的值,那末就有

$$\delta_{M_0}(M) = \begin{cases} 0 & (M_0 \neq M) \\ \infty & (M_0 = M) \end{cases}$$

在谈过了电荷的分布以后,我们再来看瞬息冲量的问题。例如用铁锤钉钉子,如果铁锤的质量为 1kg ,运动的速度 $v=1\text{ m/s}$,若锤子与钉子接触的时间 $\Delta t \rightarrow 0$,根据动量与冲量守恒定律可知,钉子所受的力 $f = \delta(t)\text{ N}$ 。即在铁锤接触钉子的瞬间,钉子所受的力趋于无穷大,然而钉子所得到的冲量却是确定的,即 $mv=1$

N·s。

联系到电路,在理想的线性时不变电路中,如果把电压为1 V 的电源与处于零状态的电容为1 F 的电容器接通时,如图1-7 所示,则电容器充电电流 $i_c = \delta(t)$, 这个电流在一瞬间就使得电容器的电压从0 V 跳变到1 V。

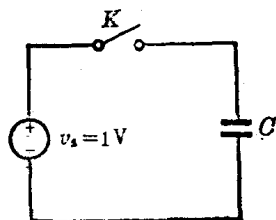


图 1-7 理想情况下电容器的充电

这个物理过程可以这样理解,对于集中参数电路来说,电路的几何尺寸是可以忽略的,因此相应于1 V 电容器电压的1 C 电荷从电源的极板搬到电容器的极板上可以瞬间完成。所以在 $t=0$ 瞬间,充电电流为“ ∞ ”,然而 $i_c(t) = \delta(t)$ 搬移的电荷量是确定的,它只能搬移1 C 电荷,因为 $\delta(t)$ 在 0_- 到 0_+ 这段时间里的积分为1。

§ 1-2 冲激函数的定义

1 冲激函数的定义

有了上述的关于 $\delta(t)$ 的初步定义之后,我们便可进一步来研究 $\delta(t)$ 的数学定义了。关于 $\delta(t)$ 的定义有各种说法,下面介绍三种。

定义 A:

$$\delta(t) = \begin{cases} 0 & t \neq 0 \\ \text{奇异} & t = 0 \end{cases}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) dt = 1$$

定义 B:

$$\delta(t) = \frac{du(t)}{dt} \quad (1.7)$$

$$\int_{-\infty}^t \delta(t') dt' = u(t)$$

定义 C:

$$\delta(t) = \begin{cases} \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(t) & t=0 \\ \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(t) = 0 & t \neq 0 \end{cases} \quad (1.8)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} f_n(t) dt = 1$$

奇异函数都是可视为某些连续函数的极限情况，上述三种定义都是如此。定义 A 如前面所述，是脉冲函数的极限情况。下面我们分别来论述(1.7)和(1.8)两式的情况。

2 $\delta(t)$ 是阶跃函数的时间导数

设连续函数为

$$f(t, \lambda) = \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \tan^{-1} \lambda t$$

$$\text{取 } \tan^{-1} \lambda t \text{ 的主值, 有 } |\tan^{-1} \lambda t| \leq \frac{\pi}{2} \quad (1.9)$$

对于 $\lambda > 0$ ，其波形如图 1-8 中实线所示。

显然，当 $\lambda \rightarrow \infty$ 时有

$$\lim_{\lambda \rightarrow \infty} f(t, \lambda) = u(t) \quad (1.10)$$

取 $f(t, \lambda)$ 对 t 的导数，得

$$f'(t, \lambda) = \frac{d}{dt} f(t, \lambda) = \frac{\lambda}{\pi} \frac{1}{1 + (\lambda t)^2} \quad (1.11)$$

其波形如图 1-8 中虚线所示，而 $t=0$ 时的极大值为 $\frac{\lambda}{\pi}$ 。当 $\lambda \rightarrow \infty$ 时，则 $f'(t, \lambda)$ 在 $t=0$ 时的值将趋于无限大，且

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{d}{dt} f(t, \lambda) dt = 1$$

$$\text{故 } \delta(t) = \lim_{\lambda \rightarrow \infty} \frac{d}{dt} f(t, \lambda) = \frac{du(t)}{dt}$$

