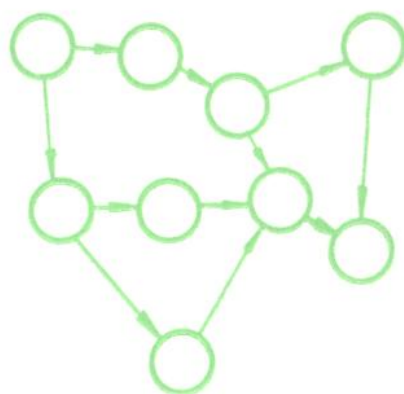
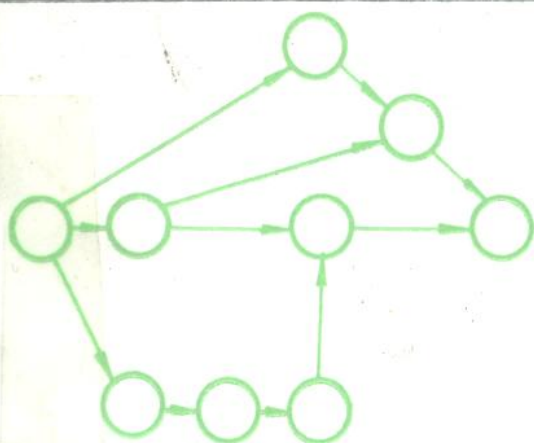
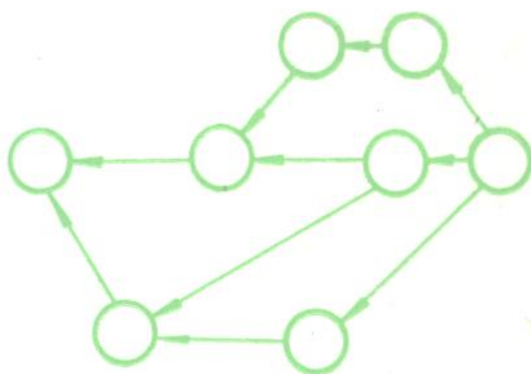
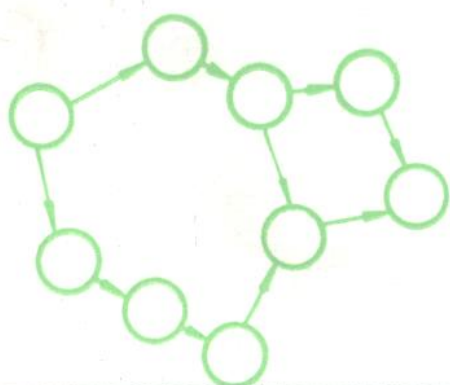


决策支持系统的

数学基础

吕福德 主编

西北工业大学出版社



126817

C931.1

93-68

决策支持系统的数学基础

芮福德 主编
芮福德 李伟华 郭玉红 编
王隆基 党齐民



西北工业大学出版社

1992年6月 西安

(陕)新登字第 009 号

【内 容 简 介】 本书系统地介绍科技、经济、社会问题中决策的数学方法，是管理与决策科学的理论基础。其取材结构是从实际问题提炼出数学模型，然后从数学角度讨论优化方法。全书分：线性规划、整数规划、动态规划、对策论、排队论、网络分析、模拟决策、模糊决策等八章。内容新颖丰富，可作为大学计算机应用专业及管理专业本科生及研究生的教材。

DN42 / 32



决策支持系统的数学基础

吕福德 主编

责任编辑 王俊轩

责任校对 何彬山

*

西北工业大学出版社出版发行

(西安市友谊西路 127 号 邮编 710072)

全国各地新华书店经销

西北工业大学出版社印刷厂印装

ISBN 7-5612-0407-8 / Z · 42

*

开本 787×1092 毫米 1 / 16 12.25 印张 290 千字

1992 年 6 月第 1 版 1992 年 6 月第 1 次印刷

印数: 1—1000 册 定价: 5.50 元

前 言

管理与决策是近些年来迅速发展起来的新兴科学，它不仅受到学术界、教育界的高度重视，而且也引起了政府机关、企业家的很大兴趣，各方面都投入了大量人力、物力和财力开展研究和应用，以致呈现应用研究领先于理论发展的状况，并促进着基础理论的研究。《决策支持系统的数学基础》一书正是在这种现实条件下编写的。本书将有利于管理与决策学科的发展，作为教材将丰富学生的知识，同时为应用研究提供有力的数学工具。

