常微分方程

袁相碗　徐洪义　包雪松　编

南京大学出版社

常微分方程

袁相碗　徐洪义　包雪松　编

南京大学出版社

1993・南京

(苏)新登字第011号

内 容 简 介

本书主要内容：第一、二章介绍常微分方程基本概念和一阶微分方程的理论及其解法；第三章讲解高阶微分方程，含几种特殊高阶方程的解法以及线性方程的通解结构；第四章讨论常微分方程组，含线性方程组通解结构以及一般微分方程、一阶线性偏微分方程的理论及其解法；第五章讲述微分方程基本理论及其稳定性理论。

本书可供高等院校理工科各专业作为教材之用，亦可作为专业技术人员的参考资料。

常微分方程
袁相碗　徐洪义　包雪松　编

南京大学出版社出版
(南京大学校内　邮政编码：210008)
江苏省新华书店发行　　常熟市印刷二厂印刷
开本850×1168　　印张9.625　　字数248千
1994年6月第1版　　1994年6月第1次印刷
印数1—1000
ISBN 7-305-02530-5

O·178　定价：8.20元
责任编辑：新　平

序

我们曾在南京大学数学、物理、天文等系讲授〈常微分方程〉课程，在经过多次教学实践的基础上，编写了讲义，以此为蓝本，几经修改，始成教材。

根据我校各专业对常微分方程的教学要求以及国内外有关这方面的教材，并结合我们的经验，将本讲义的内容作这样安排：第一、二章介绍常微分方程的基本概念和一阶微分方程的理论及其解法，第三、四章讲解高阶微分方程，包含线性方程组通解结构以及一般微分方程组、一阶线性偏微分方程的理论及其解法，第五章讲述微分方程基本理论及其稳定性理论。讲义中有部分内容标有“*”，可按专业情况，酌情删除。

我们在编写教材中，坚持由浅入深循序渐进的原则，例如解的存在唯一性定理在前几章用到之处是叙而不证，其证明则在第五章讲述，以便读者易于理解、掌握。同时我们注意到教材在数学上的逻辑性与严谨性。

本讲义可供高等院校理工科各专业作为教材之用，亦可作为有关专业技术人员的参考资料。

由于作者水平所限，不足之处在所难免，除在今后教学中作进一步修改外，我们衷心欢迎专家学者、读者给予指教。

编　者

1993.1.

目　录

第一章 绪　论

§1 微分方程，例题

1.1. 微分方程

定义 1 含有自变量，未知函数及其导数的方程，称为微分方程．例如：

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=p(x)y^2+q(x)y+r(x), \tag{1}$$

$$\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}+p_1(x)\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+p_2(x)y=r(x), \tag{2}$$

$$y=x\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}-\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)^3, \tag{3}$$

$$\frac{\mathrm{d}^3y}{\mathrm{d}x^3}=\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}, \quad \frac{\mathrm{d}^4y}{\mathrm{d}x^4}=0, \tag{4}$$

以及

$$\frac{\partial^2u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2u}{\partial z^2}=0. \tag{5}$$

注意：在微分方程中可以不含有自变量 x 和未知函数 y，如(4)．但是它一定要含有未知函数的导数，否则便不是微分方程．

定义 2 出现在微分方程中的未知函数的最高阶导数的阶被称为微分方程的阶．

例如方程(2)和(3)分别是二阶和一阶的．n 阶微分方程的一般形式可写为

$$F(x,y,y',\cdots,y^{(n)})=0. \tag{A}$$

1.2. 微分方程的分类

定义3 若微分方程中未知函数仅依赖于一个自变量，则称它为常微分方程，若未知函数依赖于多于一个自变量，则称它为偏微分方程.

例如方程(1)至(4)均为常微分方程，(5)则是偏微分方程. 本教程主要是讨论常微分方程，仅在第四章介绍与常微分方程组有关的一阶偏微分方程. 今后文中所指微分方程，除特别说明外均指常微分方程.

定义4 如果方程(A)中的函数 F 是以变量 $y,y',\cdots,y^{(n)}$ 为线性函数，其系数仅为 x 的函数，则称它为线性微分方程，否则称它为非线性微分方程，例如(2)和(4)均是线性方程.

n 阶线性微分方程一般可写成

$$a_0(x)y^{(n)}+a_1(x)y^{(n-1)}+\cdots+a_n(x)y=f(x), \tag{6}$$

其中 $a_0(x),\cdots,a_n(x)$ 及 $f(x)$ 都是已知函数.

本书除去某些特殊的一阶、高阶方程外，主要是讨论线性微分方程的求解问题及其某些特性.

1.3. 例题

在许多实际问题中，例如力学、电学等等，利用某种规律，常常可以将它们的变量之间的关系表示成一个常微分方程. 举例说明.

