力学丛书

叶轮机械中的跨音速流动

沈孟育 周盛 林保真 著

科学出版社

内 容 简 介

本书是作者们在叶轮机械中跨音速流动领域多年来研究工作的系统总结. 内容包括: 平面叶栅跨音速绕流，平面跨音速叶栅设计方法，平面跨音速叶栅的正、反混合问题，任意旋成面叶栅跨音速绕流，叶轮机械中完全三维跨音速流动，跨音叶栅流场相仿律，叶片颤振时的非定常气动问题，平面叶栅中非定常跨音速流动等.

本书可供从事高速叶轮机械研制、设计的工程技术人员，和从事高速空气动力学研究的科研人员以及有关高等院校的教师、研究生和高年级大学生阅读.

力学丛书

叶轮机械中的跨音速流动

沈孟育　周　盛　林保真 著

责任编辑 陈大宁

科学出版社出版

北京朝阳门内大街137号

中国科学院印刷厂印刷

新华书店北京发行所发行　各地新华书店经售

*

1988年2月第一版　开本: 850×1168 1/32

1988年2月第一次印刷　印张: 11 1/8

印数: 精 1—400　插页: 精 2

平 1—1,000　字数: 288,000

ISBN 7-03-000067-6/O·15

定价: 布脊精装 4.30元

平 装 3.20元

《力学丛书》编委会

前　　言

当考查任何一个气流流场时，可以认为 Mach 数是最重要的特征参数之一. Mach 数决定着扰动传播的范围，因而深刻地反映了该流场的物理特性，并势必同时决定所采用的数学模型的特征以及解法. 正是由于上述原因，亚音速可压流动就不能完全沿用不可压流动的办法处理，而必须考虑到压缩性. 超音速流则更不能使用亚音速流的办法. 这里讨论的跨音速流动还要复杂，因为在跨音速流场中局部亚音速区与局部超音速区并存，而且二者之间的分界面(音速面或激波)又是事先不知道的. 由此可见，跨音速流场既不同于纯亚音速流场，又不同于纯超音速流场. 由于跨音速流的上述基本属性，就必须有一套独特的处理方法.

按照上述气体动力学观点来衡量，当代高速叶轮机械中的流场对应于哪一种基本类型呢？以当代航空燃气涡轮发动机中的叶轮机械为例，无论是风扇、压气机，还是涡轮，若从流场性质角度来看，则无一例外地都属于跨音速流范畴. 这里既包括工程上通称的跨音压气机级(或涡轮，下同)，也包括部分工程上通称的亚音压气机级. 这里所指的亚音压气机级，就是指沿叶高进口 Mach 数恒小于 1.0 的压气机级，或沿叶高出口 Mach 数恒小于 1.0 的涡轮级. 例如一个叶尖进口相对 Mach 数 $M_{w_1t}=0.9$ 的压气机级，在工程上通称为亚音级，但流场中则仍存在局部超音速区和激波，因而从流场特征来看，仍属于跨音速流场而不是亚音速流场.

尽管在叶轮机械中出现跨音速流的历史已很长，但是从叶轮机械气体动力学的学科角度来看，多维跨音速流场的分析计算从定性走向定量还是从七十年代初期才开始的. 其主要原因在于跨音速流动的复杂性.

所谓跨音速流场，就是指既存在局部亚音速区，又存在局部超音速区，并且多数存在有形状、位置及数目均属待定的激波的这样一类流场．从描述流场主流区的一阶拟线性偏微分方程组的类型来看，局部亚音速区对应着椭圆形，局部超音速区对应于双曲型，在音速面上则退化为抛物型． 于是从总体上看，应属于混合型．由于流场中激波的存在，方程不再具有古典意义的解．为了描述这样的流场，而必须采用弱解理论．除开主流区之外，在跨音速流场中粘性的作用较纯亚音速流与纯超音速流更为复杂，流场对于物面边界条件的微小变化更为敏感，大尺度分离现象也格外易于发生．