本书是积作者多年教学与科研成果而写成。内容全面、新颖，特别是本书编入了模糊决策处理方法方面的内容，增加了本书的特色和深度。写作方式上，采用了从社会生产实际中提炼出数学模型，然后从数学角度讨论优化方法，方便读者理解。各章有一定的独立性，注重了概念叙述、举例切合实际，便于自学，有较广的适应面。

本书由吕福德主编，李伟华，王隆基、党齐民、郭玉红参加了编写工作。林树根承担全书的绘图工作。

限于作者水平，加之参考书籍缺乏，书中缺点错误难免，敬请读者批评指正。

作 者 1991.6

于西北工业大学计算机科学与工程系

目 录

第一章 线性规划法	1
§ 1-1 几个实际问题的决策分析	1
1.1.1 生产计划安排问题	1
1.1.2 产品调配问题	2
1.1.3 采购问题	2
1.1.4 工程技术问题	3
§ 1-2 线性规划问题的标准形式	3
1.2.1 线性规划问题的一般形式	3
1.2.2 线性规划问题的标准形式	4
1.2.3 规划问题的几何意义	5
1.2.4 求目标函数的极小值问题	6
1.2.5 规划问题的可行解	7
§ 1-3 线性规划问题的通用解法——单纯形法	9
1.3.1 单纯形法	10
1.3.2 高斯消去法的使用	13
1.3.3 单纯形表格	14
1.3.4 矩阵形式的单纯形表格	20
§ 1-4 改善的单纯形法	21
1.4.1 问题的提出	21
1.4.2 改善的单纯形法计算步骤	23
1.4.3 使用改善的单纯形法的实例	23
习题	25
第二章 整数规划	28
§ 2-1 0-1 整数规划	28
2.1.1 0-1 整数规划模型	28
2.1.2 0-1 整数规划算法	29
§ 2-2 一般整数规划	33
2.2.1 整数规划问题的一般数字表达式及模型举例	33
2.2.2 分枝定界法	36
习题	41
第三章 动态规划	43
§ 3-1 多阶段决策过程及实例	43
§ 3-2 动态规划的基本概念和基本原理	45

3.2.1 动态规划的基本概念	45
3.2.2 动态规划的基本原理	47
§ 3-3 旅行商问题的动态规划解法	48
3.3.1 旅行商问题的算法	48
3.3.2 实例	49
3.3.3 复杂性估计	50
§ 3-4 动态规划的其它应用	51
3.4.1 背包问题	52
3.4.2 可靠性问题	55
3.4.3 资源分配问题	58
习题	62
第四章 对策论	65
§ 4-1 最小最大纯策略	65
4.1.1 零和对策	65
4.1.2 二人零和对策支付矩阵	65
4.1.3 纯策略	66
4.1.4 最小最大——最大最小纯策略	66
§ 4-2 混合策略与期望支付	67
4.2.1 混合策略	67
4.2.2 期望支付	68
§ 4-3 2×2 对策的解	69
§ 4-4 优势	70
§ 4-5 $2 \times n$ 对策的解和 $m \times 2$ 对策的解	73
4.5.1 相关行和相关列	73
4.5.2 $2 \times n$ 对策的解	73
4.5.3 $m \times 2$ 对策的解	78
§ 4-6 解对策问题的通用算法	79
习题	81
第五章 排队论	82
§ 5-1 基本定义	82
5.1.1 服务系统的组成和特征	82
5.1.2 排队模型的符号表示	86
5.1.3 服务系统的运行指标	86
§ 5-2 单服务台服务系统模型 $M/M/1$	87
5.2.1 标准 $M/M/1$ 模型	88
5.2.2 容量有限的单台服务系统	91