例1 自由落体. 若质量为 m 的物体在重力作用下，垂直自由下落，由牛顿(Newton)第二定律，距离 s 与时间 t 的关系则为

$$m\frac{\mathrm{d}^2s}{\mathrm{d}t^2}=mg,$$

或

$$\frac{\mathrm{d}^2s}{\mathrm{d}t^2}=g.$$

这是一个二阶线性微分方程.

例 2 如图 1 所示的L、C、R串联振荡回路，其电动势为$E\sin\omega t$. 在此回路中，电流强度为$I=\frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}t}$，其中$Q$为电容器$C$上的电荷，以$V$表示电容器$C$上的两端电压，则在回路中的总电压降$IR+V$应等于总电动势$E\sin\omega t-L\frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}t}$，即有

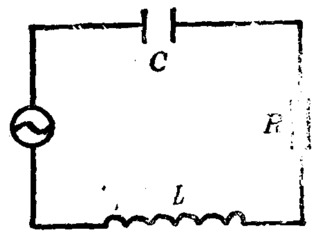

图 1

$$IR+V=E\sin\omega t-L\frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}t}.$$

由于$V=\frac{Q}{C}$，从而有

$$L\frac{\mathrm{d}^2Q}{\mathrm{d}t^2}+R\frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}t}+\frac{Q}{C}=E\sin\omega t.$$

这是关于变量为Q和t的二阶线性微分方程.

例 3 单摆 设质量为m的摆球，用长为l的细线(略去其质量)悬挂于O点(图 2)，摆球的平衡位置与垂线OO'相重合，将摆球拉开一个角度后，使其在重力作用下自由运动. 试求摆角θ与时间t的关系式.

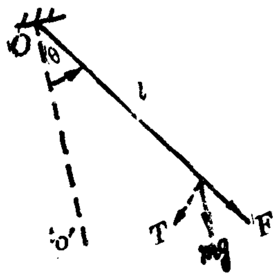

图 2

解 将重力mg分解为径向力F和切向力T，则径向力F与细线的张力F_1相抵消，切向力为$T=mg\sin\theta$以及切向加速度为$l\frac{\mathrm{d}^2\theta}{\mathrm{d}t^2}$. 于是由牛顿第二定律，得到变量$\theta$和$t$所满足的二阶微分方程为

$$ml\frac{\mathrm{d}^2\theta}{\mathrm{d}t^2}=-mg\sin\theta,$$

或

$$\frac{d^2\theta}{dt^2}+\frac{g}{l}\sin\theta=0$$

(摆球向右为正，向左为负)．

当$|\theta|\ll 1$时，则有二阶线性微分方程

$$\frac{d^2\theta}{dt^2}+\frac{g}{l}\theta=0.$$

例 4 按指数增长(衰减)现象　今以$\theta(t)$表示在时刻t的一个量，它随时间的推移而增长(衰减)，并且其增长率(衰减率)与量$\theta(t)$成比例(例如放射性元素衰变，细菌繁殖等属于此情形)，则量$\theta(t)$与时刻t的关系为$\frac{d\theta(t)}{dt}=K\theta(t)$，其中$K$为常数可由实验确定．

练 习 题 1

1．指出下列各方程的阶以及哪些是线性微分方程．

(1) $x^3y''+xy'+2y=\sin x$．

(2) $y''+\frac{1}{x-1}y'+\sqrt{x}\,y+\ln x=0$，$x>1$．

(3) $x(y')^2-2xy'-x=0$．

(4) $y''-2y(y')^2+2y'-xy=0$．

2．已知xoy平面上一曲线，在其上每点切线与该点的向径和y轴组成等腰三角形，试求该曲线所适合的微分方程．答　$x^2+y^2=(y-xy')^2$，$y^2=(xy')^2$，$2xyy'=y^2-x^2$．

3．一质点在重力作用下沿某曲线无摩擦滑动，在水平方向成等速运动，试求该曲线所满足的微分方程．答　$a^2\left[1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right]=2gy$，其中$a$为水平方向速度．

§2 微分方程的解

2.1. 微分方程的解

定义 1 若函数 $y=\varphi(x)$ 在区间 I 上有定义，且有 n 阶导数，并满足微分方程(A)，即有

$$F(x,\varphi(x),\varphi'(x),\cdots,\varphi^{(n)}(x))=0,\ x\in I,$$

则称 $y=\varphi(x)$ 是(A)在区间 I 上的解。

例 1 求解 $\frac{\mathrm{d}^2s}{\mathrm{d}t^2}=g$.

解 对所设微分方程积分，得到

$$\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}=gt+C_1$$

再次积分，得到原微分方程的解为

$$s=\frac{g}{2}t^2+C_1t+C_2, \tag{1}$$

这里 C_1 和 C_2 为任意常数。

例 2 求解 $y^{(n)}=f(x)$.