当然，与此相仿可导出 $u(t)$ 的高阶导数。

3 取 $f_n(t)$ = 高斯函数

即用高斯函数来说明定义 C。

$$\delta(t) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{\sqrt{\pi}} e^{-n^2 t^2} \quad (1.12)$$

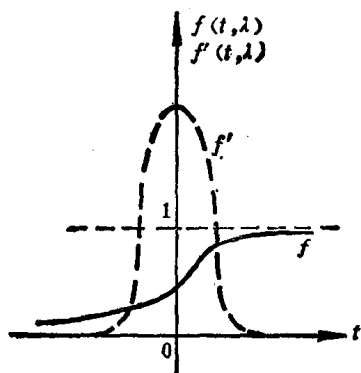


图 1-8 $f(t, \lambda)$ 及其导数的波形

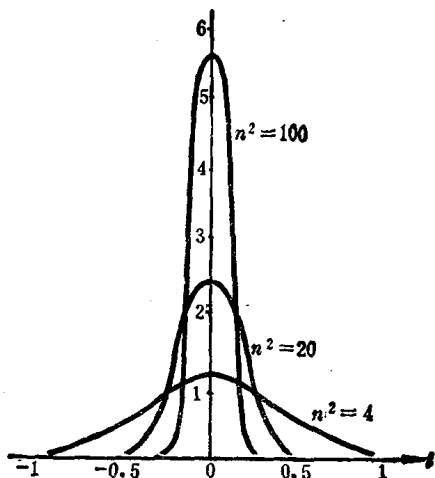


图 1-9 高斯函数

图 1-9 即为 n^2 等于不同值时的高斯函数的波形。由图可见，随着 n^2 的继续增大，曲线变得愈窄愈高。当 $n^2 \rightarrow \infty, t=0$ 时曲线趋于无限大；而 $t \neq 0$ 时，由于 $n^2 t^2 \rightarrow \infty, \delta(t) \rightarrow 0$ ，所以满足定义 C 的部分条件，要满足定义 C 的全部条件，还必须证明满足面积始终为 1 不变。

高斯函数在误差理论方面占有很重要的地位，按照高斯函数曲线形状的误差分布叫正态分布或高斯分布，它的式子是

$$\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} \quad (\sigma > 0) \quad (1.13)$$

使(1.12)式中的 $n^2 = \frac{1}{2\sigma^2}$ ，再移动曲线中心到 $x = \mu$ 处就得到了(1.13)式。式中 x 代表测得值， μ 是平均值， σ 是标准差。这根曲

线包围的面积等于 1 就代表各个误差概率之和应该是 1。

为了证明这一结果，我们引入下式

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-ax^2} dx = \sqrt{\frac{\pi}{a}} \quad (1.14)$$

这个式子样子并不复杂，但要直接积分求出结果并不容易，为此必须作一些转化。

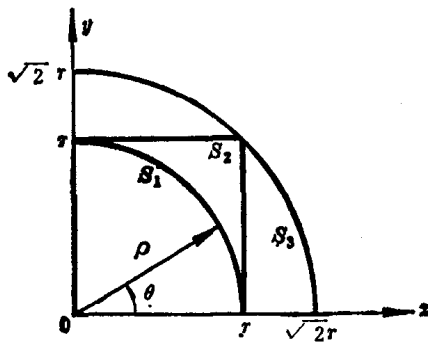


图 1-10 证明用图

图 1-10 是在坐标第一象限中以坐标原点为圆心画出半径为 r 的圆弧，这圆弧和坐标轴所包围的面积为 S_1 ，又以 r 为边长构成一正方形，它的面积为 S_2 ，再以正方形的对角线，即长为 $\sqrt{2}r$ 为半径画一圆弧，这圆弧和坐标轴所包围的面积是 S_3 。显然有下列不等式存在：

$$S_1 < S_2 < S_3$$

将(1.14)式左边的积分限改为从 0 到 r ，用同样的两个相乘，并将其中一个变数改写为 y 并不影响积分结果，就可以变为二重积分转化为极坐标，注意到直角坐标转化到极坐标有 $x^2 + y^2 = \rho^2$ ，得