5.2.3	顾客有限的单台服务系统	93
§ 5-3	多服务台服务系统模型 $M/M/c$	94
5.3.1	标准 $M/M/c$ 模型	94
5.3.2	容量有限的多台服务系统	97
5.3.3	顾客有限的多台服务系统	98
§ 5-4	爱尔朗时间模型	100
5.4.1	定长服务时间	103
5.4.2	爱尔朗服务时间	103
习题		104
第六章	网络分析决策方法	106
§ 6-1	网络分析基础	106
6.1.1	网络图	106
6.1.2	网络图的类型	109
6.1.3	编制网络图的规则和步骤	110
§ 6-2	网络图的计算	116
6.2.1	计算公式	116
6.2.2	计算示例	118
§ 6-3	网络计划的优化	121
6.3.1	时间优化	121
6.3.2	资源优化	122
6.3.3	成本优化	124
§ 6-4	决策网络	128
6.4.1	决策网络	128
6.4.2	网络计划的调整	128
习题		132
第七章	模拟决策方法	135
§ 7-1	模拟决策综述	135
7.1.1	模拟决策及其意义	135
7.1.2	模拟决策方法的发展	136
§ 7-2	模拟决策的一般程序	137
7.2.1	确定目标	138
7.2.2	构造模型	138
7.2.3	数据准备	138
7.2.4	模型的转换	139
7.2.5	模型的有效化	139
7.2.6	模型试验设计	139

7.2.7	模拟运行	139
7.2.8	结果分析	140
7.2.9	建立文件	140
§ 7-3	随机变量的产生方法	140
7.3.1	随机变量概率分布的确定	140
7.3.2	模拟过程中随机数的产生方法	141
§ 7-4	模拟方法在决策中的应用	148
7.4.1	物理模拟法	148
7.4.2	数学模拟法	149
7.4.3	功能模拟法	150
7.4.4	应用举例	151
7.4.5	存在的问题	157
	习题	159
第八章 模糊决策方法		161
§ 8-1	问题的提出	161
§ 8-2	模糊数学理论基础	161
8.2.1	模糊集合的概念	161
8.2.2	模糊集的运算	164
8.2.3	模糊集合与普通集合的关系	167
§ 8-3	单目标模糊决策与多目标模糊决策	171
8.3.1	单目标模糊决策	171
8.3.2	多目标模糊决策	172
8.3.3	模糊数学规划	174
§ 8-4	多级模糊决策	178
	习题	185

第一章 线性规划法

对于满足由一组线性方程或线性不等式构成约束条件的系统，使由线性方程变量所表示的目标函数达到极值(极大值或极小值)，从而求得系统诸因素的最佳参数的数学方法，称为线性规划。

线性规划是研究决策系统静态最优化数学方法之一，它作为经营管理决策中的数学手段，在当代决策中的应用是非常广泛的。这种定量分析技术适用于制造、销售、运输计划等方面，也适用于原材料配合、人员配备计划等许多方面，是一种在有限资源的有效利用上能获得最好效果或用最小费用即可达到一定目的的最有效的决策定量分析技术。

§ 1-1 几个实际问题的决策分析

1.1.1 生产计划安排问题

有一工厂，有三类机器，分别用 M_1 、 M_2 和 M_3 表示；利用这三类机器生产四种产品 P_1 、 P_2 、 P_3 、 P_4 ；每类机器的台数分别用 m_1 、 m_2 和 m_3 表示。若生产每单位产品所需机时数由表 1-1 表示：

表 1-1

产品 机器	P_1	P_2	P_3	P_4
M_1	t_{11}	t_{12}	t_{13}	t_{14}
M_2	t_{21}	t_{22}	t_{23}	t_{24}
M_3	t_{31}	t_{32}	t_{33}	t_{34}

其中 t_{ij} 表示生产一单位的第 j 种产品需要 M_i 类机器的机时数，其中 $i = 1, 2, 3$ ； $j = 1, 2, 3, 4$ 。设产品 P_1 、 P_2 、 P_3 、 P_4 的单位产品的利润分别为 c_1 、 c_2 、 c_3 、 c_4 ，设生产这四种产品时，使用机器没有先后次序之分，试问在一定时间内，例如一个月内应如何安排生产才能获得最大利润？

解： 设四种产品每月生产的数量分别为 x_1 、 x_2 、 x_3 、 x_4 ，这时的目标函数为：

$$z = c_1x_1 + c_2x_2 + c_3x_3 + c_4x_4$$

应取极大值，即

$$\max z = c_1x_1 + c_2x_2 + c_3x_3 + c_4x_4$$

当允许机器每月开动 240 小时, 则约束条件为:

$$\begin{cases} t_{11}x_1 + t_{12}x_2 + t_{13}x_3 + t_{14}x_4 \leq 240m_1, \\ t_{21}x_1 + t_{22}x_2 + t_{23}x_3 + t_{24}x_4 \leq 240m_2, \\ t_{31}x_1 + t_{32}x_2 + t_{33}x_3 + t_{34}x_4 \leq 240m_3 \end{cases}$$