解 将原设微分方程连续积分 n 次，得到

$$y=\underbrace{\int\cdots\int}_{n\text{ 次}}f(y)(\mathrm{d}x)^n+C_{n-1}x^{n-1}+\cdots+C_0,$$

其中 $C_0,C_1,\cdots,C_{n-1}$ 为 n 个任意常数.

一般而言，n 阶微分方程(A)的解中含有 n 个独立的常数，所谓 n 个独立常数是指它们之间不存在任何函数关系。

2.2. 初值问题，通解

定义 2 设 n 阶微分方程(A)连同初始条件

$$y(x_0)=y_0,y'(x_0)=y_0',\cdots,y^{(n-1)}(x_0)=y_0^{(n-1)} \tag{2}$$

构成一个初值问题(这里 $y_0,y_0',\cdots,y_0^{(n-1)}$ 是给定的数). 求

满足(2)的方程(A)的解，称为初值问题求解或称柯西(Cauchy)问题.

例 3 求初值问题

$$\frac{d^2s}{dt^2}=g, s(0)=s'(0)=0$$

的解.

解 由例1，原设方程的解为(1). 由条件 $s(0)=s'(0)=0$，得到 $C_1=C_2=0$. 于是所求的解为

$$s=\frac{1}{2}gt^2$$

定义 3 设微分方程(A)的解为

$$y=\varphi(x,C_1,C_2,\cdots,C_n), \tag{3}$$

其中 $C_1,C_2,\cdots,C_n$ 是 n 个独立常数，并且对在一定范围内任给初始条件(2)，总能找到确定的值 $\tilde{C}_1,\tilde{C}_2,\cdots,\tilde{C}_n$，使得解 $y=\varphi(x,\tilde{C}_1,\tilde{C}_2,\cdots,\tilde{C}_n)$ 满足(A)，则称(3)是(A)的通解. 若(A)的通解为隐函数方程

$$\Phi(x,y,C_1,C_2,\cdots,C_n)=0, \tag{4}$$

则称(4)为方程(A)的通积分.

定义 4 在方程(A)的通积分(4)中，给出任意常数的确定值，所得之解称为(A)的**特解**.

一般讲来，n 阶微分方程(A)的通解中含有 n 个任意常数. 现在我们考虑相反的问题，若已知微分方程(A)的通积分为(4)，求它所满足的微分方程. 通常这个微分方程是 n 阶的.

设(4)中的函数 Φ 对 x 有 n 阶导数. 将(4)对 x 求一阶至 n 阶的导数，则有

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial\Phi}{\partial x}+\frac{\partial\Phi}{\partial y}\frac{dy}{dx}=0,\\
&\frac{\partial^2\Phi}{\partial x^2}+2\frac{\partial^2\Phi}{\partial x\partial y}y'+\frac{\partial^2\Phi}{\partial y^2}(y')^2+\frac{\partial\Phi}{\partial y}y''=0,\\
&\quad\vdots\\
&\frac{\partial^n\Phi}{\partial x^n}+\cdots\cdots\qquad\qquad+\frac{\partial\Phi}{\partial y}y^{(n)}=0
\end{aligned} \tag{5}$$

如果由(4)与(5)的 $n+1$ 个方程能够消去常数 $C_1, C_2, \cdots, C_n$，则得到所求的 n 阶微分方程具有形式为

$$f(x, y, y', \cdots, y^{(n)}) = 0.$$

例 4 已知微分方程有通解为 $y = C_1 e^x + C_2 e^{-x}$，其中 C_1 和 C_2 为常数，试求该微分方程.

解 将所设通解对 x 求一阶和二阶导数，得到

$$y' = C_1 e^x - C_2 e^{-x},$$
$$y'' = C_1 e^x + C_2 e^{-x},$$

即得

$$y'' - y = 0.$$

例 5 设 xoy 平面上的圆族为

$$(x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2, \tag{6}$$

其中 a, b, r 为任意常数，试求它所满足的微分方程.

解 对(6)就 x 求三次导数，得到

$$\begin{aligned} &(x-a) + (y-b)y' = 0, \\ &1 + y'^2 + (y-b)y'' = 0, \\ &3y'y'' + (y-b)y''' = 0. \end{aligned} \tag{7}$$

由(7)的最后两个方程消去 $y-b$，便得到所求微分方程为

$$(1 + y'^2)''' - 3y'(y'')^2 = 0$$

练 习 题 2

1. 对以下各题验证所给函数是微分方程的解.

(1) $x^2 y'' + xy' - 4y = 0$； $y_1 = \frac{1}{x^2}$， $y_2 = x^2$，

$y_3 = C_1 x^2 + C_2 \frac{1}{x^2}$， C_1, C_2 为常数.