据上所述，我们认为当代叶轮机械气体动力学的主要发展方向可以简略地概述为跨音速流、粘性分离流与非定常流．这三者虽各代表一方面的重要属性，但又无法截然分开．例如，人们在粘性问题中最关心的还是对应于跨音速条件下的粘性效应，在非定常流领域中最为关注的一些问题是在跨音速条件下的旋转失速以及叶片颤振的发作等等．由此可见，叶轮机械中的跨音速流动问题可以认为是本学科分支当前的焦点，它的发展标志着当代叶轮机械气体动力学的发展程度与水平．对于这里所讨论的问题，文献[1]曾指出：近年来，风扇、压气机和透平内的气流都发展到部分亚音速、部分超音速的跨音速流动，流场中出现了激波间断面，需要进一步了解跨音速流动的详细规律，发展更准确的计算方法．另一个重要研究方向是进一步考虑气体粘性的影响，在粘性作用最严重的区域——边界层中，还可能有气流分离现象发生，这造成很大的气动损失．因此需要建立三元转动叶片上粘性边界层流动的物理模型和计算方法．喘振、进口不均匀气流的影响等，也是重要的研究课题． 可以认为，上述论述与我们的看法基本上一致．

这本书虽然名为《叶轮机械中的跨音速流动》，但远远不能包括这方面的全部内容．本书主要是将作者们近年来所作的点滴工作向同行们作一汇报．由于工作内容所限，未能涉及实验研究．事

实上，叶轮机械气体动力学作为技术科学的一个分支，实验研究所应有的作用和比例是众所周知的. 此外，有关叶轮机械中的跨音速流动问题，近年来国内很多同志都在这方面开展了工作. 其中不少研究工作是很出色的.

本书的主要目的是总结作者在叶轮机械中的跨音速流动方面所做的一些工作，而不是对叶轮机械中的跨音速流动作全面的总结，因此象跨音速粘性流问题，特别是跨音速分离流问题都未涉及到. 今后关于这方面的问题还有大量的工作有待深入进行研究.

本书在写作过程中得到许多学术界的前辈和同行们的批评指正和鼓励，作者在此谨致以诚挚的谢意!

本书作者署名以姓氏笔划为序. 第一、二、三、九、十一章由沈孟育撰写，第五、八、十、十二、十三章由周盛撰写，第四、六、七十四章由林保真撰写.

参 考 文 献

[1] 中国科学院工程热学理学规划组，工程热学理学科简介，现代科学技术简介，科学出版社，大字版 p. 215, 1978.