则该问题的完整数学描述应为:

$$\begin{cases} \max z = c_1x_1 + c_2x_2 + c_3x_3 + c_4x_4 \\ t_{11}x_1 + t_{12}x_2 + t_{13}x_3 + t_{14}x_4 \leq 240m_1, \\ t_{21}x_1 + t_{22}x_2 + t_{23}x_3 + t_{24}x_4 \leq 240m_2, \\ t_{31}x_1 + t_{32}x_2 + t_{33}x_3 + t_{34}x_4 \leq 240m_3, \\ x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0 \end{cases}$$

其中: $x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0$ 表示四种产品的产量不可能为负值。

1.1.2 产品调配问题

若有一产品 (如煤), 由 m 个地方 (矿务局) 生产, 它们的产量分别是 $a_1, a_2, a_3, \dots, a_m$; 有 n 个销地 (如大城市或外运港口), 需求量分别是 $b_1, b_2, b_3, \dots, b_n$, 设从产地 i 运往销地 j 的单位运费为 c_{ij} ; 设产销平衡, 运输畅通, 则有:

$$\sum_{i=1}^m a_i = \sum_{j=1}^n b_j$$

试问应如何安排调运才合理?

合理的调配应使运费最少。设从产地 i 运往销地 j 的量为 x_{ij} , 则该问题的数学描述是:

$$\begin{cases} \min z = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n c_{ij}x_{ij} \\ \sum_{j=1}^n x_{ij} \leq a_i \quad \text{其中: } \begin{matrix} i=1, 2, \dots, m \\ j=1, 2, \dots, n \end{matrix} \\ \sum_{i=1}^m x_{ij} \geq b_j \\ x_{ij} \geq 0 \end{cases}$$

其中 $\sum_{j=1}^n x_{ij} \leq a_i$ 表示由产地 i 运往各销地数量 i 和不能大于产地 i 的产量; $\sum_{i=1}^m x_{ij} \geq b_j$ 表示由产地 i 运往销地 j 的数量应该大于 j 地的实际销量; $x_{ij} \geq 0$ 表示由产地 i 运往销地 j 的数量不能为负数。

1.1.3 采购问题

若要办一迎春茶话会需要购买糖果, 已知甲级糖为 2 元 / 斤, 乙级糖 1 元 / 斤, 要求

(1-1)

(1 - 2)

$$\begin{cases} \max C^T X \\ AX \leq b \\ X \geq 0 \end{cases} \quad (1-2)$$

$$\mathbf{X} = [x_1 \quad x_2 \quad \dots \quad x_n]^T$$

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ & & \cdots & \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

线性规划问题的标准形是:

$$\begin{cases} \max & C^T X \\ & AX = b \\ & X \geq 0 \end{cases} \quad (1-3)$$

(1) 若第 i 个约束不等式为:

$$\sum_{i=1}^n a_{ij} x_i \leq b_j$$

$$x_{n+i} = b_i - \sum_{j=1}^n a_{ioj} x_j \geq 0$$
$$\sum_{j=1}^n a_{ij} x_j + x_{n+1} = b_i \quad (1-4)$$

变量 x_{n+1} 称为松弛变量。

(2) 若第 i 个约束不等式为

$$\sum_{j=1}^n a_{ij}x_j \geq b_i$$

则引进非负变量:

$$x_{n+i} = \sum_{j=1}^n a_{ij}x_j - b_i \geq 0$$

这时原不等式约束就化为等式约束:

$$\sum_{j=1}^n a_{ij}x_j - x_{n+i} = b_i \quad (1-5)$$

这里的 x_{n+i} 称为剩余变量。

(3) 若变量 x_j 没有非负限制, 则可以引入两个非负变量 $x'_j \geq 0$, 和 $x''_j \geq 0$, 且 $x'_j - x''_j = x_j$, 代入等式约束 $AX = b$ 中, 即可化为非负要求的标准形式。这时的变量 x'_j 和 x''_j 称为自由变量。

经过以上的变换, 任何形式的规划问题都可以转化为它的标准形式了, 即约束方程的不等式变为等式。

例1.1 有一线性规划问题:

$$\begin{aligned} \max z &= x_1 + x_2 \\ 2x_1 + 3x_2 &\leq 6 \\ 3x_1 + 2x_2 &\leq 6 \\ x_1, x_2 &\geq 0 \end{aligned}$$

如何将它转换为标准形式?