(2) $y^{(4)} + 4y^{(3)} + 3y = x$； $y_1 = \frac{x}{3}$, $y_2 = e^{-x} + \frac{x}{3}$.

(3) $y''' - y'' + y' - y = 0$； $y_1 = C_1 e^x + C_2 \cos x + C_3 \sin x$，其中 C_1, C_2, C_3 为常数.

(4) $x+yy''=0$; $x^2+y^2-1=0$.

(5) $y'+p(x)y=0$; $y=Ce^{\int p(x)\mathrm{d}x}$.

2. 设以下各方程有形式为 $e^{\lambda x}$ 的解，试确定 λ 的值.

(1) $y'+2y=0$. 答 $\lambda=-2$.

(2) $y'''-3y''+2y'=0$. 答 $\lambda=0,1,2$.

3. 设以下各方程有形式为 x^n 的解，试确定 n 的值.

(1) $x^2y''+4xy'+2y=0$. 答 $n=-1,-2$.

(2) $x^2y''-4xy'+4y=0$. 答 $n=1,4$.

4. 求下列各曲线族所满足的微分方程

(1) $y=\sin(x+C)$ (C 为参数) 答 $y^2+y'^2=1$.

(2) $y=Cx+C^2$ (C 为参数) 答 $y=xy'+y'^2$.

(3) $(x-C_1)^2+(y-C_2)^2=1$ (C_1,C_2 为参数)

答 $(1+y')^2(1+y'^2)=(y'')^2$.

(4) $y=C_1e^x+C_2e^{-x}+x-1$ (C_1,C_2 为参数)

答 $y''-y+x-1=0$.

5. 设微分方程(A)在区间$[a,b]$上有解 $y=\varphi(x)$，证明对于任意常数 C，$y=\varphi(x+C)$也是(A)的解，并确定它的积分区间.

6. 求曲线族

$$\frac{x^2}{C^2}+\frac{y^2}{C^2-1}=1 \qquad (C \text{ 为参数})$$

所满足的微分方程，并从微分方程本身证明这曲线族是正交的，即这曲线族中任意二条必正交. 答 $xyy'^2+(x^2-1)y'-xy=0$.

§3 方 向 场

设一阶微分方程为

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=f(x,y), \tag{1}$$

其中函数 $f(x,y)$ 为已知函数.

方向场．设函数 $f(x, y)$ 在 xoy 平面的区域 D 内有定义，且点 $p(x, y)$ 是 D 内任意一点，则以点 p 为中心，作一短线段，其斜率等于 $f(x,y)$，其方向为 x 增加的方向．于是在 D 内每一点都可以作出这样短线段，我们就说在 D 内确定了方程 (1) 的方向场（图 1）．

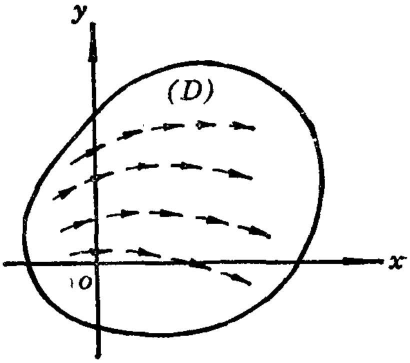

图 1

微分方程(1)的解 $y=\varphi(x)$ 几何解释．由 $y=\varphi(x)$ 所作出的曲线称为(1)的积分曲线．由于在积分曲线上点$(x,\varphi(x))$ 的切线斜率为$\frac{dy}{dx}=f(x,\varphi(x))$，这恰好是方向场在点$(x,\varphi(x))$的方向，因此在此积分曲线上每一点的切线方向是与在该点的方向场的方向一致的．从而沿着方向场的方向即可粗略地画出 (1) 的积分曲线族．

例 1 画出微分方程

$$\frac{dy}{dx}=x^2+y^2 \tag{2}$$

的方向场及其积分曲线族．

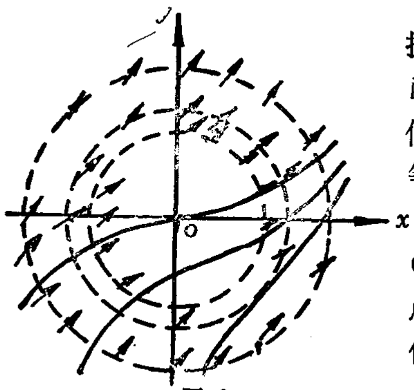

图 2

解 方程 (2) 是特殊的黎卡提 (Riccati) 方程，虽然它的右端函数 $f(x,y)=x^2+y^2$ 较为简单，但却证明了(2)的通解不能用初等函数或不定积分来表示．

现在首先在 xoy 平面内画出(2)的等倾线，即在此曲线上每一点方向是取方向场在该点的数值．在此例中，等倾线为

$$x^2+y^2=C \qquad (C\geqslant 0),$$