作者

1983年11月于北京

目　　录

第一章　基本方程……1

§1　叶轮机械中流场的一般分析与简化……1

§2　积分形式的基本方程……2

§3　微分形式的基本方程……8

§4　基本方程的分析与讨论……12

§5　柱坐标系中的基本方程……16

§6　叶轮机械几种气动理论概述……19

§7　小结……22

参考文献……23

第二章　时间推进有限差分法……25

§1　引言……25

§2　时间推进法的基本思想……26

§3　处理激波的方法……27

§4　平面叶栅跨音速绕流问题的提法……31

§5　有限差分计算……36

§6　算例……43

§7　小结……46

参考文献……46

第三章　时间推进有限面积流线迭代法……48

§1　引言……48

§2　基本方程组和定解条件……49

§3　求解域的离散化……51

§4　差分格式……54

§5　边界计算点上流动参数的确定……57

§6　初始流场的确定及逐次加密网格技术的采用……60

§7　关于收敛情况的判断……61

§8　关于差分格式稳定性的说明……63

§9　平面叶栅算例和结果分析……64

§10　任意旋成面叶栅的跨音速绕流……69

§11　小结……81

参考文献……82

第四章　关于时间推进法中边界条件的讨论…………………… 84
§1　引言……………………………………………………………… 84
§2　特征相容方程组的推导………………………………………… 85
§3　平面叶栅绕流问题边界条件的提法及适合于每一类边界的具体的特征相容条件 ……………………………………………………………… 93
§4　边界的近似数值处理…………………………………………… 105
§5　关于进口边界条件的具体提法………………………………… 108
§6　小结……………………………………………………………… 111
参考文献 ………………………………………………………………… 111
第五章　叶轮机械中跨音速非定常及定常流动的位函数描述 ……………………………………………………………………… 113
§1　引言……………………………………………………………… 113
§2　三维速度位方程………………………………………………… 115
§3　三维非定常扰动速度位振幅方程……………………………… 120
§4　二维速度位方程………………………………………………… 123
§5　位函数模型中的等熵激波……………………………………… 125
§6　位函数模型中的尾流边界条件………………………………… 130
§7　小结……………………………………………………………… 132
参考文献 ………………………………………………………………… 133
第六章　平面叶栅跨音速绕流松弛法数值解…………………… 134
§1　引言……………………………………………………………… 134
§2　弦线法向小扰动位势方程及边界条件………………………… 135
§3　有限差分近似…………………………………………………… 141
§4　二维全位势方程解法…………………………………………… 143
§5　有关线松弛迭代过程的若干注释……………………………… 146
§6　一些算例………………………………………………………… 148
§7　小结……………………………………………………………… 151
参考文献 ………………………………………………………………… 151
第七章　定常跨音速势方程的线松弛迭代解法………………… 153
§1　引言……………………………………………………………… 153
§2　小扰动跨音速势方程差分格式的构造………………………… 154
§3　全位势方程的旋转差分格式…………………………………… 156
§4　线松弛迭代的伪时间相关分析………………………………… 160
§5　线松弛迭代求解过程…………………………………………… 165
§6　小结……………………………………………………………… 171
参考文献 ………………………………………………………………… 172
第八章　高速轴流式叶轮机械的叶型研究……………………… 173
§1　引言……………………………………………………………… 173

§2 机翼跨音速翼型发展的简单回顾……173
§3 超临界翼型技术在轴流压气机叶型设计方面的应用……176
§4 气动数值最优化方法简述……179
§5 一种削弱跨音速叶栅流场中激波强度的数值方法……185
§6 小结……194
参考文献……194
第九章 平面叶栅正问题、反问题及正、反混合问题的统一解法……196
§1 引言……196
§2 问题的提法……197
§3 差分格式……205
§4 解法略述……209
§5 算例……216
§6 小结……219
参考文献……219
第十章 跨音速叶栅流场的相仿律……221
§1 引言……221
§2 二维无限叶栅不可压绕流的远场条件……225
§3 二维无限叶栅跨音速流场的远场条件……231
§4 二维薄而微弯叶型无限叶栅的跨音速相仿律……234
§5 跨音速叶栅相仿律的可能用途……238
§6 小结……240
参考文献……241
第十一章 叶轮机械中的三维跨音速流动……242
§1 引言……242
§2 基本方程与定解条件……243
§3 积分型的基本方程……246
§4 计算方案概述……248
§5 算例……256
§6 几点结论……265
参考文献……265
第十二章 叶片颤振非定常气动问题简述……267
§1 引言……267
§2 判别叶片颤振发作的能量法原理……272
§3 轴流压气机与风扇叶片的失速颤振……275
§4 轴流压气机与风扇的超音速非失速颤振……278
§5 堵塞颤振与负攻角失速颤振……281
§6 蒸汽轮机叶片颤振……286

§7 小结……………………………………………………………… 287
参考文献 ……………………………………………………………… 288
第十三章 叶片颤振非定常气动问题的物理-数学模型 …… 290
§1 引言……………………………………………………………… 290
§2 对于有关简化假设的物理分析……………………………… 291
§3 具有不同简化程度的方程组或方程………………………… 297
§4 对于非定常分离流的处理…………………………………… 304
§5 小结……………………………………………………………… 313
参考文献 ……………………………………………………………… 313
第十四章 跨音速振荡叶栅气动弹性稳定性的数值分析…… 315
§1 振荡叶栅非定常跨音速绕流的解析解……………………… 315
§2 所用的数学模型……………………………………………… 318
§3 有限差分方程解法…………………………………………… 326
§4 叶栅气动弹性稳定性分析…………………………………… 331
§5 数值结果分析………………………………………………… 336
§6 小结……………………………………………………………… 342
参考文献 ……………………………………………………………… 342