解 引入两个松弛变量 x_3, x_4 , 并使

$$\begin{aligned} x_3 &= 6 - 2x_1 - 3x_2 \\ x_4 &= 6 - 3x_1 - 2x_2 \end{aligned}$$

则规划问题的标准形式是:

$$\begin{aligned} \max z &= x_1 + x_2 + 0x_3 + 0x_4 \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 &= 6 \\ 3x_1 + 2x_2 + x_4 &= 6 \\ x_1, x_2, x_3, x_4 &\geq 0 \end{aligned}$$

1.2.3 规划问题的几何意义

为了说明规划问题的几何意义, 我们还是用上面的例子来讨论, 因为该规划问题的变量只有两个, 可以在平面上作图, 如图 1-1 所示:

图 1-1(a) 的影线部分表示满足条件: $x_1 \geq 0, x_2 \geq 0$; 图 1-1(b) 的影线部分表示满足条件: $3x_1 + 2x_2 \leq 6$ 和 $x_1 \geq 0, x_2 \geq 0$; 图 1-1(c) 的影线部分表示满足条件: $2x_1 + 3x_2$

≤ 6 和 $x_1 \geq 0, x_2 \geq 0$; 图 1-1(d) 的影线部分表示满足条件: $3x_1 + 2x_2 \leq 6$ 和 $2x_1 + 3x_2 \leq 6$ 及 $x_1 \geq 0, x_2 \geq 0$, 即影线区域 (包括其顶点) 中的任何一点都是满足约束条件的解, 我们称它为可行解。

图 1-1(e) 给出了包括目标函数 $z = x_1 + x_2$ 的等位线。由于目标函数是线性函数, 故等位线是一组平行线, 垂直于该组平行线的箭头所指的方向, 是目标函数单调递增的方向。从图 1-1(f) 中可以直观地看到: 满足约束条件, 又是目标函数的极大值的点是在 $(\frac{6}{5}, \frac{6}{5})$ 处, 它正好是在可行解域的顶点上。满足约束条件且是目标函数极大值的点处于可行域的顶点上的结论, 可以从任何两个变量的规划问题的图解中得到证实。以上结论可以更确切地描述为: 规划问题的解是在约束条件允许的可行域的顶点上。多变量的线性规划问题, 不能用图来表示, 但是可以证明, 它的解也在可行域的顶点上, 这里我们虽然不证明此结论, 但以后我们要常常使用此结论。