$$\left(\int_0^r e^{-ax^2} dx \right)^2 = \int_0^r e^{-ax^2} dx \int_0^r e^{-ay^2} dy$$

$$\begin{aligned}
&= \int_0^r e^{-ax^2} dx \int_0^r e^{-ay^2} dy \\
&= \int_0^r \int_0^r e^{-a(x^2+y^2)} dx dy \\
&= \int_0^r \int_0^r e^{-a\rho^2} dx dy
\end{aligned}$$

最后一式代表函数 $e^{-a\rho^2}$ 在 S_2 上面的积分, 也即是左式代表函数 $e^{-a\rho^2}$ 在 S_3 上面的积分。

把直角坐标的面积元 $dx dy$ 改为极坐标的面积元 $\rho d\rho d\theta$, 并将最后一式的积分限改为极坐标的积分限, 下两式即分别代表 $e^{-a\rho^2}$ 在 S_1 和 S_3 上面的积分

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^r e^{-a\rho^2} \rho d\rho d\theta, \quad \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{\sqrt{2}r} e^{-a\rho^2} \rho d\rho d\theta$$

由于函数 $e^{-a\rho^2}$ 只有正值, 而且是单调下降的函数, 结合前述不等式, 就有

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^r e^{-a\rho^2} \rho d\rho < \left(\int_0^r e^{-a\rho^2} dx \right)^2 < \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^{\sqrt{2}r} e^{-a\rho^2} \rho d\rho$$

现在先求左式的积分结果:

$$\begin{aligned}
\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^r e^{-a\rho^2} \rho d\rho &= \frac{\pi}{2} \int_0^r -\frac{1}{2a} e^{-a\rho^2} d(-a\rho^2) \\
&= -\frac{\pi}{4a} e^{-a\rho^2} \Big|_0^r \\
&= \frac{\pi}{4a} (1 - e^{-ar^2})
\end{aligned}$$

上式中只要将 r 改为 $\sqrt{2}r$, 就是不等式中最右的结果。即

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^{\sqrt{2}r} e^{-a\rho^2} \rho d\rho = \frac{\pi}{4a} (1 - e^{-2ar^2})$$

当 $r \rightarrow \infty$ 时, 第一式和第三式中的 e^{-ar^2} 和 e^{-2ar^2} 都趋于 0, 得第一式和第三式的积分结果都是 $\frac{\pi}{4a}$ 。由此可见当 $r \rightarrow \infty$ 时, 上述

积分不等式积分的结果都是 $\frac{\pi}{4a}$ 。即

$$\left(\int_0^{\infty} e^{-ax^2} dx\right)^2 = \frac{\pi}{4a}$$

两边开方,只取正值,

$$\int_0^{\infty} e^{-ax^2} dx = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi}{a}}$$

函数 e^{-ax^2} 只有 x 的偶次方,是偶函数,根据函数积分的概念,即有(1.14)式的结果。

如设 $a = \pi$,则有

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\pi x^2} dx = \sqrt{\frac{\pi}{\pi}} = 1 \quad (1.15)$$

利用上述结果,我们即可论证高斯函数的积分值为1。

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} f_n(t) dt &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{n}{\sqrt{\pi}} e^{-n^2 t^2} dt \\ &= \frac{n}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-n^2 t^2} dt \\ &= \frac{n}{\sqrt{\pi}} \sqrt{\frac{\pi}{n^2}} = 1 \end{aligned}$$

4 取 $f_n(\lambda)$ =抽样函数

凡具有 $\frac{\sin x}{x}$ 型的函数均称之为抽样函数,记为 S_x 。抽样函数的图象如图1-11所示,这种函数具有如下特性:

- (1) 函数以 2π 周期起伏,在 $\pm\pi$ 、 $\pm 2\pi$ 、 $\pm 3\pi$ ……处都为0。
- (2) 在 $x=0$ 处,振幅为1,向正、负 x 方向衰减。
- (3) 它是偶函数,对称于 y 轴。