第一章 基本方程

§1 叶轮机械中流场的一般分析与简化

叶轮机械中气体的三维流动理论是人们在由长期实践得来的丰富的感性认识的基础上，经过整理、改造和分析，逐步提炼出来的．因此，在讨论叶轮机械中流动的气体动力学理论之前，应该对叶轮机械中气体的实际流动状况有一个大致的了解．这种流动具有三维的特性，即流动参数随着三个空间坐标而变化；同时，对于任一固定的空间点来说，其上的流动参数还随时间而改变，也就是说，流动是非定常的．因此，一般说来，任一流动参数 q，它是三个空间坐标和时间的函数，即 $q = q(x, y, z, t)$．另外，从流体微团受力的情况来看，流体微团上不仅受到质量力（例如重力），还受到表面力的作用．而表面力中又有与流体微团的表面相垂直的法向力和与流体微团表面相切的切向力．实验还表明，对于不同的气体，或即使是对于同一种气体，在不同的压力、温度范围内，联系气体的诸热力学状态参数之间的关系式——状态方程也是各不相同的，等等．

如果要全面地考虑这些因素，将会使问题变得十分复杂，甚至遇到目前还无法克服的数学上的困难．因此，必须根据已积累的实践经验，对上述诸因素分别进行具体的分析，权衡主次，抓住主要的因素，舍去次要的因素，从而作出一些基本的假设．这些基本假设必须既能反映实际流动的主要规律，又能使问题简化到可以用数学的方法求解．

首先，在转子角速度为常数，各相邻的动、静叶列间相隔充分远，气流不发生分离现象及叶片振动很小等条件下，静叶轮中的绝对流动和动叶轮中的相对流动都可以足够准确地认为是定常的．

当然，在研究与叶片颤振，进口流场畸变，动静叶之间的干扰，旋转失速及喘振等有关的气动问题时，必须考虑非定常流动.

其次，大量实验表明，在流动不分离的情况下，气体的粘性影响主要体现在附着于固体壁面的一层很薄的**边界层**里. 因此在边界层以外的绝大部分区域中可以忽略气体的粘性影响. 这样不仅可以比较容易地求出叶轮机械中气体流动的主要规律，而且也可以为边界层的计算提供原始数据. 如有必要，可以求解边界层中的粘性流动，得出相应的补充和修正. 当然，在流动发生分离的情况中，处理起来就更加复杂了.

另外，许许多多实验证明，空气、空气和液体燃料的燃烧产物的混合物、氢、氦、过热水蒸汽等在目前各类叶轮机械中所遇到的温度和压力的范围内，其热力学状态参数是足够精确地满足 Clapeyron 方程的. 这种气体称为**完全气体**.

依据上面的讨论可知，对于范围相当广泛的许多叶轮机械中的气体流动问题来说，可以作出如下基本的假设:

1. 介质是无粘性的.

2. 介质的热力学状态参数满足 Clapeyron 方程. （即为完全气体）

3. 流动是定常的. 更确切地说，静叶轮中的绝对流动和动叶轮中的相对流动都是定常的.

§2 积分形式的基本方程

流体作为物质的一种运动形态，必须遵循自然界中关于物质运动的某些普遍规律，如质量守恒原理，Newton 第二定律，能量守恒原理等. 将这些普遍规律应用于流体运动这类物理现象，就可得到联系诸流动参数的关系式，这些关系式就是流体动力学的基本方程.

基本方程既可用积分形式表示，也可用微分形式来表示. 它们在本质上是一样的，但亦有差别. 我们先讨论积分形式的基本方程. 在这里，为具有更大的普遍性，先不作定常流动的假设.