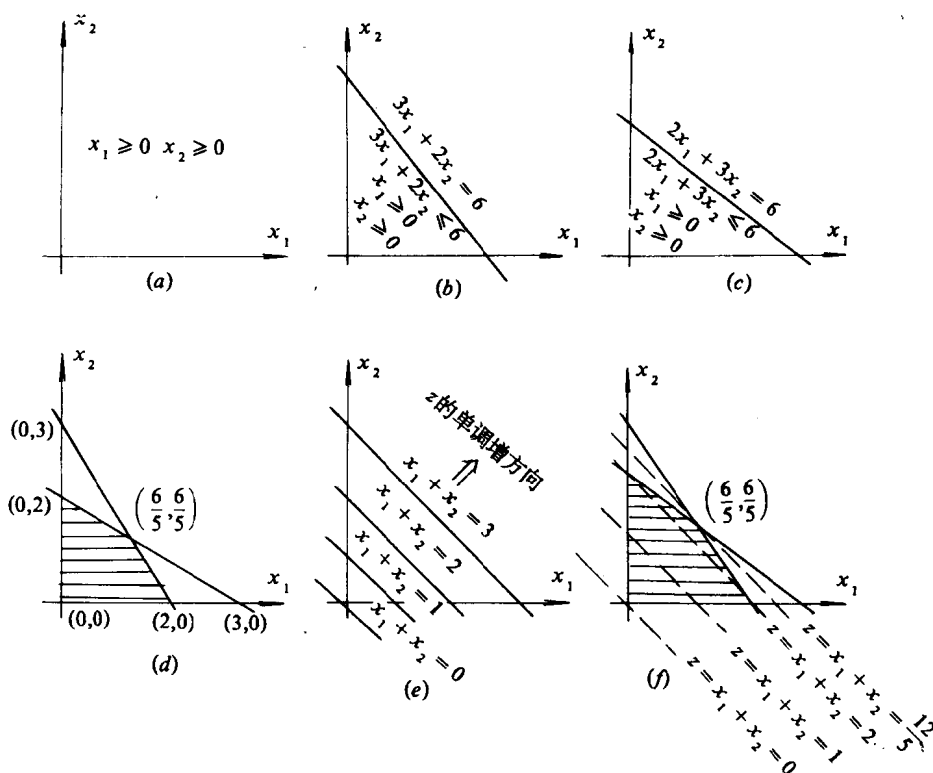


图 1-1 线性规划问题示例图

1.2.4 求目标函数的极小值问题

在线性规划问题中, 有许多情况目标函数不是求极大值而是求极小值。能否将求极小值的目标函数的问题变为求极大值目标函数问题, 即使规划问题与前面给出的标准形式完

全一致，即将求极大值的问题变为求极小值的问题呢？下面将讨论如何将求极小值的问题变为求极大值的问题或者相反的情况。

如果线性规划以下述形式描述：

$$\begin{aligned} \min z^* &= \sum_{j=1}^k c_j x_j \\ \sum_{j=1}^k a_{ij} x_j &\geq b_i \quad i=1, 2, \dots, m \\ x_j &\geq 0 \quad j=1, 2, \dots, n \end{aligned} \quad (1-6)$$

如果用 -1 乘目标函数，则 1-6 式变为

$$\begin{aligned} \max \hat{z} &= -z^* = \sum_{j=1}^k c_j x_j \\ \sum_{j=1}^k a_{ij} x_j &\geq b_i \quad i=1, 2, \dots, m \\ x_j &\geq 0 \quad j=1, 2, \dots, n \end{aligned} \quad (1-7)$$

因此可以用求解最大值的方法求解这个新问题，而原问题的目标函数值即为 $z^* = -\hat{z}$ ，使 $\hat{z}$ 为最大的变量值也是使 z^* 为最小的变量值。

例 1.2 求下述规划问题：

$$\begin{cases} \min z^* = x_1 + 2x_2 \\ x_1 \geq 4 \\ 2x_1 - x_2 \leq 6 \\ x_2 \geq 0 \end{cases}$$

解 原问题的求极大值问题是

$$\begin{cases} \max \hat{z} = -x_1 - 2x_2 \\ x_1 \geq 4 \\ 2x_1 - x_2 \leq 6 \\ x_2 \geq 0 \end{cases}$$

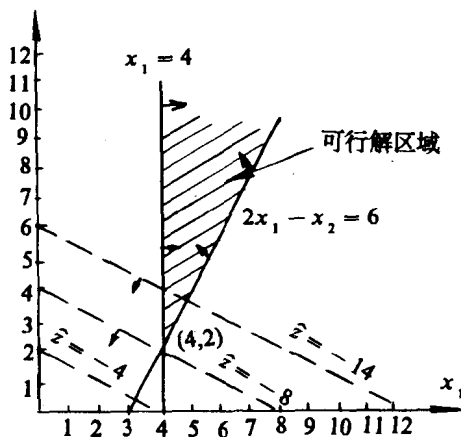


图 1-2 例 1-2 的图解

用图解法求解，如图 1-2 所示：

从图 1-2 中可以看到， $\hat{z}$ 的最大值出现在 $x_1 = 4$ 和 $x_2 = 2$ ，其值为 -8 ；同时可看到 $x_1 = 4$ ， $x_2 = 2$ 也是原问题中使 z^* 极小值的点。而 z 的极小值为

$$\min z^* = -\max \hat{z} = -(-8) = 8$$

此例同样可以适用于由求极小值的问题转化为求极大值的问题。

1.2.5 规划问题的可行解

在规划问题中，若设约束条件的系数矩阵为 A ， A 的秩为 m ，且 $m < n$ ， n 为变量个数。并记为：

$$A = [P_1, P_2, \dots, P_n] \quad (1-8)$$

式中

$$P_j = [a_{1j}, a_{2j}, \dots, a_{mj}]^T$$

若

$$P_j \neq 0$$

可把规划问题的约束

$$\begin{cases} AX = b \\ X \geq 0 \end{cases} \quad (1-9)$$

改写为:

$$\begin{cases} P_1 x_1 + P_2 x_2 + \dots + P_n x_n = b \\ X \geq 0 \end{cases} \quad (1-10)$$

设 $P_1, P_2, \dots, P_m$ 线性无关, 并记为

$$B = [P_1, P_2, \dots, P_m]$$

因 B 为非奇异方阵, 因而其逆阵 B^{-1} 存在.

若令 $X = X^0$ $X^0 = [x_1^0, x_2^0, \dots, x_m^0, x_{m+1}^0, \dots, x_n^0]$

而且 $x_{m+1}^0 = x_{m+2}^0 = \dots x_n^0 = 0$

则式 (1-10) 变为:

$$P_1 x_1^0 + P_2 x_2^0 + \dots + P_m x_m^0 = b$$

即

$$B \begin{bmatrix} x_1^0 \\ x_2^0 \\ \vdots \\ x_m^0 \end{bmatrix} = b$$

所以有:

$$\begin{bmatrix} x_1^0 \\ x_2^0 \\ \vdots \\ x_m^0 \end{bmatrix} = B^{-1} b \quad (1-11)$$

若 $B^{-1} \geq 0$, 则可得到规划问题的一个可行解, 解的形式是:

$$[x_1^0, x_2^0, \dots, x_m^0, 0, 0, \dots, 0]^T$$

显然, 在矩阵 $A = [P_1, P_2, \dots, P_n]$ 中, 任意选取 m 个线性无关的向

量 $P_{i1}, P_{i2}, \dots, P_{im}$, 如果有 $B^{-1}b \geq 0$, 则按此方法得到的解也都是规划问题的可行解.

概括上述过程, 可以重新作如下定义:

设规划问题中等式约束条件的系数矩阵

$$A = [P_1, P_2, \dots, P_n]$$

为 $m \times n$ 维矩阵, 且 $\text{rank}(A) = m$, 其子矩阵

$$B = [P_{i_1}, P_{i_2}, \dots, P_{i_m}]$$

是非奇异阵, 则规划问题的可行解:

$$X_i^0 = 0 \quad i \in \{i_1, i_2, \dots, i_m\}$$

$$X_B^0 = [x_{i_1}^0, x_{i_2}^0, \dots, x_{i_m}^0]^T = B^{-1}b \quad (1-12)$$

称为基础可行解; 这时, 方阵 B 称为相应于该基础可行解 X^0 的基矩阵或基底; $x_{i_1}, x_{i_2}, \dots, x_{i_m}$ 称为相应于基矩阵 B 的基变量; 其他的 $x_j (j \neq i_k, k = 1, 2, \dots, m)$ 称为非基变量。

例1.3 求约束为

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 1 \\ x_1, x_2 \geq 0 \end{cases}$$

的全部基础可行解。

解 因为 $P_1 = 1, P_2 = 1, b = 1$

且 $m = 1$

因而所给约束条件的子矩阵为

$$A = [1 \quad 1] = [P_1 \quad P_2]$$

又因为 $\text{rank}(A) = 1$

所以可令 $X = X^0$, 而 $x_2 = 0, B = P_1$

则 $x_1 = B^{-1}b = P_1^{-1}b = [1]$

故 $X^0 = [1 \quad 0]^T$ 为一个基础可行解。

同理, 令 $B = [P_2]$

则 $x_2 = P_2^{-1}b = 1$

故 $X^0 = [0 \quad 1]^T$ 亦为基础可行解。

故所以给定问题的基础可行解共两个, 即:

$$X^0 = [1 \quad 0]^T$$

$$\text{和 } X^0 = [0 \quad 1]^T$$

一般情况下, 线性规划问题的基础可行解的个数最多为 C_n^m , C_n^m 表示 n 个变量中取 m 个变量的组合数, m 是 A 阵的秩。

§ 1-3 线性规划问题的通用解法 —— 单纯形法

单纯形法的基本思路:

根据问题的标准形, 从可行域中一个基础可行解开始, 转换到另一个基本可行解, 并且使目标函数的值逐步增大; 当目标函数达到最大值时, 即得其最优解。