在气体动力学的研究中，坐标系的选取是非常重要的. 如果坐标系选择得当，可以使所研究的问题得到很大的简化. 从区域的边界相对于地球是静止还是运动的观点来看，可以把叶轮机械中气体的流动区域分成如下两类：静叶轮或其它固定部件中的气体流动及动叶轮中的气体流动. 若采用固结于地球的坐标系(称为惯性坐标系或绝对坐标系)，描述上述第一类问题中的固体壁面(例如静叶片表面)的形状的方程与时间无关，一般说来将可认为气体运动是定常的；但描述第二类问题中的固壁（例如动叶片表面)的形状与运动的方程则将随时间而改变，此时气体的运动必然是非定常的. 然而，如果采用固结于动轮以常角速度 ω 绕叶轮机械的转动轴旋转的坐标系(称为相对坐标系，它显然是非惯性坐标系)的话，则第二类问题中的固壁表面的方程将不随时间而改变，此时气体的运动有可能是定常的.

由于上述原因，在研究静叶轮或其它固定部件中的气体流动时，采用绝对坐标系；而当研究动叶轮中的气体流动时，通常采用相对坐标系.

因为静叶轮可视为 $\omega=0$ 的动叶轮的特例，因而下面我们将采用相对坐标系，以动叶轮中的气体流动作为研究对象，写出其积分形式的基本方程.

(一) 连续方程

对于一个确定的封闭体系来说，质量守恒原理可简述如下：在封闭体系中不存在源或汇的条件下，封闭体系的质量不随时间变化. 其数学表达式为

$$\frac{D}{Dt}\iiint\limits_{\tau_0(t)}\rho d\tau_0=0 \tag{1.1}$$

这里 $\tau_0(t)$ 为时间 t 时的封闭体系的体积，$\frac{D}{Dt}$ 为系统导数.

为了把适用于封闭体系的方程改造成适合于开口体系的形式，须要应用如下输运公式[1]：

$$\frac{D}{Dt}\iiint_{\tau_0(t)}\Phi d\tau_0 = \frac{\partial}{\partial t}\iiint_{\tau}\Phi d\tau + \oiint_A (\boldsymbol{w}\cdot\boldsymbol{n})\Phi dA \qquad (1.2)$$

其中 τ 为开口体系的体积，在数值上它等于所考察 t 时刻封闭体系 $\tau_0(t)$ 的体积. A 是 τ 的界面面积. Φ 可以是空间坐标和时间的任意标量或向量函数. $\boldsymbol{n}$ 为界面的外法线单位向量. 由于 τ 是开口体系的体积，它与时间 t 是相互独立的，故而对于空间的积分和对于时间的微分之次序可以交换而不改变其结果.

将 (1.2) 式代入 (1.1) 式可得如下适用于开口体系的积分形式的连续方程:

$$\frac{\partial}{\partial t}\iiint_{\tau}\rho d\tau = -\oiint_A (\rho\boldsymbol{w}\cdot\boldsymbol{n})dA \qquad (1.3)$$

其物理意义为：单位时间内通过界面 A 流入的质量等于同时间内开口体系 τ 中质量的增加.

(二) 理想流体的动量方程

因为动量定理 (即 Newton 第二定律) 是在惯性坐标系中总结出来的，因此它的原始形式只适用于惯性坐标系.

在惯性坐标系中动量定理可简述如下：封闭体系的动量对于时间的变化率等于作用在该封闭体系上的合力. 其数学表达式为

$$\frac{D_a}{Dt}\iiint_{\tau_0(t)}\rho\boldsymbol{v}d\tau_0 = \iiint_{\tau_0(t)}\rho\boldsymbol{f}d\tau_0 - \oiint_{A_0(t)}p\boldsymbol{n}dA_0 \qquad (1.4)$$

这里 $\frac{D_a}{Dt}$ 表示绝对坐标系中的系统导数，$\boldsymbol{v}$ 为绝对速度向量，$\boldsymbol{f}$ 是作用在单位质量流体上的质量力.

由质量守恒原理知：$\frac{D_a}{Dt}(\rho d\tau_0) = 0$，故有

$$\frac{D_a}{Dt}\iiint_{\tau_0(t)}\rho\boldsymbol{v}d\tau_0 = \iiint_{\tau_0(t)}\left[\frac{D_a\boldsymbol{v}}{Dt}\rho d\tau_0 + \boldsymbol{v}\frac{D_a(\rho d\tau_0)}{Dt}\right]$$

$$= \iiint_{\tau_0(t)}\rho\frac{D_a\boldsymbol{v}}{Dt}d\tau_0$$

将上式代入 (1.4) 式可得

$$\iiint_{\tau_0(t)} \rho \frac{D_a \boldsymbol{v}}{Dt} d\tau_0 = \iiint_{\tau_0(t)} \rho \boldsymbol{f} d\tau_0 - \oiint_{A_0(t)} p\boldsymbol{n} dA_0 \tag{1.5}$$

为了得到在固结于动轮以等角速度$\boldsymbol{\omega}$旋转的相对坐标系中动量方程的表达式，必须了解在绝对坐标系和相对坐标系这两种坐标系中诸流动参数的相互转换关系式．文献 [2] 对这个问题作了详细的阐述．为了节省篇幅，可直接应用理论力学中熟知的公式

$$\underset{\left(\substack{\text{绝对}\\\text{加速度}}\right)}{\frac{D_a \boldsymbol{v}}{Dt}} = \underset{\left(\substack{\text{相对}\\\text{加速度}}\right)}{\frac{D\boldsymbol{w}}{Dt}} + \underset{\left(\substack{\text{牵连}\\\text{加速度}}\right)}{\boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{R})} + \underset{\left(\substack{\text{哥氏}\\\text{加速度}}\right)}{2\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{w}} \tag{1.6}$$

这里 $\boldsymbol{w}$ 为相对速度向量，$\boldsymbol{R}$ 为向径，$\frac{D}{Dt}$ 表示相对坐标系中的个体导数．

将式 (1.6) 代入式 (1.5) 即得相对坐标系中的动量方程如下：

$$\iiint_{\tau_0(t)} \rho \frac{D\boldsymbol{w}}{Dt} d\tau_0 = \iiint_{\tau_0(t)} [\boldsymbol{f} - \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{R}) - 2\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{w}] \rho d\tau_0 - \oiint_{A_0} p\boldsymbol{n} dA_0 \tag{1.7}$$

由于

$$\frac{D}{Dt} \iiint_{\tau_0(t)} \rho \boldsymbol{w} d\tau_0 = \iiint_{\tau_0(t)} \left[\rho \frac{D\boldsymbol{w}}{Dt} d\tau_0 + \boldsymbol{w} \frac{D(\rho d\tau_0)}{Dt} \right] = \iiint_{\tau_0(t)} \rho \frac{D\boldsymbol{w}}{Dt} d\tau_0$$

故 (1.7) 可改写为

$$\frac{D}{Dt} \iiint_{\tau_0(t)} \rho \boldsymbol{w} d\tau_0 = \iiint_{\tau_0(t)} [\boldsymbol{f} - \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{R}) - 2\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{w}] \rho d\tau_0 - \oiint_{A_0(t)} p\boldsymbol{n} dA_0 \tag{1.8}$$

将式 (1.2) 代入式 (1.8) 可得相对坐标系中适合于开口体系的动量方程

$$\frac{\partial}{\partial t}\iiint_{\tau}\rho\boldsymbol{w}d\tau+\oiint_{A}(\boldsymbol{w}\cdot\boldsymbol{n})\rho\boldsymbol{w}dA$$

$$=\iiint_{\tau}[\boldsymbol{f}-\boldsymbol{\omega}\times(\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{R})-2\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{w}]\rho d\tau-\oiint_{A}p\boldsymbol{n}dA \tag{1.9}$$

其物理意义是：作用在开口体系内流体上的合外力(包括质量力、表面压力、离心力和哥氏惯性力)加单位时间内通过界面流入的流体动量等于开口体系内的动量对时间的变化率.

（三）理想流体的动量矩方程

在叶轮机械气体动力学中，动量矩定理是很有用的．它不但可以较简便地决定转子的扭矩，而且还是推导流体的周向运动微分方程的一个方便的手段.

在惯性坐标系中动量矩定理可简述如下：封闭体系对某点O的动量矩对于时间的变化率等于外界作用在封闭体系上所有外力对于同一点O的力矩之和．其数学表达式为

$$\frac{D_a}{Dt}\iiint_{\tau_0(t)}(\boldsymbol{R}\times\boldsymbol{v})\rho d\tau_0=\iiint_{\tau_0(t)}(\boldsymbol{R}\times\boldsymbol{f})\rho d\tau_0-\oiint_{A_0(t)}(\boldsymbol{R}\times\boldsymbol{n})pdA_0 \tag{1.10}$$

经过和前一段中完全类似的推导，可得到在相对坐标系中适合于开口体系的动量矩方程如下[1]：

$$\frac{\partial}{\partial t}\iiint_{\tau}(\boldsymbol{R}\times\boldsymbol{w})\rho d\tau+\oiint_{A}(\boldsymbol{R}\times\boldsymbol{w})(\boldsymbol{w}\cdot\boldsymbol{n})\rho dA$$

$$=\iiint_{\tau}\boldsymbol{R}\times[\boldsymbol{f}-\boldsymbol{\omega}\times(\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{R})-2\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{w}]\rho d\tau-\oiint_{A}(\boldsymbol{R}\times\boldsymbol{n})pdA \tag{1.11}$$

它的物理意义是：作用在开口体系内流体上的合外力矩(包括质量力矩、表面压力矩、离心力矩及哥氏惯性力矩)与单位时间内通过界面流入的流体动量矩之和等于开口体系内流体的动量矩对于时

间的变化率。

(四) 能量方程

能量守恒原理可简述如下：封闭体系的总能量对于时间的变化率等于单位时间内外界传给该封闭体系的热量与作用在该封闭体系上的全部外力所作功之和.

外界传给封闭体系以热量可能有两种不同的途径，这就是热辐射与热传导. 若以 q_R 表示单位时间内辐射到封闭体系内单位质量流体上的热量，而以 q_λ 表示由于热传导在单位时间内通过封闭体系的界面单位面积传入的热量，则单位时间内外界传给封闭体系的热量等于

$$\iiint_{\tau_0(t)} q_R \rho d\tau_0 + \oiint_{A_0(t)} q_\lambda dA_0$$

作用在封闭体系内流体上的外力有质量力 $\boldsymbol{f}$，离心力 $(-\boldsymbol{\omega}\times(\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{R}))$，哥氏惯性力 $(-2\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{w})$ 及表面压力. 于是单位时间内作用在封闭体系上的全部外力所作功之和为

$$\iiint_{\tau_0(t)} \boldsymbol{w}\cdot[\boldsymbol{f}-\boldsymbol{\omega}\times(\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{R})-2\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{w}]\rho d\tau_0 - \oiint_{A_0(t)} (\boldsymbol{w}\cdot\boldsymbol{n}) p dA_0$$

封闭体系内的总能量为内能与动能之和. 若以 U 表示单位质量流体所具有的内能，则封闭体系内的总能量等于

$$\iiint_{\tau_0(t)} \left(U+\frac{w^2}{2}\right)\rho d\tau_0$$

于是根据能量守恒原理可得

$$\iiint_{\tau_0(t)} q_R \rho d\tau_0 + \oiint_{A_0(t)} q_\lambda dA_0 + \iiint_{\tau_0(t)} \boldsymbol{w}\cdot[\boldsymbol{f}-\boldsymbol{\omega}\times(\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{R}) - 2\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{w}]\rho d\tau_0 - \oiint_{A_0(t)} (\boldsymbol{w}\cdot\boldsymbol{n}) p dA_0 = \frac{D}{Dt}\iiint_{\tau_0(t)} \left(U+\frac{w^2}{2}\right)\rho d\tau_0 \tag{1.12}$$